Capítulo 1

El espacio afín

1.1 Introducción. Dependencia lineal afín

La Geometría afín sobre un cuerpo k tiene como objetos básicos los siguientes: un conjunto no vacío X, cuyos elementos serán llamados puntos, que notaremos por letras mayúsculas P, Q, R, etc., y un k-espacio vectorial V de dimensión finita, cuyos elementos serán llamados vectores o flechas, y que notaremos por letras minúsculas negritas, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, etc. Hay, además, una acción $+$ del grupo aditivo de V sobre X, que corresponde a la idea intuitiva de mover un punto P a un punto Q mediante un vector $\mathbf{u}$ con origen en P y extremo en Q. Formalicemos el concepto de espacio afín. En lo que viene a continuación se fijará el cuerpo k, y todos los espacios vectoriales que se consideren lo tendrán como dominio de escalares.

Definición 1.1.1.– *Un espacio afín es una terna $(X, V, +)$ formada por un conjunto no vacío X, un espacio vectorial V de dimensión finita, n, sobre un cuerpo k, y una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} + : X \times V & \longrightarrow & X \\ (P, \mathbf{u}) & \longmapsto & P + \mathbf{u} \end{array},$$

que verifica las condiciones siguientes:

1. *Para cada $P \in X$, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} (+)_P : & V & \longrightarrow & X \\ & \mathbf{u} & \longmapsto & P + \mathbf{u} \end{array}$$

   es biyectiva.

2. *Para cada $P \in X$, y para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, se verifica:*

$$(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Nota 1.1.2.– La propiedad 1) de la definición anterior implica, en primer lugar, que

$$P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

En segundo lugar, fijado $P \in X$, para todo $Q \in X$, existe un único vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $P + \mathbf{u} = Q$. Se escribirá $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, y se dirá que es el vector de origen P y extremo Q. Si, en la propiedad 2), se escribe $Q = P + \mathbf{u}$, $R = Q + \mathbf{v}$, esta propiedad se relee así:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$

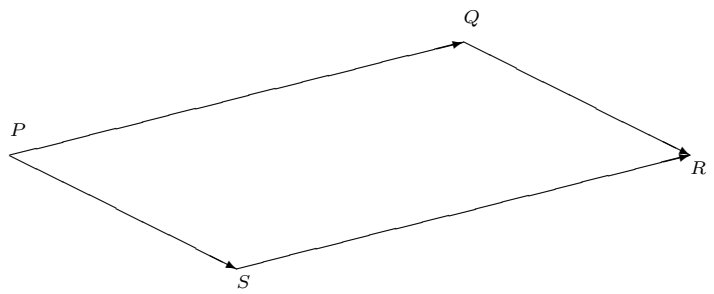

Figura 1.1: Teorema de Thales paralelo

Finalmente, de esta última ecuación se deduce que

$$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} \Longrightarrow \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$$

y

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

Ejemplo 1.1.3.– El ejemplo fundamental de espacio afín es el espacio afín numérico, dado por $X = V = k^n$, y la acción $+$ que es la suma de vectores de k^n. Es trivial comprobar que se satisfacen las condiciones de la definición 1.1.1.

Teorema 1.1.4.– Teorema de Thales paralelo. *Sean $P, Q, R, S \in X$ cualesquiera. Se verifica que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ si y sólo si $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$. Este teorema es también conocido por el nombre de* teorema de las partes de paralelas comprendidas entre paralelas *(Ver figura 1.1).*

Demostración: La demostración es trivial, partiendo de la relación

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}.$$

Definición 1.1.5.– Dependencia lineal afín. *Diremos que los puntos $\{P_0, P_1, \ldots P_r\}$ son afínmente independientes si los vectores $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_r}\}$ son linealmente independientes. En caso contrario se dirán afínmente dependientes.*
Veamos que la definición no depende del punto P_0 elegido. Supongamos que $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_r}\}$ son linealmente independientes, tomemos otro punto cualquiera, P_i, y sea:

$$\alpha_0\overrightarrow{P_iP_0} + \alpha_1\overrightarrow{P_iP_1} + \ldots + \alpha_{i-1}\overrightarrow{P_iP_{i-1}} + \alpha_{i+1}\overrightarrow{P_iP_{i+1}} + \ldots + \alpha_r\overrightarrow{P_iP_r} = \mathbf{0}$$

Como $\overrightarrow{P_iP_0} = -\overrightarrow{P_0P_i}$ y $\overrightarrow{P_iP_j} = \overrightarrow{P_iP_0} + \overrightarrow{P_0P_j}$, resulta

$$\alpha_1\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + \alpha_{i-1}\overrightarrow{P_0P_{i-1}} - (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_r)\overrightarrow{P_0P_i} + \alpha_{i+1}\overrightarrow{P_0P_{i+1}} + \ldots + \alpha_r\overrightarrow{P_0P_r} = \mathbf{0}$$

y por la independencia lineal de estos vectores es:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_r = 0 \text{ y por lo tanto } \alpha_0 = 0$$

1.2 Variedades lineales afines

Definición 1.2.1.– *Un subconjunto L de X se llamará una variedad lineal afín si, o bien $L = \emptyset$, o bien existe un punto $P \in L$ y un subespacio vectorial W de V tales que*

$$L = P + W = \{P + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in W\}.$$

Notas 1.2.2.– Sea $L = P + W$; se verifica:

1.2.2.1. Si $R \in L$, entonces $L = P + W = R + W$. En efecto, sea $Q \in P + W$; entonces existe $\mathbf{u} \in W$ tal que

$$Q = P + \mathbf{u} = (R + \overrightarrow{RP}) + \mathbf{u} = R + (\overrightarrow{RP} + \mathbf{u}) \in R + W,$$

lo que prueba que $L \subset R + W$. Recíprocamente, sea $Q \in R + W$; entonces $Q = R + \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \in W$. Así,

$$Q = R + \mathbf{v} = (P + \overrightarrow{PR}) + \mathbf{v} = P + (\overrightarrow{PR} + \mathbf{v}) \in L.$$

Esto prueba la afirmación.

1.2.2.2. Si $W' \subset V$ es una variedad lineal y $L = P + W'$, entonces $W = W'$. En efecto, por simetría, basta probar que $W \subset W'$. Sea $\mathbf{u} \in W$; entonces $P + \mathbf{u} \in L$ y así $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{u}'$ con $\mathbf{u}' \in W'$. Por tanto, $\mathbf{u} = \mathbf{u}' \in W'$, lo que prueba nuestro aserto.

Lo anterior prueba que el subespacio W depende sólo de L, y se denotará, en lo sucesivo, por $D(L)$, llamándosele *variedad de dirección de L*. Se llamará *dimensión de una variedad lineal afín* a la de su variedad de dirección. Se convendrá que la dimensión del conjunto vacío es -1. Nótese que los puntos son las variedades lineales afines de dimensión cero, y el espacio entero X es la única variedad lineal afín de dimensión máxima n. Se utilizarán los nombres clásicos de rectas para las variedades lineales afines de dimensión 1, planos para las de dimensión 2 e hiperplanos para las de dimensión $n - 1$.

1.3 Sistema de referencia afín. Coordenadas de un punto

De manera análoga a como se define *base* en el espacio vectorial V, conjunto de vectores linealmente independientes que generan el espacio, definiremos ahora *sistema de referencia afín* en el espacio afín $(X, V, +)$. Veamos antes la siguiente

Proposición 1.3.1.– *Si L es una variedad lineal afín de dimensión r, el número máximo de puntos de L afínmente independientes es $r + 1$.*

Demostración: Supongamos que $r \neq -1$ (si $L = \emptyset$ es trivial) y sea $L = P + D(L)$. Veamos, en primer lugar, que existen $r + 1$ puntos afínmente independientes: como $dim D(L) = r$ existe en $D(L)$ una base formada por r vectores $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$. Tomando $Q_i = P + \mathbf{v}_i$ resulta que los puntos $\{P, Q_1, \ldots, Q_r\}$ son afínmente independientes. Además, si $\{A_1, A_2, \ldots, A_{r+2}\}$ fuesen puntos de L afínmente independientes, los $r + 1$ vectores $\{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_{r+2}}\}$ pertenecerían a $D(L)$ y serían linealmente independientes, lo que es imposible.

Definición 1.3.2.– *Dado un espacio afín $(X, V, +)$ de dimensión n, un sistema de referencia afín $\mathcal{R}$ es un conjunto* ordenado *de $n + 1$ puntos afínmente independientes $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \ldots P_n\}$.*
Por abuso de lenguaje se dirá que un sistema de referencia afín es un conjunto $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$, donde O es un punto fijo, que llamaremos *origen de coordenadas* y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ es una base de V. Haciendo $P_0 = O$ y $P_i = P_0 + \mathbf{u}_i$, todo funciona como en la definición.

Nota 1.3.3.– Fijado un sistema de referencia afín,

$$\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\},$$

se pueden asignar coordenadas cartesianas a los puntos de X, de modo similar a como se hace en álgebra lineal al asignar coordenadas a un vector, una vez fijada una base. En este caso, la asignación se hace de

la forma siguiente: a cada punto $P \in X$ se le asocian las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$.

Definición 1.3.4.– *A la n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ le llamaremos* <u>*coordenadas cartesianas*</u> *de P respecto de $\mathcal{R}$, y usualmente se escribirá:*

$$P = (x_1, \ldots, x_n)$$

Se establece así una aplicación biyectiva

$$\Phi_{\mathcal{R}} : X \longrightarrow k^n$$

que a cada punto le asigna sus coordenadas cartesianas, y que es la composición de $((+)_O)^{-1}$ con la biyección de V sobre k^n que asocia coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ a cada vector de V.

Definición 1.3.5.– *Se dice que M es el punto medio de el segmento AB si verifica que $\vec{AB} = 2\vec{AM}$.*

Fijado un sistema de referencia se verifica que

$$M_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}(A_{\mathcal{R}} + B_{\mathcal{R}}).$$

En efecto,

$$\vec{AB} = 2\vec{AM} \Rightarrow \vec{AO} + \vec{OB} = 2(\vec{AO} + \vec{OM}) \Rightarrow 2\vec{OM} = \vec{OB} - \vec{AO} = \vec{OB} + \vec{OA}.$$

Luego, $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA})$.

Nota 1.3.6.– Cambio de Sistema de Referencia Afín.
Sean

$$\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}\ ,\ \mathcal{R}' = \{O', \mathbf{u'_1}, \ldots, \mathbf{u'_n}\}$$

dos sistemas de referencia afines donde $O' = (a_{01}, \ldots, a_{0n})$, coordenadas respecto de $\mathcal{R}$, y $\mathbf{u}'_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, n$, coordenadas respecto de $\mathcal{B}$.
Sea $P \in X$, $P = (x_1, \ldots, x_n)$, coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ y $P = (x'_1, \ldots, x'_n)$, coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$. Se tiene

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

lo que equivale a escribir:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}\mathbf{u}_j + \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{u}'_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}\mathbf{u}_j + \sum_{i=1}^{n} x'_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_j)$$

esto es,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}\mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} x'_i a_{ij})\mathbf{u}_j$$

de donde se deduce:

$$x_j = a_{0j} + \sum_{i=1}^{n} x'_i a_{ij}$$

que, matricialmente se escribe así:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.4 Ecuaciones de una variedad lineal afín

En el espacio vectorial $V = k^n$ los subespacios vectoriales vienen dados por ecuaciones implícitas. Dicho de otra manera, un subespacio vectorial es el conjunto de soluciones en k^n de un sistema de r ecuaciones *homogéneas* con n incógnitas, para cualquier entero r no negativo. Vamos a ver cómo las variedades lineales afines son también conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Fijaremos un sistema de referencia y trabajaremos en el espacio afín numérico $X = V = k^n$.
Sea $L \neq \emptyset$ una variedad lineal afín en k^n, $P = (a_1, \ldots, a_n) \in L$, y supongamos que $D(L)$ es el subespacio vectorial de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}y_1 & + & \ldots & + & a_{1n}y_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}y_1 & + & \ldots & + & a_{rn}y_n & = & 0 \end{array}$$

Entonces, un punto $Q = (x_1, \ldots, x_n) \in L$ si y sólo si $\overrightarrow{PQ} \in D(L)$, o sea, si y sólo si

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}(x_1 - a_1) & + & \ldots & + & a_{1n}(x_n - a_n) & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}(x_1 - a_1) & + & \ldots & + & a_{rn}(x_n - a_n) & = & 0 \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & \ldots & + & a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}$$

donde

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_j \ , \ i = 1, \ldots, r$$

Por tanto, los puntos de L son las soluciones de un sistema compatible de r ecuaciones con n incógnitas, que se llaman ecuaciones implícitas de L. Obsérvese que las ecuaciones implícitas de L se obtienen a partir de las de $D(L)$ modificando los términos independientes nulos por los b_i en la forma arriba indicada. Recíprocamente, las ecuaciones implícitas de $D(L)$ se obtienen de las de L haciendo cero los términos independientes. Esto prueba que, recíprocamente, todo conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es una variedad lineal afín. El conjunto vacío no es una excepción, pues es el conjunto de soluciones de un sistema incompatible.

Nota 1.4.1.– Las ecuaciones paramétricas de una variedad lineal afín L no vacía tienen tratamiento análogo a las de $D(L)$: si

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & \lambda_1 c_{11} & + & \ldots & + & \lambda_s c_{s1} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_n & = & \lambda_1 c_{1n} & + & \ldots & + & \lambda_s c_{sn} \end{array}$$

son las ecuaciones paramétricas de $D(L)$, entonces las de L son

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & a_1 & + & \lambda_1 c_{11} & + & \ldots & + & \lambda_s c_{s1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & a_n & + & \lambda_1 c_{1n} & + & \ldots & + & \lambda_s c_{sn}. \end{array}$$

Aprovechando los resultados del álgebra lineal, se ve que un hiperplano afín posee una única ecuación implícita independiente, mientras que una recta posee unas ecuaciones paramétricas con un solo parámetro. En general, una variedad lineal afín de dimensión s, $0 \leq s \leq n$ tiene $n - s$ ecuaciones implícitas independientes, y unas ecuaciones paramétricas con s parámetros.

Nota 1.4.2.– Ecuación continua de la recta Sea r una recta, $r = A + \langle \mathbf{v} \rangle$ con $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Se llama ecuación continua de la recta a la ecuación de la forma

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{v_n}.$$

Nota 1.4.3.– Haces de hiperplanos Dada una variedad lineal afín L de ecuaciones implícitas

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n & = & a_{10} \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rn}x_n & = & a_{r0} \end{array}\right.$$

Se llama haz de hiperplanos que contienen a L al conjunto de hiperplanos de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n-a_{i0})=0,$$

donde $\lambda_i\in k$, para cada i con $1\leq i\leq r$.

Fijando valores λ_i se obtienen todos los hiperplanos que contienen a L.

1.5 Ejercicios

Ejercicio 1.–Dadas las rectas

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{4}\quad;\quad\frac{x-1}{2}=\frac{y}{6}=\frac{z-2}{5}$$

hallar la ecuación del plano que pasa por la primera y es paralelo a la segunda.
Ejercicio 2.–Dadas las rectas $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z\quad;\quad\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=z$, hallar la ecuación de los planos que, pasando por cada una de ellas, son paralelos a la otra.
Ejercicio 3.–Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3,1,0)$ y es secante a las rectas

$$\left\{\begin{array}{ll} x= & 1+z \\ y= & 2z \end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{ll} x= & -z \\ y= & 1+z \end{array}\right.$$

Ejercicio 4.–Dado el tetraedro de vértices (2,3,1), $(4,-1,3)$, $(1,1,-2)$, (1,1,2), se pide hallar las ecuaciones de las rectas que unen los puntos medios de cada par de aristas opuestas. Comprobar que esas tres rectas pasan por un mismo punto, que se calculará.
Ejercicio 5.–Hallar la ecuación del lugar geométrico, de los puntos de las rectas
a) que cortan a la vez a las rectas $x=2$, $y=3$; $x=-2$, $z=-4$; $y=-3$, $z=4$.
b) paralelas al plano XOY y se apoyan en las rectas $y=2z$, $x=3$; $y=-2z$, $x=-3$.
c) paralelas al plano $3x+2y=0$ y se apoyan en las rectas $3x+2y-6z=0$, $3x-2y-6=0$; $3x+2y-12z=0$, $3x-2y-3=0$.
Ejercicio 6.–Dadas las tres rectas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4},\quad\frac{x}{3}=y+3=\frac{z-1}{2},\quad\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{2}$$

a) Comprobar que son paralelas a un mismo plano, y hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a las tres rectas dadas.
b) Hallar todas las rectas coplanarias con las tres dadas y comprobar que todas son paralelas a un mismo plano que pasa por el origen, y cuya ecuación se pide.
Ejercicio 7.–Sea X un espacio afín de dimensión 4 ó 5 según los casos. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la variedad dada por un punto P y un sistema generador de su variedad de dirección, en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{llllll} (a) & P=(1,0,1,0) & (b) & P=(2,0,0,-2) & (c) & P=(-1,1,0,0,1) \\ & \mathbf{a}_1=(1,1,2,-1) & & \mathbf{a}_1=(1,1,0,1) & & \mathbf{a}_1=(1,1,2,-1,0) \\ & \mathbf{a}_2=(0,1,-3,0) & & \mathbf{a}_2=(0,0,0,1) & & \mathbf{a}_2=(0,1,-3,0,1) \\ & \mathbf{a}_3=(1,2,-1,1) & & \mathbf{a}_3=(1,0,1,2) & & \mathbf{a}_3=(-1,0,-5,1,1) \\ & \mathbf{a}_4=(2,3,1,-2) & & \mathbf{a}_4=(2,1,1,4) & & \mathbf{a}_4=(0,2,-6,0,2) \end{array}$$

Ejercicio 8.–En cada uno de los siguientes casos, dar un punto y una base de la variedad de dirección, las ecuaciones paramétricas, y un conjunto de puntos afínmente independientes que generen la variedad lineal afín dada.(El apartado (c) en dimensión 5).

$$(a)\quad \begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 & = 1 \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ -x_1 + +x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 3 \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 3 \\ -x_2 - x_4 & = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 & = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = 1 \end{array} \qquad (d)\quad \begin{array}{ll} x_1 - x_3 + x_4 & = -1 \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 & = -2 \\ 3x_1 - 3x_3 + 3x_4 & = -3 \end{array}$$

Ejercicio 9.–Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de las variedades lineales afines generadas por los puntos:
a) $P_1 = (1,1,1,1),\ P_2 = (1,0,1,0),\ P_3 = (-1,1,0,-1),\ P_4 = (0,1,1,-1)$.
b) $P_1 = (0,-1,2,3),\ P_2 = (0,-1,2,3),\ P_3 = (1,-2,1,3),\ P_4 = (1,-3,3,6)$.
c) $P_1 = (1,0,0,4,0),\ P_2 = (1,-1,-1,-1,-1),\ P_3 = (2,0,0,0,0)$,
$P_4 = (1,0,1,0,1),\ P_5 = (3,0,1,0,1)$.