Capítulo 4

El espacio euclídeo

4.1 Introducción

En este tema supondremos al lector familiarizado con las técnicas más elementales de formas bilineales y cuadráticas sobre un espacio vectorial.

Definición 4.1.1.– *Un* espacio euclídeo *es un espacio afín* $(X, V, +)$ *sobre* $\mathbb{R}$ *en el que* V *está dotado de un producto escalar.*

Definición 4.1.2.– *Un sistema de referencia métrico (u ortonormal) en* $(X, V, +)$ *es un sistema de referencia afín* $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ *tal que* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ *es una base ortonormal de* V.

Nota 4.1.3.– Cambio de Sistema de Referencia métrico. Sean dos sistemas de referencia métricos

$$\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}\ ,\ \mathcal{R}' = \{O', \mathbf{u'_1}, \ldots, \mathbf{u'_n}\}$$

En un cambio de sistema de referencia afín de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ es la matriz del cambio de base en el espacio vectorial.

Si los sistemas de referencia son métricos, las bases son ortonormales y entonces la matriz del cambio de base es ortogonal. En efecto, las filas de la matriz A son las coordenadas de los vectores $\mathbf{u'}_i$ en la base $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ y como ambas bases son ortonormales es claramente $AA^t = (\mathbf{u'}_i \bullet \mathbf{u'}_j) = I$.
El conjunto de las matrices ortogonales de orden n se representa por $\mathcal{O}(n)$ y forman un grupo multiplicativo (la demostración es inmediata). Como el determinante de una matriz ortogonal es $+1$ o -1, se puede hacer una clasificación de las matrices ortogonales:

$$\mathcal{O}_+(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) | det(A) = 1\}$$

$$\mathcal{O}_-(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) | det(A) = -1\}$$

Obsérvese que $\mathcal{O}_+(n)$ es un subgrupo de $\mathcal{O}(n)$.

Definición 4.1.4.– *Sean dos sistemas de referencia métricos $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$. Diremos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ tienen la misma orientación si $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{O}_+(n)$*

Notas 4.1.5.–

4.1.5.1. En un espacio euclídeo hay automáticamente definida una métrica, o *distancia entre puntos*, en la forma siguiente:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Esta distancia verifica las propiedades usuales de una métrica, a saber:

1. $d(P, Q) \geq 0$.
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$.
3. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$, con igualdad si y sólo si $Q \in \overline{PR}$. En particular, lo anterior es una desigualdad para cualquier permutación de P, Q, R si y sólo si estos tres puntos no están alineados.

La demostración de estas propiedades es inmediata a partir de las propiedades del producto escalar.

4.1.5.2. En un espacio euclídeo se verifica una relación muy sencilla, llamada el *teorema de Pitágoras*, que dice así: Si A, B, C son tres puntos no alineados tales que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ son ortogonales, entonces $d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$. En efecto,

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2.$$

4.1.5.3. Si $P, Q \in X$ son dos puntos distintos, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de P y Q es el hiperplano $L = M + < \overrightarrow{PQ} >^\perp$, donde M es el punto medio de $\overline{PQ}$. A L se le llama el *hiperplano mediador* del segmento $\overline{PQ}$. En el caso particular en que $\dim X = 2$ se hablará de la *mediatriz* del segmento $\overline{PQ}$. En efecto, se tiene, para $R \in X$,

$$d(R, P) = d(R, Q) \Leftrightarrow |\overrightarrow{RP}|^2 = |\overrightarrow{RQ}|^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MR})^2 = (\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MR} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} = -\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} = 0.$$

que es la ecuación del hiperplano que pasa por M y es perpendicular a $\overrightarrow{MP}$.
Obsérvese que $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ}|$ y que $\overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{MP}$, por ser M el punto medio de $\overline{PQ}$.

Definición 4.1.6.– *Dos variedades lineales afines L, L' de X se dicen perpendiculares si $D(L) \subset D(L')^\perp$ o $D(L) \supset D(L')^\perp$. Este hecho se representa escribiendo $L \perp L'$.*

4.2 Distancia de un punto a una variedad

Definición 4.2.1.– *Sea $P \in X$ un punto, L una variedad lineal afín no vacía. Se llamará* distancia de P a L, *y se notará $d(P, L)$ a*

$$d(P, L) = \inf\{d(P, Q) \mid Q \in L\}.$$

Es claro que, si $P \in L$, $d(P, L) = 0$.

En el siguiente resultado se comprueba que este ínfimo se alcanza, efectivamente, en un punto de L.

Proposición 4.2.2.– *Sean $P \in X$ un punto y L una variedad lineal afín no vacía. Sea $L' = P + D(L)^\perp$. Se verifica:*

1. *$L \cap L'$ es un punto de X: $L \cap L' = \{P_0\}$*

2. $d(P, L) = d(P, P_0)$.

Demostración: Como $D(L) \oplus D(L)^{\perp} = V$, esto es,

$$D(L) + D(L') = V$$

$$D(L) \cap D(L') = \{\mathbf{0}\}$$

en cualquier caso se verifica que

$$\dim(L + L') + \dim(L \cap L') = \dim L + \dim L'$$

y

$$\dim L' = n - \dim L,$$

luego

$$\dim(L \cap L') = n - \dim(L + L').$$

Pero

$$D(L + L') \supset D(L) + D(L') = V,$$

de donde $L + L' = X$ y así $L \cap L'$ es un punto P_0. Por el teorema de Pitágoras es, entonces, para todo $Q \in L$, $d(P, Q)^2 = d(P, P_0)^2 + d(P_0, Q)^2 \geq d(P, P_0)^2$. Esto prueba la proposición. Como comentario final nótese que la desigualdad es estricta siempre que $Q \neq P_0$, luego el punto de L que minimiza la distancia a P es único. Se le llama la *proyección ortogonal* de P sobre L, o el *pie de la perpendicular* por P a L.

Proposición 4.2.3.– *(*Distancia de un punto a un hiperplano*) Sea P un punto y H un hiperplano. Supongamos que respecto de un sistema de referencia métrico $P = (p_1, \ldots, p_n)$ y $H : a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Entonces,*

$$d(P, H) = \frac{|a_0 + a_1p_1 + \cdots + a_np_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Demostración: Si $P \in H$ es evidentemente cierto. Supongamos que $P \notin H$. La ecuación de H puede escribirse

$$H : \frac{a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = 0.$$

Sean $a'_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$ para cada $i = 0, \ldots, n$. El vector $\mathbf{a}' = (a'_1, \ldots, a'_n)$, verifica que $|\mathbf{a}'| = 1$ y $\mathbf{a}' \in D(H)^{\perp}$.

Sabemos que $d(P, H) = d(P, P_0)$, donde $P_0 \in H$ y $\vec{PP_0} \in D(H)^{\perp}$. Por tanto, $\vec{PP_0} = \lambda\mathbf{a}'$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y entonces $d(P, H) = |\lambda|$.

Identificando los puntos con las n-úplas de sus coordenadas obtenemos $P_0 - P = \lambda\mathbf{a}'$. Multiplicamos escalarmente por el vector $\mathbf{a}'$

$$P_0 \cdot \mathbf{a}' - P \cdot \mathbf{a}' = \lambda\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'.$$

Teniendo en cuenta que $P_0 \cdot \mathbf{a}' = -a'_0$ pues $P_0 \in H$ y que $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' = 1$, obtenemos

$$|\lambda| = |a'_0 + a'_1p_1 + \cdots + a'_np_n|.$$

Definición 4.2.4.– *Llamaremos ecuación normal del hiperplano H a una ecuación del tipo*

$$H : \frac{a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = 0.$$

El vector $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ se dirá que es un vector normal a H.

4.3 Distancia entre variedades. Perpendicular común

De manera análoga a lo anterior se define la distancia entre dos variedades lineales afines no vacías, aunque no existen dos puntos únicos (uno en cada una) que minimicen esa distancia (piénsese en dos variedades paralelas, por ejemplo). También existe una variedad lineal afín perpendicular común a dos disjuntas.

Definición 4.3.1.– *Sean L_1, L_2 dos variedades lineales afines no vacías de X. Se llama distancia de L_1 a L_2, y se nota $d(L_1, L_2)$, a*

$$d(L_1, L_2) = \inf\{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in L_1, P_2 \in L_2\}.$$

Evidentemente, si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entonces $d(L_1, L_2) = 0$. Estudiemos el otro caso.

Proposición 4.3.2.– *Sean L_1, L_2 variedades lineales afines no vacías y disjuntas. Existe una variedad lineal afín L verificando las siguientes propiedades:*

1. $\dim L \geq 1$.
2. *$L \perp L_i$, para $i = 1, 2$.*
3. *$L \cap L_i$ es un punto P_i, para $i = 1, 2$.*
4. *Toda otra L' que verifique las anteriores condiciones es tal que $D(L') \subset D(L)$ y, por tanto,* $\dim L' \leq \dim L$.
5. $d(L_1, L_2) = d(P_1, P_2)$.

   A esta variedad L se le llama una perpendicular común *a L_1 y L_2.*
6. *L es única si y sólo si L_1 y L_2 se cruzan.*

Demostración: Como $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ se tiene que $D(L_1) + D(L_2) \neq V$ porque, en caso contrario, si $Q_1 \in L_1, Q_2 \in L_2$ cualesquiera, $\overrightarrow{Q_1Q_2} \in D(L_1) + D(L_2)$, luego $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ con $\mathbf{u}_1 \in L_1, \mathbf{u}_2 \in L_2$, de donde

$$Q_2 - \mathbf{u}_2 \in L_2$$

y

$$Q_2 - \mathbf{u}_2 = Q_1 + \overrightarrow{Q_1Q_2} - \mathbf{u}_2 = Q_1 + \mathbf{u}_1 \in L_1,$$

lo que supone una contradicción. Sea entonces

$$M = (D(L_1) + D(L_2))^\perp = D(L_1)^\perp \cap D(L_2)^\perp,$$

Se tiene: $\dim M = n - \dim(D(L_1) + D(L_2)) \geq 1$, por ser $\dim(D(L_1) + D(L_2)) < n$,
y por otra parte

$$V = [D(L_1) + D(L_2)] \oplus M.$$

Tomemos ahora, como antes, $Q_1 \in L_1, Q_2 \in L_2$ y escribamos $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}$ con $\mathbf{u}_1 \in D(L_1), \mathbf{u}_2 \in D(L_2)$ y $\mathbf{v} \in M$. Sean $P_1 = Q_1 + \mathbf{u}_1 \in L_1$, $P_2 = Q_2 - \mathbf{u_2} \in L_2$ y $L = P_1 + M$; entonces L verifica 1) y 2) ya que $\dim L = \dim M \geq 1$ y $D(L) = M \subset D(L_i)^\perp$, para $i = 1, 2$. Para probar 3) notemos que $P_1 \in L \cap L_1$ y

$$P_2 = Q_2 - \mathbf{u}_2 = Q_1 + \overrightarrow{Q_1Q_2} - \mathbf{u}_2 = Q_1 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{v} = P_1 + \mathbf{v} \in L,$$

luego $P_2 \in L \cap L_2$. Entonces $L \cap L_i \neq \emptyset$ y

$$D(L_i \cap L) = D(L_i) \cap D(L) = D(L_i) \cap D(L_1)^\perp \cap D(L_2)^\perp = \{\mathbf{0}\},$$

con lo que $\dim(L_i \cap L) = 0$. Luego $L_i \cap L = P_i$ para $i = 1, 2$.
Probemos ahora que toda variedad L' que verifique los apartados 1, 2 y 3 es tal que $D(L') \subset D(L)$.

Sea $L' = R+N$ una variedad lineal afín tal que $\dim L' \geq 1$, $L' \cap L_i$ es un punto y $L' \perp L_i$. Por reducción al absurdo, supongamos que N no está contenido en $M = D(L_1)^\perp \cap D(L_2)^\perp$. Por la condición de perpendicularidad se tendría $N \supset D(L_i)^\perp$ (contenido estricto), para algún i, y entonces sería $dim(N) > dim(D(L_i)^\perp) = n - dimD(L_i)$, o sea, $dimD(L') + dimD(L_i) > n$.
Entonces resulta

$$dimD(L') + dimD(L_i) = dim(D(L') + D(L_i)) - dim(D(L') \cap D(L_i)) = dim(D(L') + D(L_i)) > n$$

que es una contradicción.
El siguiente apartado de la proposición es consecuencia del teorema de Pitágoras. Sean $R_1 \in L_1, R_2 \in L_2$; se tiene que

$$\overrightarrow{R_1R_2} = (\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2}) + \overrightarrow{P_1P_2}$$

con $\overrightarrow{P_1P_2} \in M$, $\overrightarrow{R_1P_1} \in D(L_1)$, $\overrightarrow{P_2R_2} \in D(L_2)$, luego

$$d(R_1, R_2)^2 = |\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2}|^2 + d(P_1, P_2)^2 \geq d(P_1, P_2)^2.$$

Los puntos P_1, P_2 se llaman *pies de la perpendicular común.*
El último apartado se demuestra así: la perpendicular común será única si y sólo si los pies lo son. Si $R_1 \in L_1$, $R_2 \in L_2$, entonces esos puntos son otros pies si y sólo si

$$d(R_1, R_2) = d(P_1, P_2) \Leftrightarrow |\overrightarrow{R_1P}_1 + \overrightarrow{P_2R}_2|^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1R}_1 = \overrightarrow{P_2R}_2,$$

y ese vector está en $D(L_1) \cap D(L_2)$. Por lo tanto, si las variedades se cruzan, es claro que los pies son únicos. Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es un vector de $D(L_1) \cap D(L_2)$. Si tomamos $R_1 = P_1 + \mathbf{v} \in L_1$ y $R_2 = P_2 + \mathbf{v} \in L_2$, resulta que $\overrightarrow{P_1R}_1 = \overrightarrow{P_2R}_2$ y, por el Teorema de Thales paralelo, $\overrightarrow{R_1R}_2 = \overrightarrow{P_1P}_2$ y la perpendicular común no sería única.

Proposición 4.3.3.– *(*Distancia entre hiperplanos*) Sean H_1 y H_2 dos hiperplanos. Entonces:*

1. *$H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ o $H_1 || H_2$ y disjuntos.*

2. *Si $H_1 || H_2$ y suponemos que respecto de un sistema de referencia métrico sus ecuaciones son*

$$\begin{array}{l} H_1 : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0 \\ H_2 : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0' = 0 \end{array}$$

se verifica que

$$d(H_1, H_2) = \frac{|a_0 - a_0'|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Demostración: El primer apartado se deduce inmediatamente de la fórmula de la dimensión.

Para el segundo, sea $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ el vector normal a ambos hiperplanos. Consideramos la recta $r = O + \langle \mathbf{a} \rangle$. Sabemos que $r \cap H_1 = P_1$ y $r \cap H_2 = P_2$, siendo

$$\vec{P_1P_2} \in D(r) = \langle \mathbf{a} \rangle = D(H_1)^\perp = D(H_2)^\perp.$$

Como consecuencia tendremos que

$$d(H_1, H_2) = d(P_1, P_2).$$

Teniendo en cuenta que $P_1 = O + \lambda \mathbf{a} \in H_1$ obtenemos que $\lambda = -\frac{a_0}{|\mathbf{a}|^2}$. Es decir, $P_1 = -\frac{a_0}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$.

Análogamente se tendrá $P_2 = -\frac{a_0'}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. Por tanto,

$$\vec{P_1P_2} = \frac{a_0 - a_0'}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}, \text{ y } d(H_1, H_2) = \frac{|a_0 - a_0'|}{|\mathbf{a}|}.$$

4.4 Ángulos entre variedades

Nota 4.4.1.– Ángulos entre dos vectores. La desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que, dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ no nulos , se verifica

$$|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \quad \text{que equivale a} \quad \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \leq 1$$

es decir

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \leq 1$$

Por lo tanto existe un único ángulo α, $\quad 0 \leq \alpha \leq \pi$, verificando

$$cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Definición 4.4.2.– *Al ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ tal que*

$$cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

se le llama <u>*ángulo de los vectores*</u> $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *y se nota:* $\alpha = (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$.

Obsérvese que el ángulo así definido es un ángulo no orientado, es decir, $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = (\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}})$, y que, para el producto escalar, se tiene la expresión:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot cos(\alpha)$$

Por otra parte se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 & \Leftrightarrow & \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} > 0 & \Leftrightarrow & 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} < 0 & \Leftrightarrow & \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| & \Leftrightarrow & \alpha = 0 \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| & \Leftrightarrow & \alpha = \pi \end{array}$$

Lema 4.4.3.– *Sean* $\mathbf{u}' \in L(\mathbf{u}) \quad , \quad \mathbf{v}' \in L(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}', \mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$. *Se verifica*

$$\frac{|\mathbf{u}' \bullet \mathbf{v}'|}{|\mathbf{u}'| \cdot |\mathbf{v}'|} = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Demostración: Se tiene $\mathbf{u}' = \lambda \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{v}' = \mu \mathbf{v} \quad , \quad \lambda, \mu \neq 0$. Por tanto:

$$\frac{|\mathbf{u}' \bullet \mathbf{v}'|}{|\mathbf{u}'| \cdot |\mathbf{v}'|} = \frac{|(\lambda \mathbf{u}) \bullet (\mu \mathbf{v})|}{|\lambda \mathbf{u}| \cdot |\mu \mathbf{v}|} = \frac{|\lambda \mu (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})|}{|\lambda||\mathbf{u}| \cdot |\mu||\mathbf{v}|} = \frac{|\lambda \mu||\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\lambda \mu||\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Definición 4.4.4.– Ángulo entre dos rectas. *Sean r y s dos rectas y sean $\mathbf{u} \in D(r), \mathbf{v} \in D(s)$. Se define el ángulo que forman r y s como el único ángulo $\alpha \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad$ tal que*

$$cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

El lema anterior nos asegura que el ángulo de dos rectas está bien definido, puesto que no depende de los vectores que se tomen en sus respectivas direcciones.

Definición 4.4.5.– Ángulo entre recta e hiperplano. *Sea r una recta, $\mathbf{u} \in D(r)$, H un hiperplano y $\mathbf{a} \in D(H)^{\perp}$. Si $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, la ecuación de H será: $a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Se define el ángulo entre r y H como*

$$(\widehat{r, H}) = \frac{\pi}{2} - \alpha, \qquad \textit{siendo } \alpha \textit{ el único ángulo, } 0 \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{2}, \textit{ tal que } cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{a}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{a}|}$$

Definición 4.4.6.– Ángulo entre dos hiperplanos. *Sean H_1 y H_2 dos hiperplanos de ecuaciones respectivas*

$$\begin{array}{ll} H_1: & a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D(H_1)^{\perp} \\ H_2: & b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0, \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in D(H_2)^{\perp} \end{array}$$

Se define el ángulo entre H_1 y H_2 como

$$(\widehat{H_1, H_2}) = \alpha, \qquad \textit{siendo } \alpha \textit{ el único ángulo, } 0 \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{2}, \textit{ tal que } cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Nota 4.4.7.– En el caso $n = 2$ las tres definiciones anteriores responden a la misma situación puesto que en el plano los hiperplanos son las rectas. Veamos, entonces, que las tres definiciones coinciden en este caso.
Sea $r : a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ y $s : b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$.
Observamos que $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{u} = (a_2, -a_1)$, $\mathbf{v} = (b_2, -b_1)$ verifican:

$$\begin{array}{lll} D(r) =< \mathbf{u} > & D(r)^{\perp} =< \mathbf{a} > & \mathbf{u} \bullet \mathbf{a} = 0 \\ D(s) =< \mathbf{v} > & D(s)^{\perp} =< \mathbf{b} > & \mathbf{v} \bullet \mathbf{b} = 0 \end{array}$$

Para probar que las tres definiciones coinciden tendremos que ver que

$$\frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u} \bullet \mathbf{b})^2}{|\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2}} = \frac{|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

En efecto.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= a_2b_2 + a_1b_1 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \\ |\mathbf{u}|^2 &= a_1^2 + a_2^2 = |\mathbf{a}|^2 \\ |\mathbf{v}|^2 &= b_1^2 + b_2^2 = |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{b} = a_2b_1 - a_1b_2$ y

$$1 - \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)^2}{|\mathbf{u}|^2|\mathbf{b}|^2} = \frac{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_2b_1 - a_1b_2)^2}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2} = \frac{(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2}$$

con lo que queda demostrada la coincidencia.

4.5 Ejercicios

Ejercicio 1.–En el espacio afín euclídeo de dimensión cuatro, y con respecto a un sistema de referencia métrico , se dan las variedades lineales siguientes:

$$\begin{array}{ll} r: & (1, -2, -4, -1) + <(0, 3, 5, 2)> \\ r': & (1, 3, 1, 1) + <(0, 1, -1, 1)> \\ \pi: & (0, 5, 5, 4) + <(0, 2, 3, 1), (-1, 1, 2, 1)> \end{array}$$

Se pide:
1) Hallar las posiciones relativas de r y π, y de r y r'.

2) Hallar todas las rectas secantes a r, r' y paralelas a π.
3) Hallar la recta perpendicular a r y π, y secante a ambas.
4) Hallar las ecuaciones de la homotecia h de centro $(1, 3, -1, 3)$ que lleva r en una recta que corta a π. Calcular $h(\pi)$.

Ejercicio 2.–Responder a las siguientes cuestiones: sobre espacios afines y euclídeos de la dimensión que se indica.
1) En un espacio afín de dimensión cuatro se dan dos rectas r, s que se cruzan y un punto P. Dar una condición necesaria y suficiente para que por P no pase ninguna recta t secante a la vez a r y s.
2) En un espacio afín de dimensión cuatro se dan tres rectas r, s, t que se cruzan dos a dos y no hay ningún subespacio propio que contenga a las tres. Decir cuántas rectas son secantes, a la vez, a r, s, t.
3) En un espacio euclídeo de dimensión tres se dan tres rectas que se cruzan dos a dos. Dar una condición necesaria y suficiente para que exista una perpendicular común a las tres.
4) Hallar, si existe, la perpendicular común a las rectas

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

5) Hallar el lugar geométrico de las rectas del espacio tridimensional que se apoyan a la vez en

$$r \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad t \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3.–En el espacio euclídeo de dimensión 4, y con respecto a un sistema de referencia fijo, se consideran las siguientes variedades lineales:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_2 = (1, -1, 3, 3) + < (2, 0, 2, -1), (1, 3, 1, 4) >,$$

$$L_3 = (1, -2, 5, 0) + < (1, 1, 1, 2) > .$$

Se pide:
1) Averiguar si $L_1 \perp L_2$.
2) Hallar los hiperplanos que pasan por L_3 y son paralelos a L_1. ¿Cuántas soluciones hay?.
3) Dar una condición para que tenga más de una solución el problema de hallar un hiperplano que pase por una recta y sea paralelo a un plano.
4) Hallar una perpendicular común a L_2 y L_3. ¿Cuántas soluciones hay?

Ejercicio 4.–Supongamos que
1) el universo U es un espacio euclídeo de dimensión $n > 3$,
2) la tierra T es una variedad lineal afín tridimensional $T \subset U$,
3) existe otra tierra $T' \subset U$ tridimensional no paralela a T.
Se pide:
a) Discutir según los valores de $n = 4$ ó 5 si $T \cap T'$ puede ser vacío. Idem si $T \cap T'$ puede ser un punto.
b) Sean $n = 5$, $T : \{x_4 = 0, x_5 = 1\}$, $T' : \{x_1 + x_4 = 1, x_4 = 1\}$
b1) ¿Desde qué puntos del universo se puede emitir un rayo que toque a las dos tierras T y T'?
b2) Hallar el punto de T desde donde sería más económico emitir un rayo que llegara a T'. Indicar el punto de llegada. *Nota: se supone que los rayos siguen una trayectoria rectilínea.*

Ejercicio 5.–En el espacio euclídeo de dimensión 4 se considera la recta r y los planos π_1, π_2 dados por

$$r = (2, 2, 2, 3) + < (1, 1, 1, 1) >,$$

$$\pi_1 = (4, 0, 2, 1) + < (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 0) >,$$

$$\pi_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 & = & 7 \end{array} \right.$$

Se pide:
1). Hallar las posiciones relativas de r y π_1, y de π_1 y π_2.
2). Hallar la proyección de r sobre π_1 paralelamente a π_2.
3). Hallar todas las rectas secantes a r, a π_1 y paralelas a π_2.
4). Hallar la perpendicular común a r y π_1 y la mínima distancia entre ambas.

Ejercicio 6.–En el espacio euclídeo de dimensión 4, y con respecto a un sistema de referencia fijo, se da el punto $P = (0, 8, 4, 6)$, la recta $r = (1, -1, 0, 1) + \langle(1, 3, 0, 3)\rangle$, y los planos

$$\pi_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - 1 & = & 0 \\ -x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} -3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 & = & 0 \\ -3x_1 - 2x_3 + x_4 + 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Se pide:
1. Hallar las ecuaciones (matriz) de la proyección sobre π_1 paralelamente a π_2.
2. Hallar los pies y la dirección de la perpendicular común a r y π_1.
3. Hallar todas las rectas que pasen por P y sean secantes a r y π_1.

Ejercicio 7.–En el espacio afín euclídeo $(X, V, +)$ sobre $\mathbb{R}$, de dimensión 4, fijado un sistema de referencia, se dan los planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad \pi_2 : (0, 0, 0, 0) + \langle(1, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\rangle.$$

Se pide:
1.- Estudiar su posición relativa.
2.- Determinar una perpendicular común a ambos planos y sus respectivos pies. ¿Es única?

Ejercicio 8.–En $\mathbb{R}^4$ se consideran, respecto de una cierta referencia, la recta r y el plano π dados por:

$$r : (1, 0, 0, 0) + \langle(a, 0, 0, 1)\rangle,$$

$$\pi : (1, 4, 0, 5) + \langle(1, 2, 0, 3), (2, 3, 0, 4)\rangle$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Se pide:
1.- Determinar la posición relativa de r y π según los valores del parámetro a.
2.- Discutir la existencia de la perpendicular común a r y π según los valores de a. Cuando existe, ¿es única?
3.- Para $a = -1$, hallar la distancia entre r y π.