Capítulo 7

El espacio proyectivo

7.1 Historia

La geometría proyectiva estudia las propiedades de las figuras invariantes por proyección y sección.
Nace en el renacimiento. La cultura medieval basada en el teocentrismo da paso a una nueva forma de pensar en la que el centro es el hombre. Como muestra, su influencia en la pintura es muy ilustrativa. El pintor de la época pretende reflejar en un lienzo (plano) lo que su ojo capta del mundo natural (tridimensional). Así, la pintura renacentista es el resultado de un proceso de proyección (desde el ojo del pintor) y sección (por el plano del cuadro).
Hay grabados de A. Durero (1471–1528) en los que se ilustra este proceso.
Surge así la preocupación en los matemáticos (o mejor, en los científicos o humanistas) de la época de encontrar propiedades geométricas de la proyección-sección.
El resultado pionero que marca el principio de la Geometría Proyectiva se debe al francés G. Desargues (1591–1661) que encuentra la siguiente relación geométrica entre un triángulo (real) ABC y el triángulo imagen $A'B'C'$ obtenido del anterior por proyección y sección.

Teorema 7.1.1.– DE DESARGUES. *Sean ABC y $A'B'C'$ triángulos tales que AA', BB' y CC' se cortan en un punto O. Entonces, las rectas homólogas AB y $A'B'$, AC y AC' y BC y $B'C'$ se cortan en puntos P, Q, R, alineados.*
Influido por Desargues, B. Pascal (1623–1662) obtuvo interesantes aplicaciones de los métodos proyectivos en el estudio de las cónicas. Resaltamos el más célebre (¡obtenido con 16 años!).

Teorema 7.1.2.– DE PASCAL. *En un hexágono inscrito en una circunferencia los lados opuestos se cortan en puntos alineados.*
El caso de lados paralelos, igual que el anterior Teorema de Desargues, se resolvía añadiendo un punto "impropio" o "del infinito" a cada recta, proceso que detallaremos más adelante.
Este resultado puede extenderse fácilmente a cualquier cónica, obtenida por la sección plana del cono, por proyección desde un punto de la circunferencia inicial.
Estas ideas geométricas perdieron pronto su pujanza frente a la potencia de los métodos algebraicos introducidos por R. Descartes (1598–1650) y P. Fermat (1601–1665).

Tras un parón de 150 años, la geometría pura recupera su vigor gracias a la escuela de G. Monge. Uno de sus discípulos, Poncelet (1788–1867) hizo aportaciones decisivas a la Geometría Proyectiva. Parte de su trabajo lo realizó mientras era prisionero en Rusia como oficial de ejército napoleónico.
Uno de los principios en los que se basó, la invarianza por proyección y sección de la razón doble, resultó utilísimo. Este concepto de razón doble (razón de razones simples) conocido por Pappus, y probablemente

por Euclides, fue desarrollado por M. Chasles (1793–1880), obteniendo así el invariante numérico de las homografías (*i.e.*, isomorfismos proyectivos), concepto también introducido por Chasles.
K. von Staudt (1798–1867) contribuye a la Geometría Proyectiva con una primera fundamentación axiomática, independizándola de las nociones euclídeas: longitud, distancia, ángulo; presentándola más simple y natural.
De esta época son los resultados de A. Cayley (1821–1895) y F. Klein (1849–1925), que presentan modelos de la geometría euclídea y no euclídea dentro de la proyectiva. En el lenguaje moderno, el grupo de los movimientos, de las semejanzas, de los movimientos hiperbólicos, etc. son subgrupos del grupo proyectivo. Cayley hizo famosa la frase: *"La geometría proyectiva es toda la geometría"*. La introducción de las herramientas algebraicas actuales en Geometría Proyectiva se debe a A. Möbius (1790–1868) y J. Plücker (1801–1868). Las coordenadas homogéneas permiten entender fácilmente el principio de dualidad (punto $\leftrightarrow$ recta, "estar en" $\leftrightarrow$ "pasar por") que fue una fructífera herramienta de la época. Así el recíproco del Teorema de Desargues en el plano es simplemente su dual. El dual del Teorema de Pascal no es sino el Teorema de Brianchon (1785–1864).

Teorema 7.1.3.– DE BRIANCHON. *En un hexágono circunscrito a una cónica, las diagonales que unen vértices opuestos son concurrentes.*
La influencia de la Geometría Proyectiva en otras ramas de las matemáticas ha sido enorme. La invarianza por transformaciones (proyección y sección) ha sido el germen de muchas ideas en Topología, Algebra, Ecuaciones Diferenciales e incluso Física Teórica. Sin embargo, la heredera natural de aquella ha sido la geometría algebraica, donde la estructura de espacio proyectivo se ha mostrado como la más natural, simple y potente.

7.2 Definición y notaciones

Podemos imaginar el plano proyectivo como el plano de la pintura, de modo que, si el ojo del pintor está en el origen O de $\mathbb{R}^3$, cada punto proyectivo A' es el punto del lienzo definido por una recta vectorial $\langle\overrightarrow{OA}\rangle$. Más concretamente, definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } \mathbf{u} = \lambda\mathbf{v},$$

y se define el plano proyectivo como el conjunto cociente $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$.
En general, si k es un cuerpo, y $n \geq 1$, definimos la relación análoga en $k^{n+1} \setminus \{0\}$, y el espacio proyectivo como el conjunto cociente

$$\mathbb{P}_n(k) = \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}.$$

Se adoptarán las siguientes notaciones:

- Si $(a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$, su clase de equivalencia, es decir, el punto de $\mathbb{P}_n(k)$ que define se notará por $(a_0 : \cdots : a_n)$, por lo que

$$(a_0 : \cdots : a_n) = (b_0 : \cdots : b_n) \iff rango \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_n \\ b_0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = 1$$

- Llamaremos π a la aplicación sobreyectiva proyección natural:

$$\begin{aligned} \pi\colon k^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}_n(k) \\ (a_0, \ldots, a_n) &\longmapsto (a_0 : \cdots : a_n) \end{aligned}$$

Todo lo que sigue en esta sección, es la traslación, vía π, de los conceptos de dependencia lineal, variedad lineal, dimensión..., desde el espacio vectorial k^{n+1} al espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$.

Lema 7.2.1.– *Sean $\mathbf{v_i} = (a_{i0}, \ldots, a_{in}) \in k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, para $i = 1, \ldots, r$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Los vectores $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ son linealmente independientes (resp. linealmente dependientes).*

2. *Para cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de k no nulos, los vectores $\{\lambda_1\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda_r\mathbf{v}_r\}$ son linealmente independientes (resp. linealmente dependientes).*

3. *Se verifica que*

$$\dim L_v(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = rango \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = r \qquad (resp. \ < r.)$$

Para evitar confusión por el abuso de notación, se denomina $L_v(E)$ el subespacio vectorial generado por el subconjunto $E \subset k^{n+1}$.

Demostración: Trivial, por Álgebra Lineal.

Definición 7.2.2.– *Sean $P_1, \ldots, P_r$ puntos de $\mathbb{P}_n(k)$. Se dirá que los puntos $\{P_1, \ldots, P_r\}$ son linealmente independientes (resp. dependientes) si para cualesquiera $\mathbf{v_i} \in k^{n+1}$ tales que $\pi(\mathbf{v_i}) = P_i$ se verifica que $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ son linealmente independientes (resp. dependientes).*

Lema 7.2.3.– *Sean $\mathbf{v_i} = (a_{i0}, \ldots, a_{in}) \in k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $i = 1, \ldots, r$; y sea $\mathbf{v} = (a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

1. *El vector $\mathbf{v}$ depende linealmente de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$.*

2. *El vector $\lambda\mathbf{v}$ depende linealmente de $\{\lambda_1\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda_r\mathbf{v}_r\}$, para cualesquiera $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k \setminus \{0\}$.*

3. *Se verifica que*

$$rango \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_n \\ a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

4. *El vector $\mathbf{v}$ está en la variedad lineal $L_v(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$.*

Demostración: Trivial, por Álgebra Lineal.

Definición 7.2.4.– *Sean $P, P_1, \ldots, P_r$ puntos de $\mathbb{P}_n(k)$, con $\pi(\mathbf{v}) = P$ y $\pi(\mathbf{v_i}) = P_i$, para $i = 1, \ldots, r$. Se dirá que P depende linealmente de $\{P_1, \ldots, P_r\}$ si $\mathbf{v}$ depende linealmente de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$,*

Corolario 7.2.5.– *De lo anterior se deduce lo siguiente:*

- *Supongamos que $P_i = (a_{i0} : \cdots : a_{in})$, para $i = 1, \ldots, r$; se tiene que*

$$\{P_1, \ldots, P_r\} \text{ son linealmente independientes} \iff rango \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = r.$$

- *Supongamos además que $P = (b_0 : \cdots : b_n)$. Entonces,*

$$P \text{ depende linealmente de } \{P_1, \ldots, P_r\} \iff rango \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_n \\ a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

7.3 Variedades lineales proyectivas

Definición 7.3.1.– Variedad lineal proyectiva. *Sea $E \subset \mathbb{P}_n(k)$ un subconjunto. Se define la variedad lineal proyectiva generada por E,$E \neq \emptyset$, y se nota $L_p(E)$, como*

$$L_p(E) = \{P \in \mathbb{P}_n \mid P \text{ depende linealmente de } E', \text{ siendo } E' \text{ un subconjunto finito de } E.\}$$

Si $E = \emptyset$, se define $L_p(\emptyset) = \emptyset$

Proposición 7.3.2.– Propiedades de L_p. *Sea $E \subset \mathbb{P}_n(k)$.*

- *Se verifica que $E \subset L_p(E)$, ya que P depende linealmente de $\{P\}$.*
- *El espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ es una variedad lineal proyectiva, porque $\mathbb{P}_n = L_p(\mathbb{P}_n)$.*
- *Si $E \subset F$, entonces $L_p(E) \subset L_p(F)$.*
- *Si $P \in \mathbb{P}_n(k)$, es $\{P\} = L_p(\{P\})$, es decir, un punto es una variedad lineal proyectiva. Por abuso de notación, escribiremos $P = L_p(P)$, así como $L_p(P_1, \ldots, P_r)$ en lugar de $L_p(\{P_1, \ldots, P_r\})$.*

Se notará el conjunto de variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}_n(k)$ por $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ Este conjunto es un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{P}_n)$, conjunto de partes de $\mathbb{P}_n$, y $L_p : \mathcal{P}(\mathbb{P}_n) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ es una aplicación sobreyectiva.. Esta situación es análoga al caso vectorial: si k^{n+1} es el espacio vectorial, $\mathcal{R}(k^{n+1})$ representa el conjunto de variedades lineales vectoriales o subespacios vectoriales de k^{n+1}, que forma un retículo para las operaciones de suma e intersección. Así, la aplicación

$$L_v \colon \mathcal{P}(k^{n+1}) \to \mathcal{R}(k^{n+1})$$

es una aplicación sobreyectiva, y se tiene el siguiente

Teorema 7.3.3.– *Sea $\bar{\pi} \colon \mathcal{P}(k^{n+1}) \to \mathcal{P}(\mathbb{P}_n)$ la aplicación definida por*

$$\bar{\pi}(E_0) = \pi(E_0 \setminus \{\mathbf{0}\}),$$

para $E_0 \subset k^{n+1}$. Entonces, $\bar{\pi}$ induce una aplicación biyectiva $\bar{\pi} \colon \mathcal{R}(k^{n+1}) \to \mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(k^{n+1}) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathcal{P}(\mathbb{P}_n) \\ \downarrow L_v & & \downarrow L_p \\ \mathcal{R}(k^{n+1}) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathcal{R}(\mathbb{P}_n) \end{array}$$

i.e., es $\bar{\pi} L_v = L_p \bar{\pi}$.

Demostración: Es obvio que $\bar{\pi} \colon \mathcal{P}(k^{n+1}) \to \mathcal{P}(\mathbb{P}_n)$ es sobreyectiva. Para ver que la restricción a los retículos está definida y es sobreyectiva, veamos que $\bar{\pi} L_v = L_p \bar{\pi}$.
Sea $E_0 \subset k^{n+1}$. Si $E_0 = \emptyset$ ó $\{\mathbf{0}\}$, entonces $\bar{\pi} L_v(E_0) = L_p \bar{\pi}(E_0) = \emptyset$. Supongamos pues, que $E_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ es no vacío. Entonces, $P \in L_p \bar{\pi}(E_0)$ si y sólo si P depende linealmente de $\{\pi(\mathbf{v}_1), \ldots, \pi(\mathbf{v}_r)\}$, donde $\mathbf{v}_i \in E_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Esto es equivalente a decir que $\mathbf{v}$ depende linealmente de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, donde $\mathbf{v}_i \in E_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $P = \pi(\mathbf{v})$; es decir, $\mathbf{v} \in L_v(E_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Esta condición es equivalente a $P = \pi(\mathbf{v}) \in \pi(L_v(E_0) \setminus \{\mathbf{0}\}) = \bar{\pi} L_v(E_0)$.
Queda ver que $\bar{\pi}$ es inyectiva. Sea $\bar{\pi}(L_0) = \bar{\pi}(M_0)$. Si $\mathbf{v} \in L_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces es $\pi(\mathbf{v}) \in \bar{\pi}(L_0) = \bar{\pi}(M_0)$. Por tanto, se tiene que $\pi(\mathbf{v}) = \pi(\mathbf{v}')$, con $\mathbf{v}' \in M_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Esto quiere decir que existe un $\lambda \neq 0$ tal que $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}'$, luego $\mathbf{v} \in M_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Así, se tiene $L_0 \subset M_0$. La otra inclusión es análoga. Esto finaliza la demostración.

Corolario 7.3.4.– *Se verifica que $L_p L_p = L_p$.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, se tiene que

$$\begin{array}{rcll} L_pL_p(E) & = & L_pL_p(\bar{\pi}(E_0)) & \text{por ser } \bar{\pi} \text{ sobreyectiva} \\ & = & L_p(\bar{\pi}L_v(E_0)) & \text{por conmutatividad del diagrama} \\ & = & \bar{\pi}L_vL_v(E_0) & \text{por conmutatividad del diagrama} \\ & = & \bar{\pi}L_v(E_0) & \text{por álgebra lineal} \\ & = & L_p\bar{\pi}(E_0) & \text{por conmutatividad del diagrama} \\ & = & L_p(E). & \end{array}$$

Definición 7.3.5.– BASE DE UNA VARIEDAD LINEAL PROYECTIVA. *Se llamará base de una variedad lineal proyectiva $L \neq \emptyset$ a todo conjunto finito $E \subset \mathbb{P}_n$ de puntos linealmente independientes tales que $L = L_p(E)$.*

Corolario 7.3.6.– *Toda variedad lineal proyectiva no vacía tiene una base.*

DEMOSTRACIÓN: Sea L una variedad lineal proyectiva y sea E' tal que $L = L_p(E')$. Entonces,

$$L = L_p(E') = L_p\bar{\pi}(E'_0) = \bar{\pi}L_v(E'_0).$$

Pero, por álgebra lineal, sabemos que existe un subconjunto finito de vectores linealmente independientes $E_0 \subset E'_0$ tal que $L_v(E'_0) = L_v(E_0)$. Por tanto,

$$L = \bar{\pi}L_v(E_0) = L_p\bar{\pi}(E_0).$$

Esto prueba el corolario.

Corolario 7.3.7.– *Todas las bases de una variedad lineal proyectiva no vacía tienen el mismo número de elementos.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia directa del análogo vectorial y del corolario anterior.

Corolario 7.3.8.– *Las variedades lineales proyectivas no vacías tienen ecuaciones paramétricas e implícitas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $L = L_p(E)$. Por el corolario 7.3.6, es $L = L_p(P_1, \ldots, P_r)$, con $P_i = (a_{i0} : \cdots : a_{in})$, $i = 1, \ldots, r$. Sea $P = (x_0 : \cdots : x_n)$, entonces,

$$\begin{array}{rcl} P \in L & \Longleftrightarrow & P \text{ depende linealmente de } \{P_1, \ldots, P_r\} \\ & \Longleftrightarrow & rango \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \\ a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = r, \end{array}$$

que define unas ecuaciones implícitas de L análogamente al caso vectorial (nótese que hay $n - r + 1$ ecuaciones).
También de forma análoga al caso vectorial, se tiene

$$\begin{array}{rcl} P \in L & \Longleftrightarrow & P \text{ depende linealmente de } \{P_1, \ldots, P_r\} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x_0 = \lambda_1 a_{10} + \cdots + \lambda_r a_{r0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_1 a_{n0} + \cdots + \lambda_r a_{rn} \end{cases} \end{array}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ no todos nulos, que definen unas ecuaciones paramétricas de L.

Nota 7.3.9.– Recíprocamente, un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en $x_0, \ldots, x_n$ definen siempre un subespacio vectorial $L_0 \subset k^{n+1}$, y por tanto, una variedad lineal proyectiva $\bar{\pi}(L_0)$.

Corolario 7.3.10.– *La intersección de variedades lineales proyectivas es una variedad lineal proyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: La intersección de dos variedades lineales proyectivas L y M, se corresponde con el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones que se obtiene al reunir las ecuaciones implícitas de L y M.

Definición 7.3.11.– *Se llama dimensión de una variedad lineal proyectiva al número de elementos de una base menos* 1*, es decir,*

$$\dim(L) = \dim \bar{\pi}^{-1}(L) - 1$$

Nota 7.3.12.– Como complemento de la definición anterior,

- Se conviene que la dimensión de la variedad lineal proyectiva vacía es -1.
- La dimensión de un punto es 0.
- La dimensión de $\mathbb{P}_n$ es n.
- Se llamarán rectas, planos e hiperplanos a las variedades lineales proyectivas de dimensiones 1, 2 y $n-1$, respectivamente.

Definición 7.3.13.– *Si L_1, $L_2 \in \mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$, se define la suma de variedades lineales proyectivas como*

$$L_1 + L_2 = L_p(L_1 \cup L_2).$$

Proposición 7.3.14.– PROPIEDADES DE LA SUMA. *Se verifica*

1. *$L_1 + L_2$ es la menor variedad lineal proyectiva que contiene a ambas.*
2. *Si E, $F \subset \mathbb{P}_n$, entonces $L_p(E) + L_p(F) = L_p(E \cup F)$.*
3. $L_1 + L_2 = \displaystyle\bigcup_{\substack{P_1 \in L_1 \\ P_2 \in L_2}} (P_1 + P_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Probemos el apartado 1. Desde luego, $L_1 + L_2 = L_p(L_1 \cup L_2) \supset L_p(L_i) = L_i$, para $i = 1, 2$. Si L_3 es otra variedad lineal proyectiva, con $L_3 \supset L_1$, $L_3 \supset L_2$, entonces, es $L_3 \supset L_1 \cup L_2$, luego $L_3 = L_p(L_3) \supset L_p(L_1 \cup L_2) = L_1 + L_2$.
Probaremos el apartado 2 por doble inclusión. En efecto, $L_p(E) \subset L_p(E \cup F)$, y $L_p(F) \subset L_p(E \cup F)$. Por tanto, $L_p(E) + L_p(F) \subset L_p(E \cup F)$, por el apartado 1. Recíprocamente, $E \cup F \subset L_p(E) \cup L_p(F)$, luego $L_p(E \cup F) \subset L_p(L_p(E) \cup L_p(F)) = L_p(E) + L_p(F)$.
El apartado 3 se demuestra también por doble inclusión: $L_1 + L_2 \supset \bigcup(P_1 + P_2)$, con $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$ es inmediato. Por otra parte, si $P \in L_1 + L_2$, P es combinación lineal finita de puntos de $L_1 \cup L_2$ y, agrupando los puntos, resulta que P es combinación lineal de un punto de L_1 y de otro de L_2.

Teorema 7.3.15.– *La aplicación $\bar{\pi}\colon \mathcal{R}(k^{n+1}) \to \mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ es un isomorfismo de retículos que conserva inclusiones.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que $\bar{\pi}$ conserva la suma de variedades lineales. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(L + M) &= \bar{\pi}\big(L_v(E_0) + L_v(F_0)\big) \\
&= \bar{\pi} L_v(E_0 \cup F_0) \\
&= L_p \bar{\pi}(E_0 \cup F_0) \\
&= L_p\big[\bar{\pi}(E_0) \cup \bar{\pi}(F_0)\big] \\
&= L_p \bar{\pi}(E_0) + L_p \bar{\pi}(F_0) \\
&= \bar{\pi} L_v(E_0) + \bar{\pi} L_v(F_0) \\
&= \bar{\pi}(L) + \bar{\pi}(M).
\end{aligned}$$

Probaremos que $\bar{\pi}(L \cap M) = \bar{\pi}(L) \cap \bar{\pi}(M)$. Se tiene que

$$\bar{\pi}(L \cap M) = \pi((L \cap M) \setminus \{\mathbf{0}\}) = \pi((L \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap (M \setminus \{\mathbf{0}\}))$$

coincide con

$$\pi(L \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap \pi(M \setminus \{\mathbf{0}\}) = \bar{\pi}(L) \cap \bar{\pi}(M).$$

La inclusión $\subset$ se verifica para cualquier aplicación. Veamos la otra: Si $P \in \pi(L \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap \pi(M \setminus \{\mathbf{0}\})$, será $P = \pi(\mathbf{v_1}) = \pi(\mathbf{v_2})$ con $\mathbf{v_1} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{v_2} \in M \setminus \{\mathbf{0}\}$. Por tanto, existe $\lambda \neq 0$ tal que $\mathbf{v_1} = \lambda \mathbf{v_2}$. Al ser L y M variedades lineales vectoriales, se tendrá

$$\mathbf{v_i} \in (L \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap (M \setminus \{\mathbf{0}\}).$$

Para acabar, veamos que conserva las inclusiones. Supongamos $L \subset M$, entonces

$$\bar{\pi}(L) = \pi(L \setminus \{\mathbf{0}\}) \subset \pi(M \setminus \{\mathbf{0}\}) = \bar{\pi}(M).$$

Corolario 7.3.16.– *$\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ es un retículo modular para las operaciones $\cap$ y $+$, es decir, son operaciones internas conmutativas, asociativas e idempotentes que verifican la propiedad de simplificación:*

$$L_1 \cap (L_1 + L_2) = L_1 + (L_1 \cap L_2) = L_1,$$

y la propiedad modular:

$$si \qquad L_1 \subset L_3, \qquad (L_1 + L_2) \cap L_3 = L_1 + (L_2 \cap L_3).$$

Demostración: Basta aplicar que $\mathcal{R}(k^{n+1})$ es retículo modular y usar el isomorfismo anterior.

Teorema 7.3.17.– Fórmula proyectiva de la dimensión. *Para cualesquiera variedades lineales L_1, $L_2 \in \mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$, se verifica*

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$$

Demostración: El teorema es consecuencia de la fórmula vectorial de la dimensión y del Teorema 7.3.3:

$$\begin{aligned} \dim(L_1 + L_2) &= \dim \bar{\pi}^{-1}(L_1 + L_2) - 1 = \dim\big[\bar{\pi}^{-1}(L_1) + \bar{\pi}^{-1}(L_2)\big] - 1 \\ \dim(L_1 \cap L_2) &= \dim \bar{\pi}^{-1}(L_1 \cap L_2) - 1 = \dim\big[\bar{\pi}^{-1}(L_1) \cap \bar{\pi}^{-1}(L_2)\big] - 1. \end{aligned}$$

Sumando ambas igualdades, y usando la fórmula de la dimensión vectorial, se tiene

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim \bar{\pi}^{-1}(L_1) + \dim \bar{\pi}^{-1}(L_2) - 2 = \dim(L_1) + \dim(L_2).$$

Corolario 7.3.18.– *Dos rectas distintas de $\mathbb{P}_2$ se cortan en un punto.*

Demostración: Si L_1, $L_2 \subset \mathbb{P}_2$ son rectas distintas, entonces $L_1 + L_2 \supset L_1$, con la contención estricta, luego $\dim(L_1 + L_2) > \dim(L_1) = 1$; por otro lado, como $L_1 + L_2 \subset \mathbb{P}_2$, es $\dim(L_1 + L_2) \leq \dim \mathbb{P}_2 = 2$; por tanto $\dim(L_1 + L_2) = 2$ y por el teorema, $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$, luego es un punto.

Corolario 7.3.19.– *Dos planos distintos de $\mathbb{P}_3$ se cortan en una recta.*

Demostración: Análoga a la del corolario 7.3.18.

Corolario 7.3.20.– *Un hiperplano H y una variedad lineal proyectiva L de dimensión r mayor o igual que 0, se cortan en una variedad lineal de dimensión mayor o igual que $r - 1$. La igualdad se alcanza si y sólo si $L \not\subset H$.*

Demostración: Análoga a la del corolario 7.3.18.

7.4 El espacio afín sumergido en el espacio proyectivo

Un espacio afín está dado por un conjunto de puntos $X = k^n$ y un conjunto de vectores $V = k^n$. En cierto modo, el espacio proyectivo es la unión de ambos. Veremos que muchas de las propiedades del espacio afín se interpretan fácilmente en el espacio proyectivo.
Sea $\phi\colon X \to \mathbb{P}_n$ la aplicación definida por

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = (1 : a_1 : \cdots : a_n).$$

Es inmediato comprobar que

1. ϕ es una aplicación inyectiva.
2. $img(\phi) = \mathbb{P}_n \setminus H$, con $H : x_0 = 0$, que llamaremos hiperplano del infinito, por razones que se estudian más adelante.

Sea ahora $\pi_\infty\colon V \setminus \{\mathbf{0}\} \to H$ la aplicación definida por

$$\pi_\infty(a_1, \ldots, a_n) = (0 : a_1 : \cdots : a_n),$$

que dota a H de estructura de espacio proyectivo de dimensión $n-1$.
Como $\mathbb{P}_n = img(\phi) \cup H$, podemos entender que $\mathbb{P}_n$ "contiene" al conjunto X de puntos del espacio afín (en correspondencia biunívoca con $img(\phi)$). Veremos a continuación que esta inmersión conserva la dependencia lineal, variedades lineales, etc.

Proposición 7.4.1.– *Sean $\{P_1, \ldots, P_r\} \subset X$ puntos afines. Son equivalentes*

1. *Los puntos afines $\{P_1, \ldots, P_r\}$ son afínmente independientes.*
2. *Los puntos proyectivos $\{\phi(P_1), \ldots, \phi(P_r)\}$ son linealmente independientes.*

Demostración: Sean $P_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces, $\{P_1, \ldots, P_r\}$ son afínmente independientes si y sólo si

$$rango \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} = r,$$

y esta condición es equivalente a que $\{\phi(P_1), \ldots, \phi(P_r)\}$ sean linealmente independientes.

Definición 7.4.2.– Clausura proyectiva. *Si $L \subset X$ es una variedad lineal afín, se llama clausura proyectiva de L a*

$$\bar{L} = L_p(\phi(L)).$$

Nótese que $\phi(L)$ no es una variedad lineal proyectiva, salvo que $L = \emptyset$ ó $\{P\}$.
Evidentemente, se tiene que la clausura proyectiva del vacío es el conjunto vacío, esto es, $\bar{\emptyset} = \emptyset$.
Consideremos ahora una variedad afín L, con $L \neq \emptyset$, y $\dim L = r \geq 0$, entonces L se puede escribir como $L = P + D(L)$, con $D(L) = L_v(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$.

Proposición 7.4.3.– *Si L es una variedad afín,* $\dim L \geq 0$, *y con la notación anterior,*

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L_p\big(\phi(P), \pi_\infty(\mathbf{v}_1), \ldots, \pi_\infty(\mathbf{v}_r)\big) \\ &= L_p\big(\phi(P), \phi(P + \mathbf{v}_1), \ldots, \phi(P + \mathbf{v}_r)\big). \end{aligned}$$

Demostración: Sean $P = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{v}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, para $i = 1, \ldots, r$, y las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 + a_{11} & \cdots & a_n + a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 + a_{r1} & \cdots & a_n + a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Las filas de ambas matrices generan el mismo subespacio vectorial de k^{n+1} y por tanto la misma variedad lineal proyectiva. Así se tiene la segunda igualdad.
Por otra parte, $\{\phi(P), \phi(P+\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(P+\mathbf{v}_r)\} \subset \phi(L)$, luego

$$L_p\big(\phi(P), \phi(P+\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(P+\mathbf{v}_r)\big) \subset \bar{L}.$$

Recíprocamente, como

$$L = \{(a_1 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{r1}, \ldots, a_n + \lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_r a_{rn}) \quad , \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k\}.$$

es

$$\phi(L) = \big\{\big(1 : a_1 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{r1} : \cdots : a_n + \lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_r a_{rn}\big), \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k\big\}.$$

En consecuencia, $\phi(L) \subset L_p\big(\phi(P), \pi_\infty(\mathbf{v}_1), \ldots, \pi_\infty(\mathbf{v}_r)\big)$, luego $\bar{L} \subset L_p\big(\phi(P), \pi_\infty(\mathbf{v}_1), \ldots, \pi_\infty(\mathbf{v}_r)\big)$.

Corolario 7.4.4.– *Para toda variedad afín L,*

$$\dim(L) = \dim(\bar{L}).$$

Corolario 7.4.5.– *Si $L = P + D(L)$, es $\bar{L} = \phi(P) + \bar{\pi}_\infty(D(L))$.*

Corolario 7.4.6.– *Si*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{r1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n + \lambda_1 a_{n0} + \cdots + \lambda_r a_{rn} \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de $L \neq \emptyset$, entonces las ecuaciones paramétricas de $\bar{L}$ se obtienen mediante "homogeneización":

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 \\ x_1 = a_1\lambda_0 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{r1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n\lambda_0 + \lambda_1 a_{n0} + \cdots + \lambda_r a_{rn} \end{cases}$$

Corolario 7.4.7.– *Sea $L \neq \emptyset$ una variedad afín. Entonces,*

$$\bar{L} = \phi(L) \cup L_\infty, \qquad \textit{donde } L_\infty = \bar{L} \cap H = \bar{\pi}_\infty D(L).$$

Además, $\dim L_\infty = \dim L - 1$.

Corolario 7.4.8.– *Si*

$$L : \begin{cases} b_{10} + b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{r0} + b_{r1}x_1 + \cdots + b_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones implícitas de $L \neq \emptyset$, entonces las ecuaciones implícitas de $\bar{L}$ se obtienen mediante "homogeneización:"

$$\bar{L} : \begin{cases} b_{10}x_0 + b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{r0}x_0 + b_{r1}x_1 + \cdots + b_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Demostración: Desde luego $\phi(L)$ verifica estas ecuaciones. Por otra parte, la dimensión de $\bar{L}$ es

$$n - rango \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r0} & b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

que coincide con $\dim L$, ya que

$$L \neq \emptyset \iff rango \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r0} & b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.4.9.– Veamos la clausura proyectiva de variedades de dimensión pequeña.

- Si L es un punto, $\phi(P)$ es un punto, y $\bar{L} = \phi(L)$, $L_\infty = \emptyset$.
- Si L es una recta, L_∞ es un punto, correspondiente a la dirección de L. Así, $\bar{L} = \phi(L) \cup L_\infty$.

Teorema 7.4.10.– Interpretación del paralelismo. *Sean L_1, L_2 variedades lineales afines no vacías. Entonces*

$$L_1 \parallel L_2 \iff L_{1\infty} \subset L_{2\infty} \text{ ó } L_{1\infty} \supset L_{2\infty}.$$

Demostración: Haremos la demostración suponiendo que L_1 es la variedad de menor dimensión; si fuera necesario se pueden permutar los papeles de L_1 y L_2.

$$\begin{aligned} L_1 \parallel L_2 &\iff D(L_1) \subset D(L_2) \\ &\iff \bar{\pi}_\infty D(L_1) \subset \bar{\pi}_\infty D(L_2) \qquad \text{por ser } \bar{\pi}_\infty \text{ isomorfismo} \\ &\iff L_{1\infty} \subset L_{2\infty} \qquad \text{por definición.} \end{aligned}$$

Este teorema se corresponde con la intuición que indicamos al comienzo de esta sección. Por ejemplo, dos rectas afines paralelas "añaden" su dirección (común) al considerar sus clausuras proyectivas, luego las clausuras son rectas proyectivas que se cortan en un punto (común) de la recta del infinito.

Proposición 7.4.11.– *Sean*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\textit{variedades lineales afines de } X \textit{ no vacías}\} \\ \mathcal{P} &= \{\textit{variedades lineales proyectivas de } \mathbb{P}_n \textit{ no contenidas en } H\} \end{aligned}$$

Existe una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos dada por la clausura proyectiva, cuya inversa es ϕ^{-1} y que conserva las operaciones $+$ y $\cap$ (si no es vacía).

Demostración: Veamos en primer lugar que $\phi^{-1}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ está bien definida. Sea M una variedad proyectiva dada por sus ecuaciones implícitas

$$(E)\begin{cases} b_{10}x_0 + b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{r0}x_0 + b_{r1}x_1 + \cdots + b_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \emptyset \neq M \cap \phi(X) &= \{(x_0 : \cdots : x_n), \text{ con } x_0 \neq 0, \text{ verificando } (E)\} \\ &= \{(1 : y_1 : \cdots : y_n), \text{ verificando } (E')\}, \end{aligned}$$

donde

$$(E')\begin{cases} b_{10} + b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{r0} + b_{r1}y_1 + \cdots + b_{rn}y_n = 0 \end{cases}$$

Llamando L a la variedad afín no vacía dada por las ecuaciones (E'), se tiene que

$$M \cap \phi(X) = \phi(L).$$

Por tanto,

$$\phi^{-1}(M) = \phi^{-1}(M \cap \phi(X)) = \phi^{-1}\phi(L) = L \in \mathcal{A},$$

por ser ϕ inyectiva. Así, ϕ^{-1} está bien definida.
Nótese que las ecuaciones de $\phi^{-1}(M)$ se obtienen deshomogeneizando las ecuaciones de M. Además, si $L \in \mathcal{A}$, es $\phi^{-1}(\phi(L) \sqcup L_\infty) = \phi^{-1}\phi(L) = L$. Recíprocamente, si $M \in \mathcal{P}$, es $\overline{\phi^{-1}(M)} = M$, ya que si se deshomogeneizan las ecuaciones de M se obtienen las de $\phi^{-1}(M)$, y si se homogeneizan éstas, se obtienen las ecuaciones de $\overline{\phi^{-1}(M)}$ (véase Corolario 7.4.8), luego coincide con M.
Para ver que $\overline{L_1 \cap L_2} = \bar{L}_1 \cap \bar{L}_2$ si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, basta aplicar el Corolario 7.4.8 a L_1, L_2 y $L_1 \cap L_2$.
Para ver que $\overline{L_1 + L_2} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2$, basta aplicar la Proposición 7.4.3.

7.5 Ejercicios

Ejercicio 1.–Sean $P_1, \ldots, P_m$ puntos de $\mathbb{P}_n(k)$. Probar que son linealmente dependientes si y sólo existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que P_i depende linealmente de $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_m$.
Ejercicio 2.–Estudiar la posición relativa de dos variedades lineales de un espacio proyectivo de dimensión 3.
Ejercicio 3.–Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r que pasa por los puntos $(1 : -1 : 2)$ y $(2 : 1 : 1)$ de $\mathbb{P}_2(k)$. Hallar también el punto de intersección de r con la recta s de ecuación $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Hallar las ecuaciones del haz de rectas que pasan por $r \cap s$.
Ejercicio 4.–Estudiar las posiciones relativas de tres rectas en un plano proyectivo.
Ejercicio 5.–Determinar las posiciones relativas de las siguientes ternas de rectas en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & - & x_1 & + & x_2 & = 0 \\ 3x_0 & & & + & x_2 & = 0 \\ x_0 & - & x_1 & - & x_2 & = 0 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & = 0 \\ x_0 & + & 3x_1 & - & 3x_2 & = 0 \\ x_0 & & & + & 3x_2 & = 0 \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{rcrcrl} x_0 & + & x_1 & & & = 0 \\ x_0 & & & + & x_2 & = 0 \\ & & x_1 & + & x_2 & = 0 \end{array}$$

Nota: En los ejercicios siguientes, si no se dice otra cosa, se considerará el espacio proyectivo $\mathbb{P}_3(k)$.
Ejercicio 6.–Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por los puntos $(1 : 0 : -1 : 3)$, $(2 : 1 : -1 : 1)$ y $(1 : 1 : 0 : 1)$.
Ejercicio 7.–Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que pasa por los puntos $(2 : 1 : 3 : 0)$ y $(0 : 1 : 0 : 1)$.
Ejercicio 8.–Sean r y s dos rectas distintas. Probar que son equivalentes:

a) r y s se cruzan.

b) Si P_0, P_1, P_2, P_3 son puntos distintos con $P_0, P_1 \in r$, $P_2, P_3 \in s$, entonces $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 9.–Determinar las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

$$\text{a)}\quad r\left\{\begin{array}{rcrcr} x_0 & = & 5\lambda & + & \mu \\ x_1 & = & -2\lambda & - & 3\mu \\ x_2 & = & 4\lambda & + & 2\mu \\ x_3 & = & 7\lambda & + & \mu \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rcrcr} x_0 & = & 4\lambda & - & 5\mu \\ x_1 & = & \lambda & - & 3\mu \\ x_2 & = & 2\lambda & + & \mu \\ x_3 & = & \lambda & & \end{array}\right\} s$$

$$\text{b)}\quad r\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_0 & - & 5x_1 & + & 5x_2 & & & = 0 \\ 4x_0 & - & 3x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} s = P + Q, \quad \text{con} \\ P = (7 : 5 : -2 : 0) \\ Q = (1 : 3 : 0 : -2) \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{l} r\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_0 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ 4x_0 & - & x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = 0 \end{array}\right. \\ s\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 10x_0 & - & x_1 & - & 9x_2 & & & = 0 \\ -3x_0 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\text{d)}\quad \begin{array}{ccc} r = P + Q & , & s = R + S \\ P = (1 : 0 : 1 : 0) & , & R = (0 : 1 : 0 : 1) \\ Q = (1 : -1 : 0 : 0) & , & S = (0 : 0 : 1 : -1) \end{array}$$

Ejercicio 10.–Determinar las posiciones relativas de la recta r y del plano H en cada uno de los casos siguientes:

$$\text{a)}\quad r\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_0 & - & 6x_1 & + & 14x_2 & & & = 0 \\ 4x_0 & - & 26x_1 & + & 14x_2 & + & 14x_3 & = 0 \end{array}\right. \qquad H\left\{\begin{array}{c} \text{plano determinado por los puntos:} \\ (1 : -1 : 2 : 3), (4 : 5 : -1 : 2), (3 : 1 : 0 : 1) \end{array}\right.$$

$$\text{b)}\quad r\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_0 = & - & \lambda & + & 2\mu & , & x_1 = & \lambda & + & \mu \\ x_2 = & - & \lambda & - & \mu & , & x_3 = & \lambda & + & \mu \end{array}\right. \qquad H\left\{\ 3x_0 + 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0.\right.$$

Ejercicio 11.–Sea r la recta que pasa por los puntos $(5 : 4 : 1 : 6)$ y $(1 : -1 : 2 : 3)$, y s la recta que pasa por los puntos $(4 : 5 : -1 : 2)$ y $(3 : 1 : 0 : 1)$. Se pide:

a) Probar que r y s se cruzan.

b) Probar que el punto $P = (1:1:1:1)$ no está ni en r ni en s.

c) Determinar las ecuaciones de la recta t que pasa por P y que sea coplanaria con r y s (separadamente).

d) ¿Tendría solución el apartado c) si $P \in r$ ó $P \in s$ ó $r \cap s \neq \emptyset$?

Nota: Aunque el ejercicio anterior está enunciado con unos datos concretos, debe ser entendido en general, es decir, pruébese que, dados un punto P y dos rectas r y s que se cruzan en $\mathbb{P}_3$, hay una recta (única, si $P \notin r \cup s$) que se apoya en las tres variedades dadas.

Ejercicio 12.–Estudiar las posiciones relativas de dos planos de $\mathbb{P}_4(k)$, probando que dos planos se cortan en un punto si y sólo si no están contenidos en un hiperplano.

Ejercicio 13.–Estudiar las posiciones relativas de una recta y un plano en $\mathbb{P}_4(k)$.

Ejercicio 14.–Determinar las posiciones relativas de las siguientes variedades de $\mathbb{P}_4(k)$:

$$L \begin{cases} x_0 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad M \begin{cases} x_0 = \mu \\ x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \lambda + \mu \end{cases}$$

$$N = (1:1:0:1:1)$$

Ejercicio 15.–Consideremos las rectas de $\mathbb{P}_3(k)$ siguientes:

$$t \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad a \begin{cases} x_0 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} x_0 + x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad c \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad d \begin{cases} 2x_0 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Se pide:

a) Probar que por cada punto de t pasa una única recta r que se apoya en a y en c y una única recta s que se apoya en b y d.

b) Con la notación anterior, sea $P = (1:1:0:0)$, $A = r \cap a$, $C = r \cap c$, $B = s \cap b$, $D = s \cap d$. Calcular $Q = AB \cap CD$.

c) Dado cualquier otro punto de t, ¿se siguen cortando AB y CD? Razónese la respuesta.