Capítulo 2

El retículo de las variedades lineales afines

2.1 Introducción

Al conjunto de las variedades lineales afines de X lo denotaremos por $\mathcal{R}(X)$. Las operaciones de suma e intersección de subespacios vectoriales pueden trasladarse a las variedades lineales afines pero la situación es muy distinta: mientras que el vector cero es común a todos los subespacios vectoriales, no hay ningún punto común a todas las variedades lineales afines.

2.2 Operaciones con variedades

Proposición 2.2.1.— *Sea $\{L_i\}_{i \in I}$ una familia de variedades lineales afines; se verifica que $\bigcap_{i \in I} L_i$ es una variedad lineal afín y, si esta intersección es no vacía, entonces*

$$D\left(\bigcap_{i \in I} L_i\right) = \bigcap_{i \in I} D(L_i).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la intersección es no vacía, pues si lo es, no hay nada que demostrar. Entonces, si $P \in \bigcap_{i \in I} L_i$, se tiene

$$\begin{aligned} Q \in \bigcap L_i &\iff Q \in L_i, \forall i \iff \overrightarrow{PQ} \in D(L_i), \forall i \\ &\iff \overrightarrow{PQ} \in \bigcap D(L_i) \iff Q \in P + [\bigcap D(L_i)], \end{aligned}$$

lo que prueba que

$$\bigcap_{i \in I} L_i = P + \left[\bigcap_{i \in I} D(L_i) \right]$$

y la proposición.

Nota 2.2.2.— La unión de variedades lineales afines no es, en general, una variedad lineal afín.

Definición 2.2.3.— *Dado un subconjunto $E \subset X$, llamaremos variedad lineal afín engendrada por E , y la denotaremos por $L(E)$, a la menor variedad lineal afín (para el orden de la inclusión) que contiene a*

E . Dicho de otro modo, $L(E)$ es la intersección de todas las variedades lineales afines que contienen a E . La variedad de dirección de $L(E)$ tiene una expresión muy simple, a saber:

Proposición 2.2.4.— Si $E \subset X$ es un subconjunto no vacío, $P \in E$ cualquiera, entonces

$$D(L(E)) = \langle \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in E\} \rangle$$

donde la notación del segundo miembro quiere decir mínimo subespacio vectorial de V que contiene al conjunto descrito.

DEMOSTRACIÓN: Por definición de variedad de dirección se tiene que

$$\{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in E\} \subset D(L(E)),$$

luego

$$\langle \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in E\} \rangle \subset D(L(E)).$$

Entonces,

$$P + \langle \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in E\} \rangle \subset P + D(L(E)) = L(E)$$

Por lo tanto se tiene que

$$E \subset P + \langle \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in E\} \rangle \subset L(E)$$

luego $P + \langle \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in E\} \rangle$ es una variedad lineal afín que contiene a E , luego coincide con $L(E)$. Esto prueba la proposición.

Definición 2.2.5.— Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$; llamaremos suma de L_1 y L_2 , que escribiremos $L_1 + L_2$, a la variedad lineal afín $L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2)$. En otras palabras, $L_1 + L_2$ es la mínima variedad lineal afín que contiene a L_1 y a L_2 .

De forma análoga a 2.2.1 se tiene la

Proposición 2.2.6.— Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$ no vacías. Se verifica que

$$D(L_1 + L_2) = D(L_1) + D(L_2) + \langle \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle,$$

donde $P_0 \in L_1, Q_0 \in L_2$ son arbitrarios. En particular, si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, tomando $P_0 = Q_0 \in L_1 \cap L_2$ se obtiene que

$$D(L_1 + L_2) = D(L_1) + D(L_2).$$

DEMOSTRACIÓN: La inclusión

$$D(L_1 + L_2) \supset D(L_1) + D(L_2) + \langle \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle$$

es clara puesto que $D(L_1 + L_2)$ contiene a cada uno de los sumandos. Para probar la inclusión contraria observemos en primer lugar que, por 2.2.4,

$$D(L_1 + L_2) = D(L(L_1 \cup L_2)) = \langle \{\overrightarrow{P_0Q} \mid Q \in L_1 \cup L_2\} \rangle$$

Luego, basta probar que

$$\{\overrightarrow{P_0Q} \mid Q \in L_1 \cup L_2\}$$

está contenido en

$$D(L_1) + D(L_2) + \langle \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle.$$

Si $Q \in L_1$, entonces

$$\overrightarrow{P_0Q} \in D(L_1) \subset D(L_1) + D(L_2) + \langle \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle.$$

Si $Q \in L_2$, entonces

$$\overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{Q_0Q} \in \langle \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle + D(L_2) \subset D(L_1) + D(L_2) + \langle \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle.$$

Esto prueba la proposición.

Proposición 2.2.7.— Con las operaciones suma e intersección, el conjunto $\mathcal{R}(X)$ de las variedades lineales afines del espacio afín $(X, V, +)$ es un retículo modular, i.e. se verifican las propiedades siguientes:

1. Asociativas: Para $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{R}(X)$, se verifica que

$$(a) (L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$$

$$(b) (L_1 \cap L_2) \cap L_3 = L_1 \cap (L_2 \cap L_3)$$

2. Idempotentes: Para toda $L \in \mathcal{R}(X)$ se verifica que:

$$(a) L + L = L$$

$$(b) L \cap L = L$$

3. Conmutativas: Para todas $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$, es

$$(a) L_1 + L_2 = L_2 + L_1$$

$$(b) L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1$$

4. Leyes de simplificación: Si $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$, es

$$(a) L_1 + (L_1 \cap L_2) = L_1$$

$$(b) L_1 \cap (L_1 + L_2) = L_1$$

5. Ley modular: Si $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{R}(X)$,

$$L_1 \subset L_3 \implies (L_1 + L_2) \cap L_3 = L_1 + (L_2 \cap L_3)$$

La demostración es inmediata.

Para completar esta sección estudiamos el paralelismo entre variedades lineales afines.

Definición 2.2.8.— *Dos variedades lineales afines L_1, L_2 no vacías se llaman paralelas si existe una relación de inclusión entre sus variedades de dirección, i.e. si $D(L_1) \subset D(L_2)$ ó $D(L_1) \supset D(L_2)$. Se escribirá $L_1 \parallel L_2$ en este caso.*

El teorema de la dimensión de las variedades lineales afines es mucho más complejo que el correspondiente vectorial, debido, en parte, al paralelismo.

Teorema 2.2.9.— *Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$; se verifica:*

1. Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, entonces

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

2. Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, entonces

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim[D(L_1) \cap D(L_2)].$$

DEMOSTRACIÓN: En el caso en que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, aplicando sucesivamente la definición de dimensión de una variedad lineal afín, las proposiciones 2.2.6, 2.2.1 y el teorema vectorial de la dimensión, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) &= \dim D(L_1 + L_2) + \dim D(L_1 \cap L_2) = \\ &= \dim[D(L_1) + D(L_2)] + \dim[D(L_1) \cap D(L_2)] = \dim D(L_1) + \dim D(L_2) = \\ &= \dim L_1 + \dim L_2. \end{aligned}$$

Queda el caso $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. En esta situación,

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim D(L_1 + L_2) = \dim[D(L_1) + D(L_2) + \langle \overrightarrow{P_0 Q_0} \rangle] =$$

$$\begin{aligned}
&= \dim[D(L_1) + D(L_2)] + 1 - \dim([D(L_1) + D(L_2)] \cap \langle \overrightarrow{P_0 Q_0} \rangle) = \\
&= \dim D(L_1) + \dim D(L_2) - \dim D(L_1) \cap D(L_2) + 1 - \dim([D(L_1) + D(L_2)] \cap \langle \overrightarrow{P_0 Q_0} \rangle).
\end{aligned}$$

El teorema estará probado cuando veamos que

$$\dim[D(L_1) + D(L_2)] \cap \langle \overrightarrow{P_0 Q_0} \rangle = 0,$$

o, equivalentemente, que $\overrightarrow{P_0 Q_0} \notin D(L_1) + D(L_2)$. Nótese que $P_0 \neq Q_0$ por ser $P_0 \in L_1$, $Q_0 \in L_2$ y $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Por reducción al absurdo, si $\overrightarrow{P_0 Q_0} \in D(L_1) + D(L_2)$, sería $\overrightarrow{P_0 Q_0} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ con $\mathbf{u} \in D(L_1)$, $\mathbf{v} \in D(L_2)$, por tanto

$$Q_0 = P_0 + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (P_0 + \mathbf{u}) + \mathbf{v}, \text{ de donde, } Q_0 - \mathbf{v} = P_0 + \mathbf{u} \in L_1 \cap L_2$$

lo que contradice la hipótesis. Esto prueba el teorema.

Notas 2.2.10.—

2.2.10.1. Si $L_1 \parallel L_2$ y no son disjuntas, hay una relación de inclusión entre ellas, y el punto primero del teorema anterior es, entonces, una trivialidad.

2.2.10.2. Si $L_1 \parallel L_2$ y son disjuntas, el ‘término corrector’ del punto 2 del teorema (es decir, el tercer sumando del segundo miembro) no es nulo, salvo el caso trivial en que una de las dos sea un punto. Así, la fórmula de la dimensión (entendida ésta como la del punto 1), no se verifica.

2.2.10.3. Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $D(L_1) \cap D(L_2) = \{\mathbf{0}\}$, se verifica la fórmula de la dimensión (i.e. el término corrector es cero), y se dice que L_1, L_2 se cruzan.

Notas 2.2.11.— Se pueden utilizar los resultados anteriores para hallar posiciones relativas de variedades lineales afines. Estudiamos unos cuantos casos a continuación.

2.2.11.1. Sean H un hiperplano y L una variedad lineal afín no vacía de dimensión s en un espacio afín de dimensión n ($s \leq n$). Si $H \cap L = \emptyset$, la segunda fórmula de 2.2.9 nos dice que $n - 1 = n - 1 + s - \dim[D(H) \cap D(L)]$, luego esta dimensión vale s , y así $H \parallel L$. Si H no contiene a L y $H \cap L \neq \emptyset$, la primera fórmula de 2.2.9 nos dice que $n + \dim(H \cap L) = n - 1 + s$, luego $\dim(H \cap L) = s - 1$. Así, H y L o bien son paralelos y disjuntos, o bien $L \subset H$, o bien se cortan en una variedad de dimensión $s - 1$.

2.2.11.2. Sean L_1, L_2 dos rectas distintas. Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, esta intersección es un punto (las rectas se dicen secantes) y, por la primera fórmula de 2.2.9, $\dim(L_1 + L_2) = 2$, luego ambas rectas son coplanarias (están en un mismo plano). Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y no son paralelas, es $D(L_1) \cap D(L_2) = \{\mathbf{0}\}$, la segunda fórmula de 2.2.9 nos dice que $\dim(L_1 + L_2) = 3$ y ambas rectas se cruzan. Así, dos rectas, o coinciden, o son secantes, o son paralelas disjuntas, o se cruzan (en este caso la mínima variedad lineal afín que contiene a ambas tiene dimensión 3).

2.2.11.3. Para que dos variedades lineales afines de un espacio de dimensión n se crucen, sus dimensiones tienen que sumar, a lo sumo, $n - 1$, ya que, en esta situación:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) - 1$$

2.3 El teorema de Thales

Finalizamos este tema dando un teorema clásico de Geometría elemental: el teorema de Thales. Conserbamos la notación habitual de AB para designar a la recta que une dos puntos distintos A, B , en vez de la establecida anteriormente de $A + B = L(\{A, B\})$.

Definición 2.3.1.— *Dados tres puntos alineados A, B, C (i.e. sobre la misma recta) con $A \neq B$ se llama razón simple de la terna ordenada (A, B, C) , y se denota por $(ABC) = \lambda$, al único escalar tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.*

Teorema 2.3.2.— TEOREMA DE THALES. Sean $\{P_0, P_1, \dots, P_s\}$, $s \geq 2$ puntos afínmente independientes, $Q_1, \dots, Q_s \in X$, $Q_i \in P_0P_i$, $Q_i \neq P_0$, $1 \leq i \leq s$, $L = L(P_1, \dots, P_s)$, $L' = L(Q_1, \dots, Q_s)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $L' \parallel L$
2. Todas las razones simples $(P_0P_iQ_i)$, $1 \leq i \leq s$ coinciden.

Si éste es el caso, para todo i, j , $1 \leq i < j \leq s$ es $\overrightarrow{Q_iQ_j} = (P_0P_jQ_j)\overrightarrow{P_iP_j}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea, para cada $i = 1, \dots, s$, $\mu_i = (P_0P_iQ_i)$; entonces $\overrightarrow{P_0Q_i} = \mu_i\overrightarrow{P_0P_i}$. Si i, j son dos índices $1 \leq i < j \leq s$, se tiene que

$$\overrightarrow{Q_iQ_j} = \overrightarrow{P_0Q_j} - \overrightarrow{P_0Q_i} = \mu_j\overrightarrow{P_0P_j} - \mu_i\overrightarrow{P_0P_i}.$$

Para cada par de índices i, j , $1 \leq i < j \leq s$, es

$$L(P_0, P_i, P_j) = L(P_0, Q_i, Q_j),$$

y la intersección de L y L' con ella es, respectivamente, P_iP_j , Q_iQ_j . Así,

$$\begin{aligned} L \parallel L' &\iff \forall i, j, 1 \leq i < j \leq s, \overrightarrow{Q_iQ_j} = \nu_i\overrightarrow{P_iP_j} = \nu_i(\overrightarrow{P_0P_j} - \overrightarrow{P_0P_i}) \\ &\iff \mu_i = \mu_j = \nu_i, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema.

2.4 Ejercicios

Nota: Los siguientes siete ejercicios se refieren al espacio afín de dimensión cuatro.

Ejercicio 1.—

- a) Estudiar las posiciones relativas de dos hiperplanos.
- b) Determinar la condición de paralelismo de hiperplanos.

Ejercicio 2.—

- a) Estudiar las posiciones relativas de un plano y un hiperplano.
- b) Determinar la ecuación general de los hiperplanos que pasan por un plano

Ejercicio 3.—

- a) Estudiar las posiciones relativas de dos planos.
- b) Determinar la condición de paralelismo de dos planos.

Ejercicio 4.—

- a) Estudiar las posiciones relativas de un hiperplano y una recta.
- b) Determinar las condiciones de paralelismo de recta e hiperplano.
- c) Determinar la ecuación general de los hiperplanos que pasan por una recta.

Ejercicio 5.—

- a) Estudiar las posiciones relativas de una recta y un plano.
- b) Determinar las condiciones de paralelismo de recta y plano.
- c) Determinar la ecuación general de los planos que pasan por una recta.

Ejercicio 6.—

- a) Estudiar las posiciones relativas de dos rectas.
- b) Determinar la condición de paralelismo de rectas.

Ejercicio 7.—Determinar la ecuación general de:

- a) Todas las rectas que pasan por un punto.
- b) Todos los planos que pasan por un punto.
- c) Todos los hiperplanos que pasan por un punto.

Ejercicio 8.—Sean L y L' dos variedades de un espacio afín X , $\dim(X)=n$, tales que $\dim(L) = \dim(L') = d < n$. Probar que $L \parallel L'$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(a) \dim(L + L') \leq d + 1 \quad \text{y} \quad (b) L = L' \text{ o } L \cap L' = \emptyset$$

Ejercicio 9.—Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales afines que se cruzan de dimensión mayor o igual que 1, y sea P un punto que no pertenece a $L_1 + L_2$. ¿Es posible encontrar una recta que pase por P y corte a L_1 y a L_2 ?

Nota: Si la respuesta es afirmativa es suficiente dar un ejemplo, si es negativa hay que probarlo.

Ejercicio 10.—Estudiar las posiciones relativas de dos variedades L_1 y L_2 tales que $\dim L_1 = 1$ y $\dim L_2 = 3$, en el espacio afín de dimensión 5.

Ejercicio 11.—En el espacio afín $(X, V, +)$, sobre $\mathbf{R}$, de dimensión 4, se considera un sistema de referencia fijo respecto del cual se toman coordenadas y ecuaciones. Se dan la recta r y el plano π por

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + 9 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 7 = 0 \end{cases} \quad \pi = (1, -1, 1, 2) + \langle (1, -1, 1, -1), (1, 2, 0, 1) \rangle$$

Se pide:

- 1) Determinar la posición relativa de r y π .
- 2) Calcular unas ecuaciones implícitas de $r + \pi$.
- 3) Hallar la recta s que pasa por $Q = (1, 1, 1, 1)$ y es paralela a r . Se calculará, para ello, un punto y la dirección de s .
- 4) Hallar todas las rectas que sean secantes a r , s y π a la vez.

Ejercicio 12.—Se considera el punto $Q = (1, 0, 1, 0)$ y el plano π :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Hallar todas las rectas que pasen por Q , sean coplanarias con r , y cohiperplanarias con π , siendo r la recta:

- a) $(2, 2, 0, 0) + \langle (1, 0, -1, 0) \rangle$
- b) $(2, 2, 0, 0) + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$.

Ejercicio 13.—Se consideran en el espacio afín real de dimensión 4 las siguientes variedades:

$$\begin{aligned} r_1 &: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \\ r_2 &: (0, 0, 0, 1) + \langle (1, 0, 0, 0) \rangle \\ r_3 &: (0, 1, 0, 0) + \langle (0, 0, a, 1) \rangle \end{aligned}$$

- 1) Hallar la posición relativa de r_1 y r_2 . Hallar $r_1 + r_2$.
- 2) Hallar los valores de a para los que existe una recta que se apoye en r_1 , r_2 y r_3 . Caso de existir, ¿es única?

Ejercicio 14.—Sea X un espacio afín de dimensión 4. Consideremos el hiperplano $H : x_1 - x_3 - x_4 = 0$, la recta $r : (0, 0, 1, 1) + \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$ y los planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

- 1) Estudiar las posiciones relativas de r y H ; y de π_1 y π_2 .
- 2) Estudiar si existen y son únicos los hiperplanos H_i , que contienen a r y π_i , para $i = 1, 2$.
- 3) Calcular todas las rectas del espacio que pasen por $P = (1, 1, 1, 1)$ y corten a H, r, π_1 y π_2 .