Capítulo 3

Aplicaciones afines. Afinidades

3.1 Introducción

Sean $(X, V, +), (X', V', +)$ dos espacios afines sobre el mismo cuerpo k y $f : X \to X'$ una aplicación. Fijado un punto $P \in X$ se tiene una aplicación

$$f_P : V \longrightarrow V'$$

definida por $f_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$, $\forall Q \in X$.

Proposición 3.1.1.– *Sea $f : X \to X'$ una aplicación tal que, para un punto $P \in X$, la aplicación f_P es un homomorfismo de grupos abelianos. Entonces, para todo punto $P' \in X$ es $f_P = f_{P'}$. En ese caso, a esa aplicación se la denota simplemente por $\overrightarrow{f}$.*

Demostración: Sea $\mathbf{u} \in V$ cualquiera, $\mathbf{u} = \overrightarrow{P'Q'}$ para $Q' \in X$. Entonces

$$f_{P'}(\mathbf{u}) = f_{P'}(\overrightarrow{P'Q'}) = \overrightarrow{f(P')f(Q')} =$$

$$\overrightarrow{f(P')f(P)} + \overrightarrow{f(P)f(Q')} =$$

$$f_P(\overrightarrow{PQ'}) - f_P(\overrightarrow{PP'}) = f_P(\overrightarrow{PQ'} - \overrightarrow{PP'}) = f_P(\overrightarrow{P'Q'}) = f_P(\mathbf{u}).$$

Definición 3.1.2.– *Sean $(X, V, +), (X', V', +)$ dos espacios afines sobre el mismo cuerpo k y $f : X \to X'$ una aplicación. Se dirá que f es una* aplicación afín *si existe $P \in X$ tal que la aplicación $f_P : V \to V'$ es k-lineal. Se dirá que f es un* isomorfismo afín *si es afín y biyectiva, y se dirá que f es una* afinidad *si es un isomorfismo afín de $(X, V, +)$ sobre sí mismo.*

Ejemplo 3.1.3.– Sea $n = \dim X$, fijemos un sistema de referencia afín $\mathcal{R}$ en X y sea $\Phi_{\mathcal{R}} : X \to k^n$ la aplicación que a cada punto asigna sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}$. Entonces $\Phi_{\mathcal{R}}$ es un isomorfismo afín de $(X, V, +)$ sobre el espacio afín numérico $(k^n, k^n, +)$. En efecto, sea $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ y sea $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ la base vectorial asociada. Entonces, $(\Phi_{\mathcal{R}})_{A_0} : V \to k^n$ es la aplicación que asocia, a cada vector, sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}$, que es un isomorfismo de espacios vectoriales, como sabemos por álgebra lineal.

Notas 3.1.4.– Sea $f : X \to X'$ una aplicación afín. Supongamos que las dimensiones respectivas de X y X' son n y m.

3.1.4.1. Ecuación fundamental de una aplicación afín: Si $P, Q \in X$ y es $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{u}$, el hecho de que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ se escribe en la forma

$$f(P + \mathbf{u}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{u})$$

que es la llamada ecuación fundamental de una aplicación afín.

3.1.4.2. Sea $P' \in X'$; se llama *fibra* de f en P' al conjunto $f^{-1}(P')$. Si la fibra en P' es no vacía y si P es un punto de ella, entonces

$$f^{-1}(P') = P + \ker(\overrightarrow{f})$$

donde, como es usual, 'ker' representa el núcleo. En efecto, por la ecuación fundamental de las aplicaciones afines,

$$Q \in f^{-1}(P') \Longleftrightarrow f(Q) = P' \Longleftrightarrow f(P) = f(Q) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in \ker(\overrightarrow{f}) \Longleftrightarrow Q \in P + \ker(\overrightarrow{f})$$

Nótese que esto significa que las fibras de f son todas variedades lineales afines y que las que no son vacías forman una familia de variedades paralelas de la misma dimensión ($= \dim\ker(\overrightarrow{f})$). Así, en particular, f es inyectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ lo es.

3.1.4.3. La ecuación fundamental de una aplicación afín implica también lo siguiente. Si $L \neq \emptyset$ es una variedad lineal afín y $P \in L$, entonces

$$f(L) = f(P) + \overrightarrow{f}(D(L)).$$

Así $f(L)$ es una variedad lineal afín de dimensión igual a

$$\dim \overrightarrow{f}(D(L)) = \dim L - \dim(\ker \overrightarrow{f} \cap D(L)).$$

En particular, si $L = X$,

$$f(X) = f(P) + \overrightarrow{f}(V)$$

y también

$$\dim f(X) = \dim \overrightarrow{f}(V) = \dim V - \dim\ker(\overrightarrow{f}) = \dim X - \dim\ker(\overrightarrow{f}).$$

Consecuentemente, f es suprayectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ lo es.

3.1.4.4. De lo anterior se deduce que f es un isomorfismo afín si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es un isomorfismo lineal.

3.1.4.5. Expresión matricial: La aplicación afín f viene unívocamente determinada por la imagen de un punto $P \in X$ y la aplicación lineal $\overrightarrow{f}$. Equivalentemente, f viene determinada por la imagen de un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$, pues $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ es una base de V y $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Si elegimos $\mathcal{R}' = \{A'_0, A'_1, \ldots, A'_m\}$, sistema de referencia afín en X', respecto del cual $f(A_0) = (a_1, \ldots, a_m)$, y si

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

es la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{A'_0A'_1}, \ldots, \overrightarrow{A'_0A'_m}\}$, entonces, para obtener las ecuaciones de f, se puede hacer lo siguiente: $f(P) = f(A_0 + \overrightarrow{A_0P}) = f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0P})$, esto es,

$$\begin{pmatrix} x'_1 & \ldots & x'_m \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_m) + \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_1 & \ldots & x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_m \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

donde $(x_1, \ldots, x_n)$ es un punto genérico de X y $(x'_1, \ldots, x'_m)$ es su imagen.

3.2 Proyecciones paralelas

Ejemplo 3.2.1.– Sean L, L' dos variedades lineales afines tales que su intersección sea un punto O y su suma sea el espacio entero. Entonces

$$V = D(L) \oplus D(L').$$

En efecto,

$$V = D(X) = D(L + L') = D(L) + D(L')$$
$$\{\mathbf{0}\} = D(O) = D(L \cap L') = D(L) \cap D(L').$$

En particular, se tiene que $\dim(L) + \dim(L') = n$. Un par de variedades de este tipo se obtiene tomando un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ y poniendo

$$L = L(A_0, A_1, \ldots, A_r)\ ,\ L' = L(A_0, A_{r+1}, \ldots, A_n).$$

El hecho crucial aquí es que, para cada $P \in X$,

$$L \cap (P + D(L'))$$

sigue siendo un punto. En efecto, escribiendo $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ con $\mathbf{x}_1 \in D(L)$, $\mathbf{x}_2 \in D(L')$, se tiene que $O + \mathbf{x}_1 = P - \mathbf{x}_2 \in L \cap (P + D(L'))$, luego esta intersección es no vacía. La fórmula de la dimensión dice, entonces, que esa intersección es un punto, a saber $O + \mathbf{x}_1$.

Lo anterior permite establecer una aplicación $f : X \to X$ mediante la fórmula

$$f(P) = L \cap (P + D(L')).$$

Esta aplicación es afín, pues f_O, con las notaciones anteriores, asigna al vector $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ el vector $\mathbf{x}_1$. Así, f_O es la proyección de la suma directa sobre el primer sumando, que es lineal. Por tanto, $\ker(\overrightarrow{f}) = D(L')$. Entonces, las variedades paralelas a L' de dimensión menor que la dimensión de L' se contraen a un punto. Esta aplicación se llama *proyección de X sobre L paralelamente a L'*.

3.3 El grupo afín

Notas 3.3.1.– Sean $(X, V, +)$, $(X', V', +)$, $(X'', V'', +)$ tres espacios afines sobre el mismo cuerpo k, $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ aplicaciones afines.

3.3.1.1. Se verifica que gf es una aplicación afín y $\overrightarrow{gf} = \overrightarrow{g}\,\overrightarrow{f}$. En efecto, fijado $P \in X$, para todo $Q \in X$ es

$$(gf)_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{gf(P)gf(Q)} = g_{f(P)}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) = g_{f(P)}f_P(\overrightarrow{PQ}),$$

luego

$$(gf)_P = g_{f(P)}f_P,$$

lo que prueba nuestro aserto.

3.3.1.2. La aplicación identidad sobre X, id_X, es afín y $\overrightarrow{\mathrm{id}_X} = \mathrm{id}_V$.

3.3.1.3. Si f es un isomorfismo afín, f^{-1} lo es también y $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$.

3.3.1.4. El conjunto $\mathrm{GA}(X)$ de las afinidades de X es un grupo para la composición de aplicaciones, y la aplicación

$$\Psi : \mathrm{GA}(X) \longrightarrow \mathrm{Gl}(V)$$

definida por $\Psi(f) = \overrightarrow{f}$ es un homomorfismo suprayectivo de grupos. La demostración es inmediata usando lo anterior y 3.1.4.

Definición 3.3.2.– *Dada una afinidad $f \in GA(X)$, se dice que un punto P es doble si $f(P) = P$. Diremos que una variedad lineal afín L es doble si $f(L) = L$, esto es, se verifica que $f(P) \in L, \quad \forall P \in L$.*

Por último, diremos que una variedad L es de puntos dobles cuando todos sus puntos son dobles, esto es, $f(P) = P, \quad \forall P \in L$.

Notas 3.3.3.– Sea $\Psi : \mathrm{GA}(X) \to \mathrm{Gl}(V)$ la aplicación definida en 3.3.1. Se llaman *traslaciones* de X a los elementos del $\ker(\Psi)$. En otras palabras, $f \in \mathrm{GA}(X)$ es una traslación si y sólo si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_V$.

3.3.3.1. Sea $f \in \mathrm{GA}(X)$ y $P, Q \in X$; se verifica que

$$\overrightarrow{Pf(Q)} = \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qf(Q)}.$$

Así $\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{Qf(Q)}$ si y sólo si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ}$. Esto significa que una afinidad es una traslación si y sólo si el vector que va desde cada punto a su transformado es constante. En este caso, a ese vector $\mathbf{u} = \overrightarrow{Pf(P)}$ se le llama el vector de la traslación, a ésta se la denota por $\tau_{\mathbf{u}}$, y actúa en la forma siguiente:

$$\tau_{\mathbf{u}}(P) = P + \mathbf{u}.$$

3.3.3.2. Recíprocamente, dado un vector $\mathbf{u} \in V$ arbitrario, la aplicación $\tau_{\mathbf{u}} : X \to X$ definida por $\tau_{\mathbf{u}}(P) = P + \mathbf{u}$ es una traslación. En efecto, si se fija $P \in X$, para todo $Q \in X$ es

$$(\tau_{\mathbf{u}})_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}(P)\tau_{\mathbf{u}}(Q)} = \overrightarrow{(P+\mathbf{u})(Q+\mathbf{u})} = \overrightarrow{PQ},$$

luego $\tau_{\mathbf{u}}$ es una traslación.

3.3.3.3. El conjunto $\mathrm{T}(X)$ de las traslaciones de X es un subgrupo normal de $\mathrm{GA}(X)$, por ser el núcleo de un homomorfismo. La aplicación $\tau : V \to \mathrm{T}(X)$ que a $\mathbf{u} \in V$ asocia $\tau_{\mathbf{u}}$ es una biyección que es un isomorfismo de grupos, pues, si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, para todo $P \in X$, es

$$\tau_{\mathbf{v}}\tau_{\mathbf{u}}(P) = \tau_{\mathbf{v}}(P + \mathbf{u}) = (P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \tau_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(P)$$

luego $\tau_{\mathbf{v}}\tau_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$. Esto implica, en particular, que $\mathrm{T}(X)$ es abeliano.

3.3.3.4. Una traslación distinta de la identidad no tiene puntos dobles, y transforma una variedad lineal afín en una paralela. Si $\mathbf{u} \in V$ es un vector no nulo, las variedades lineales afines invariantes por la traslación $\tau_{\mathbf{u}}$ son justamente aquéllas cuya dirección contiene a $\mathbf{u}$. Para determinar una traslación basta dar un punto y su imagen. Si se fija un sistema de referencia afín en X, se considera la base vectorial asociada y, respecto de ella, $\mathbf{u} = (a_1, \ldots, a_n)$, las ecuaciones de $\tau_{\mathbf{u}}$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Todas estas afirmaciones son inmediatas.

Notas 3.3.4.– Por álgebra lineal sabemos que el centro de $\mathrm{Gl}(V)$ (i.e. el conjunto de los automorfismos de V que conmutan con todos) es

$$\mathrm{Z}(V) = \{\lambda \cdot \mathrm{id}_V \mid \lambda \in k \setminus \{0\}\}.$$

La imagen inversa de $\mathrm{Z}(V)$ por el homomorfismo $\Psi : \mathrm{GA}(X) \to \mathrm{Gl}(V)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{GA}(X)$, que se denota por $\mathrm{Dil}(X)$, a cuyos elementos se les llama las *dilataciones* de X. Una afinidad f es, pues, una dilatación si y sólo si $\overrightarrow{f} = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$, $\lambda \in k \setminus \{0\}$. Por supuesto, $\mathrm{Dil}(X) \supset \mathrm{T}(X)$, y las dilataciones que no son traslaciones se llaman *homotecias*. Si f es una homotecia y $\overrightarrow{f} = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$, al escalar $\lambda \neq 0, 1$ se le llama la *razón de homotecia*.

3.3.4.1. Una homotecia tiene un único punto doble, que se llama su *centro*. En efecto, sea h una homotecia de razón λ; fijado $P \in X$, para todo $Q \in X$ es $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, de donde $h(Q) = h(P) + \lambda\overrightarrow{PQ}$. Así,

$$h(Q) = Q \iff \lambda\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{h(P)Q} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{Ph(P)} \iff$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Ph(P)}$$

lo que determina el centro de homotecia: $Q = P + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Ph(P)}$. Que el centro es único es claro puesto que si $h(Q) = Q$ y $h(Q') = Q'$, sería:

$$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{QQ'}) = \lambda \cdot \overrightarrow{QQ'}$$

lo que es contradictorio, pues $\lambda \neq 1$.

3.3.4.2. Una homotecia viene unívocamente determinada por su centro y su razón. Si h es una homotecia de centro O y razón λ, para todo $P \in X$ es $\overrightarrow{Oh(P)} = \lambda\overrightarrow{OP}$. Así, P se transforma en un punto alineado con él y con el centro, de tal manera que la razón simple $(OPh(P)) = \lambda$. Por tanto, h viene también unívocamente determinada por su centro y un punto distinto de él junto con su imagen. Si se fija un sistema de referencia afín sobre X, y, respecto de él, $O = (a_1, \ldots, a_n)$, las ecuaciones de h son

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot M$$

con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & (1-\lambda)a_1 & \ldots & (1-\lambda)a_n \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

3.3.4.3. Si h_1, h_2 son homotecias de razones respectivas λ_1, λ_2 y centros O_1, O_2, es $\overrightarrow{h_2}\overrightarrow{h_1} = \lambda_1\lambda_2 \cdot \mathrm{id}_V$. Así, este producto es una homotecia de razón producto de las razones si éstas no son inversas, y una traslación si lo son. Por supuesto, el producto de dos homotecias del mismo centro es una homotecia de ese centro, o la identidad. El producto de dos homotecias de distintos centros, si es una homotecia, tiene centro alineado con ambos. En efecto, si se denota por Q al centro del producto, se tiene $h_2h_1(O_1) = h_2(O_1)$ con lo que, por un lado, Q está alineado con O_1 y $h_2(O_1)$ y, por otra parte, O_2 está alineado también con O_1 y $h_2(O_1)$ con lo que la afirmación queda ya clara.

Terminamos esta sección con un resultado general.

Proposición 3.3.5.– *Sea $f \in \mathrm{GA}(X)$; las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$f \in \mathrm{Dil}(X)$.*

2. *Para toda recta r es $f(r) \parallel r$.*

Demostración: Descartamos el caso de dimensión 1 en que todas las afinidades son dilataciones. Es claro que la primera condición implica la segunda, pues $\overrightarrow{f}$ transforma vectores en vectores proporcionales. Veamos el recíproco. Por hipótesis, para cada $\mathbf{u} \in V$ existe $\lambda_{\mathbf{u}} \in k$ tal que $\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) = \lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$. Se trata de ver que todos los $\lambda_{\mathbf{u}}$ coinciden.
Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vectores linealmente independientes; entonces

$$\overrightarrow{f}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \overrightarrow{f}(\mathbf{u}) + \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v},$$

de donde se deduce que

$$\lambda_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{u}} = \lambda_{\mathbf{v}}$$

por la independencia lineal. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ son vectores linealmente dependientes se elige otro vector $\mathbf{w}$ que no sea proporcional a ellos. Por lo anterior, $\lambda_{\mathbf{u}} = \lambda_{\mathbf{w}} = \lambda_{\mathbf{v}}$. Esto prueba la proposición.

3.4 Ejercicios

Ejercicio 1.–Sea $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ un sistema de referencia afín. Calcular las ecuaciones de las aplicaciones afines $f: X \to X$ respecto de $\mathcal{R}$, tales que $f(O) = O'$, $\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$, $\overrightarrow{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$, donde

$$a)\ O' = (0,0) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \qquad b)\ O' = (1,-1) \quad \mathbf{u}' = 3\mathbf{u} - \mathbf{v} \quad \mathbf{v}' = -3\mathbf{u} + \mathbf{v}$$
$$c)\ O' = (2,1) \quad \mathbf{u}' = -2\mathbf{u} \quad \mathbf{v}' = -2\mathbf{v} \qquad d)\ O' = (-1,0) \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

(Las coordenadas de O' siempre vienen dadas respecto de $\mathcal{R}$).
Deducir en qué casos son afinidades.
Ejercicio 2.–Sea $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ un sistema de referencia afín. Sean $P = (0,1)$, $C = (1,0)$, $D = (1,1)$ respecto de $\mathcal{R}$. Calcular las ecuaciones, respecto de $\mathcal{R}$, de las aplicaciones afines $f\ X \to X$ tales que $f(P) = P'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, donde:

$$a)\ P' = (0,0) \quad C' = (1,0) \quad D' = (0,1)$$
$$b)\ P' = (2,1) \quad C' = (2,-1) \quad D' = (-1,1)$$
$$c)\ P' = (-1,-1) \quad C' = (1,1) \quad D' = (0,-1)$$
$$d)\ P' = (1,-2) \quad C' = (0,1) \quad D' = (1,0).$$

Decir en qué casos se obtiene una afinidad.
Ejercicio 3.–En el plano afín X se consideran las siguientes aplicaciones $f\ X \to X$. Deducir si son o no aplicaciones afines, y en su caso afinidades:

$$a)\ f(x,y) = (x+1, y-1) \qquad b)\ f(x,y) = (2x, 2y)$$
$$c)\ f(x,y) = (2x-1, 3y+2) \qquad d)\ f(x,y) = (3x+1, 0)$$
$$e)\ f(x,y) = (x^2+1, y).$$

Ejercicio 4.–Sea $\mathcal{R}$ el sistema de referencia afín canónico y $\mathcal{R}' = \{O'; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ con $O' = (1,0)$ respecto de $\mathcal{R}$, $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1)$. Calcular las ecuaciones de las aplicaciones afines del ejercicio anterior respecto de $\mathcal{R}'$.
Ejercicio 5.–Sea r la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ y f una aplicación afín. Caracterizar $f(r)$ en cada caso. Poner ejemplos utilizando los ejercicios anteriores.
Ejercicio 6.–Idem con $f^{-1}(r)$.
Ejercicio 7.–Calcular los puntos, rectas y direcciones dobles de las afinidades dadas por las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad d)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad g)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8.–En el plano afín ordinario sea $f\ X \to X$ la proyección paralela al vector $\mathbf{u}$ sobre la recta r, donde el vector no es de la dirección de la recta. La proyección f se define de la siguiente manera: para cada punto P del plano, $f(P)$ es el punto de corte de r con la recta $P + < \mathbf{u} >$. Demostrar que f es una aplicación afín. Encontrar las ecuaciones de las proyecciones siguientes:

$$a)\ r: 2x + y - 5 = 0 \quad \mathbf{u} = (1,1)$$
$$b)\ r: x - y = 0 \quad \mathbf{u} = (1,0)$$

Ejercicio 9.–Se consideran los puntos $A = (1,0)$ y $B = (-1,0)$.
a) ¿Qué transformación es la que asocia a cada punto P del plano, el baricentro del triángulo $\triangle ABP$?
b) Hallar el lugar geométrico de dicho baricentro cuando P recorre la recta $2x + y = 6$.

Ejercicio 10.–En el plano afín ordinario se pide:
1) Hallar las ecuaciones de todas las afinidades que dejan invariantes los puntos (1,1), (2,3) y la recta $x + y = 2$.
2) Hallar el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos transformados del que tiene como vértices (0,0), (1,0), (0,1), por todas las afinidades anteriores.
Ejercicio 11.–Se considera el conjunto G de todas las afinidades que dejan fijas las rectas $x = 1$ e $y = 1$. Se pide:
1) Razonar si G es, o no, un grupo, para la composición de aplicaciones.
2) Hallar la matriz general de los elementos de G.
3) El grupo G contiene homotecias. Hallar sus centros. ¿Contiene G traslaciones distintas de la identidad?
4) Hallar los puntos y rectas dobles de una afinidad de G que no sea una dilatación.
Ejercicio 12.–Se recuerda que un sistema de referencia afín es un objeto compuesto de un punto (llamado *origen*) y una base vectorial. Una afinidad plana f se llama una *cizalladura* si existe un sistema de referencia afín en el cual f puede escribirse con unas ecuaciones del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{1}$$

con $\lambda \neq \mu$.
1.- Hallar las direcciones dobles de una cizalladura.
2.- Discutir, según los casos, la configuración de puntos dobles de una cizalladura.
3.- Averiguar si la afinidad de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

es o no una cizalladura. Caso afirmativo, hallar un sistema de referencia en el cual sus ecuaciones sean del tipo (1).
Ejercicio 13.–Sea $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ un sistema de referencia afín, y respecto a él consideremos los puntos $A_0 = (1, 0)$, $A_1 = (2, -1)$, y la recta $r : 2x + y = 1$. Para cada punto $A_2 \in r \setminus \{(0, 1)\}$, sea f la afinidad determinada por $f(A_0) = A_0$, $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = G$, siendo G el baricentro del triángulo $A_0A_1A_2$. Se pide:
Hallar la forma general de la matriz de f respecto de $\mathcal{R}$. ¿Existe algún A_2 para el que f sea homotecia?
Ejercicio 14.–En el espacio afín $X = \mathbb{R}^3$, se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$. Sea f una afinidad de la que se sabe que
a) el plano $\pi : x + y + z = 0$ es invariante por f, y la restricción de f a π es una homotecia de razón 3.
b) la recta $r : 2x + 4y + 3z = 0$, $x + 2y + z = 0$ es invariante por f, y la restricción de f a r es una homotecia de razón 2.
Se pide:
1) Demostrar que el punto $r \cap \pi$ es invariante por f.
2) Hallar una base vectorial $\{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $D(\pi) =< v_1, v_2 >$, y $D(r) =< v_3 >$. Calcular $\overrightarrow{f}(v_i)$, i =1,2,3, y, a partir de ellos, $\overrightarrow{f}(u_i)$, i =1,2,3.
3) Calcular las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{R}$, y sus puntos dobles.
Ejercicio 15.–Sea el espacio afín de dimensión 3.
(Parte 1) Fijemos una recta r y un plano π, tales que r corta a π. Consideremos la aplicación $f : X \to X$ definida por $f(P) = P + 2\overrightarrow{PP'}$, con $P' = \pi \cap (P + D(r))$. Demostrar que:
1.a) f es biyectiva.
1.b) el conjunto de puntos dobles de f es el plano π.
1.c) $\forall P$, $\overrightarrow{Pf(P)} \in D(r)$.
1.d) $\forall P$, el punto medio del segmento $\overline{Pf(P)}$ pertenece a π.
(Parte 2)
2.a) Calcular las ecuaciones de f para $r : x - 1 = 1 - y = z - 1$, $\pi : x + y + z = 0$. ¿Es f una afinidad?
2.b) Hallar los puntos dobles de f.

Ejercicio 16.–Sea el espacio afín $(X, V, +)$ de dimensión cuatro. Demostrar que, en cada uno de los casos siguientes, las relaciones escritas definen una aplicación afin f de X y encontrar sus ecuaciones respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = (\mathbf{O}, \mathcal{B})$. ¿Cuáles de ellas son afinidades?

$$
\begin{array}{ll}
a) & f(1,1,0,0) = (0,0,-2,1) \\
 & f(2,1,0,0) = (0,1,2,-1) \\
 & f(1,2,0,0) = (-1,1,0,0) \\
 & f(1,1,1,0) = (1,-1,1,-1) \\
 & f(1,1,0,1) = (-1,1,-3,2) \\
b) & f(-1,2,1,1,) = (2,3,-2,2) \\
 & f(0,2,1,1) = (2,2,-1,1) \\
 & f(-1,3,1,1) = (3,4,-3,4) \\
 & f(-1,2,2,1) = (0,2,0,-1) \\
 & f(-1,2,1,2) = (4,4,-3,4) \\
c) & f(0,1,1,0) = (0,0,1,0) \\
 & f(1,1,1,0) = (0,1,-1,2) \\
 & f(0,2,1,0) = (-1,1,0,1) \\
 & f(0,1,2,0) = ((1,-1,3,-1) \\
 & f(0,1,1,1) = (-2,2,-2,2)
\end{array}
$$

Ejercicio 17.–Para cada una de las aplicaciones afines del ejercicio anterior, calcular la imagen directa e inversa de la recta $r = (0,0,0,0) + < (0,1,-1,-1) >$.
Ejercicio 18.–Demostrar que las relaciones:

$$
\begin{array}{l}
f(0,1,1,0) = (4,1,-1,10) \\
f(1,1,1,0) = (4,0,0,9) \\
f(0,2,1,0) = (5,2,-1,11) \\
f(0,1,2,0) = (6,2,-2,12) \\
f(0,1,1,1) = (-3,-7,7,-1)
\end{array}
$$

definen una aplicación afín. Para cada $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq 4$, y cada $L \in \mathcal{R}(\mathbf{X})$, $\dim L = r$, hallar las posibles dimensiones de $f(L)$ y $f^{-1}(L)$. Caracterizar las variedades L para las que se presenta cada posibilidad.
Ejercicio 19.–Mismo enunciado del ejercicio anterior con los datos

$$
\begin{array}{l}
f(0,1,1,0) = (-1,2,-6,6) \\
f(1,1,1,0) = (0,4,-8,10) \\
f(0,2,1,0) = (-2,2,-10,8) \\
f(0,1,2,0) = (0,5,-11,13) \\
f(0,1,1,1) = (0,3,-5,7)
\end{array}
$$

Ejercicio 20.–En el espacio afín $\mathbb{R}^4$ se consideran las variedades dadas por

$$L_1 = (1,-1,1,-2) + < (-1,-1,1,0) >$$

$$L_2 = (1,2,3,4) + < (0,2,1,0), (0,0,1,2) >$$

$$L_3 = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 & = 4 \end{array} \right.$$

Hallar la posición relativa de L_1 y L_2 y la proyección de L_1 sobre L_2 paralela a L_3.