Capítulo 5

Movimientos. Teorema de Cartan-Dieudonné. Semejanzas.

5.1 Isometrías y movimientos

Partimos de un espacio euclídeo $(X, V, +)$ y recordemos que una isometría de V es un elemento $\varphi \in \mathrm{Gl}(V)$ que conserva el producto escalar, i.e. tal que

$$\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \ , \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Sabemos que, si $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces $\varphi \in \mathrm{Gl}(V)$ es una isometría si y sólo si $\varphi(\mathcal{B}) = \{\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), ..., \varphi(\mathbf{u}_n)\}$ es una base ortonormal de V y esto ocurre si y sólo si la matriz M de φ respecto de $\mathcal{B}$ es ortogonal (i.e. $MM^t = I$, la matriz unidad). En este caso, $\det(M) = \pm 1$.

El conjunto $\mathcal{O}(V)$ de las isometrías de V es un grupo multiplicativo, por lo anterior, que se llama el grupo ortogonal de V. Dentro de él, las isometrías de determinante positivo forman un subgrupo normal que se representa por $\mathcal{O}_+(V)$.

Definición 5.1.1.– *Un <u>movimiento</u> en X es una aplicación afín $f : X \to X$ que conserva las distancias, es decir, tal que, para todo $P, Q \in X$, es*

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

El conjunto de los movimientos de X se nota por $Mo(X)$. El siguiente teorema establece una caracterización de las aplicaciones afines que son movimientos.

Teorema 5.1.2.– *Sea f una aplicación afín; las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$f \in Mo(X)$, es decir, f conserva la distancia.*
2. *$\forall \mathbf{u} \in V$ se tiene $|\overrightarrow{f}(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$, es decir, $\overrightarrow{f}$ conserva los módulos de los vectores.*
3. *$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) \bullet \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$, es decir, $\overrightarrow{f}$ es una isometría (conserva el producto escalar).*

Demostración:
1. $\Rightarrow$ 2.
Sean $P, Q \in X$ tales que $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{u}$; entonces

$$|\overrightarrow{f}(\mathbf{u})| = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})| = |\overrightarrow{f(P)f(Q)}| = d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) = |\mathbf{u}|.$$

2. $\Rightarrow$ 3.
Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Se tiene:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$$

Y por la conservación de los módulos será:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\overrightarrow{f}(\mathbf{u}-\mathbf{v})|^2 = |\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) - \overrightarrow{f}(\mathbf{v})|^2 = (\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) - \overrightarrow{f}(\mathbf{v}))^2 =$$

$$= \overrightarrow{f}(\mathbf{u})^2 + \overrightarrow{f}(\mathbf{v})^2 - 2\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) \bullet \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - 2\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) \bullet \overrightarrow{f}(\mathbf{v}).$$

Entonces, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \overrightarrow{f}(\mathbf{u}) \bullet \overrightarrow{f}(\mathbf{v})$.
3. $\Rightarrow$ 1.

$$d(f(P), f(Q))^2 = |\overrightarrow{f(P)f(Q)}|^2 = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})|^2 = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \bullet \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PQ}|^2 = d(P,Q)^2$$

Corolario 5.1.3.– *Los movimientos son afinidades.*

Demostración: Una aplicación afín f es un movimiento si y sólo si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(V)$. Por ser $\mathcal{O}(V) \subset \mathrm{Gl}(V)$, se tiene que $\mathrm{Mo}(X) \subset \mathrm{GA}(X)$.

Nota 5.1.4.– El conjunto $\mathrm{Mo}(X)$ de los movimientos de X es un subgrupo de $\mathrm{GA}(X)$, imagen inversa de $\mathcal{O}(V)$ por el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathrm{GA}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Gl}(V) \\ f & \longrightarrow & \overrightarrow{f}. \end{array}$$

La imagen inversa de $\mathcal{O}_+(V)$ es un subgrupo normal $\mathrm{Mo}(X)_+$ de $\mathrm{Mo}(X)$, cuyos elementos se llaman movimientos directos. Un movimiento inverso es uno no directo.
Terminamos la sección con una proposición sobre la conservación de ángulos y otra sobre puntos dobles de una afinidad.

Proposición 5.1.5.– *Los movimientos conservan los ángulos (no orientados), es decir,*

$$\forall A, B, C \in X \quad , \quad \forall f \in Mo(X) \qquad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}})$$

Demostración: Sean $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ y $\beta = (\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}})$.

$$cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \bullet \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC})|} = \frac{\overrightarrow{f(A)f(B)} \bullet \overrightarrow{f(A)f(C)}}{|\overrightarrow{f(A)f(B)}||\overrightarrow{f(A)f(C)}|} = cos(\beta)$$

y de la igualdad de los cosenos se deduce la igualdad de los ángulos no orientados.

Proposición 5.1.6.– *Sea $f \in \mathrm{GA}(X)$. Si f no tiene puntos dobles, entonces $\overrightarrow{f}$ tiene el autovalor* 1. *Si f tiene puntos dobles y Q es uno de ellos, el conjunto de todos es la variedad lineal afín dada por*

$$Q + \ker(\mathrm{id}_V - \overrightarrow{f})$$

Demostración: Sea $f \in \mathrm{GA}(X)$, y busquemos sus puntos dobles. Fijando $P \in X$ se trata de resolver la siguiente ecuación en Q: $f(Q) = Q$. Pero, poniendo $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, resulta:

$$f(Q) = Q \Leftrightarrow Q = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \Leftrightarrow \overrightarrow{f(P)Q} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{f(P)P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \Leftrightarrow (\mathrm{id}_V - \overrightarrow{f})\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Pf(P)}.$$

Por tanto, la no existencia de solución en Q implica que $\mathrm{id}_V - \overrightarrow{f}$ no puede ser un automorfismo, es decir, existe $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $(\mathrm{id}_V - \overrightarrow{f})\mathbf{u} = \mathbf{0}$, esto es, $\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, luego $\overrightarrow{f}$ admite el autovalor 1.
Si Q es doble, entonces P lo es si y sólo si $f(P) = P$, esto es, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$, de donde, $(\mathrm{id}_V - \overrightarrow{f})\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{PQ} \in \ker(\mathrm{id}_V - \overrightarrow{f})$ y de aquí la conclusión final.

5.2 Clasificación de los movimientos en el plano

Nuestro objetivo en esta sección es dar una lista de los movimientos en el plano. Vamos a usar métodos puramente algebraicos para confeccionar esta lista. La razón es que conocemos las formas canónicas de las isometrías, según se han estudiado en Algebra.

Nota 5.2.1.– Dado un endomorfismo ortogonal $\overrightarrow{f}$, existe una base ortonormal de V respecto de la cual la matriz de $\overrightarrow{f}$ es diagonal por cajas, siendo éstas submatrices de la forma

$$(1) \quad , \quad (-1) \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a^2+b^2=1 \ , \ b \neq 0$$

Por lo tanto en nuestro caso (dimensión 2), las posibles matrices de $\overrightarrow{f}$ podrán ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a^2+b^2=1 \ , \ b \neq 0$$

Vamos a ver en las siguientes notas cada uno de los casos que pueden darse.

Notas 5.2.2.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y') = (1, x, y) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haremos su estudio según que tenga o no puntos dobles.

5.2.2.1. Supongamos que f tiene puntos dobles. Esto implica automáticamente que $\alpha = \beta = 0$ y el movimiento es la identidad.

5.2.2.2. Supongamos que f no tiene puntos dobles, lo que ocurre si y sólo si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. En este caso, $\forall P \in X$ es $f(P) = (\alpha + x, \beta + y)$, de donde $\overrightarrow{Pf(P)} = (\alpha, \beta)$ y el movimiento es una <u>*traslación*</u> de vector $\mathbf{u} = (\alpha, \beta)$. Las rectas dobles de f son las paralelas al vector $\mathbf{u}$.

Notas 5.2.3.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y') = (1, x, y) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Haremos su estudio según que tenga o no puntos dobles.

5.2.3.1. Supongamos que f tiene puntos dobles. Esto ocurre si y sólo si $\alpha = 0$. Entonces, el conjunto de los puntos dobles de f es la recta $r_0 : \underline{y = \beta/2}$. Cada punto $P = (x, y)$ tiene su imagen $f(P) = (x, \beta - y)$, lo que indica que el punto medio de $\overline{Pf(P)} \in r_0$ y $Pf(P) \perp r_0$. Por eso a f se le llama la <u>*simetría axial*</u> de eje r_0. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $f^2 = \mathrm{id}_X$.
2. Las rectas dobles de f son las perpendiculares a r_0, más la misma r_0.

5.2.3.2. Supongamos que f no tiene puntos dobles, lo que ocurre si y sólo si $\alpha \neq 0$. Es fácil comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lo que prueba que f es producto conmutativo de una simetría σ respecto de una recta r_0 por una traslación τ de vector paralelo a r_0. Este movimiento es una <u>*simetría axial con deslizamiento*</u>. La única recta doble de f es r_0.

Nota 5.2.4.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y') = (1, x, y) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces f tiene un único punto doble, que es $A = (\alpha/2, \beta/2)$. Cada punto $P = (x, y)$ se transforma en $f(P) = (\alpha - x, \beta - y)$, y así A es el punto medio del segmento $\overline{Pf(P)}$. Por esta razón se llama a f la <u>*simetría central*</u> de centro A. Las rectas dobles de f son las que pasan por A.

Nota 5.2.5.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y') = (1, x, y) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}, \ a^2 + b^2 = 1 \ , \ b \neq 0.$$

El cálculo de los puntos dobles de f nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \alpha + ax - by \\ y & = & \beta + bx + ay \end{array}\right\} \text{ esto es, } \left.\begin{array}{rcrcl} (1-a)x & + & by & = \alpha \\ -bx & + & (1-a)y & = \beta \end{array}\right\}$$

El determinante principal de este sistema es

$$\begin{vmatrix} 1-a & b \\ -b & 1-a \end{vmatrix} = 2(1-a)$$

que es distinto de cero porque al ser $b \neq 0$, es $a \neq 1$. Por lo tanto este sistema siempre tiene solución única y, así, f tiene un único punto doble A.
A este movimiento se le llama <u>*giro de centro A*</u>. Dado un punto cualquiera $P \in X$ veamos cuál es su transformado $f(P)$. Para ello vamos a calcular el ángulo (orientado) que forman los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{Af(P)}$. Supongamos que las coordenadas de $\overrightarrow{AP}$ son (v_1, v_2) y calculemos el producto escalar de ambos vectores:

$$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{Af(P)} = \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{f(A)f(P)} = \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AP}) = (v_1, v_2) \bullet [(v_1, v_2) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}] =$$

$$= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_1^2 + v_2^2) \cdot a$$

Entonces,

$$cos(\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{Af(P)}}) = \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{Af(P)}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{Af(P)}|} = \frac{(v_1^2 + v_2^2) \cdot a}{(v_1^2 + v_2^2)} = a$$

Hay, por tanto, dos valores posibles para el ángulo (orientado) de los dos vectores, siendo a su coseno. Pero como $a^2 + b^2 = 1$, podremos siempre encontrar un ángulo φ tal que

$$cos(\varphi) = a \ , \ sen(\varphi) = b$$

quedando así determinado el ángulo (orientado) que forman los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{Af(P)}$. Al ángulo φ se le llama *ángulo del giro*. Entonces, la ecuación de un giro de ángulo φ será:

$$(1, x', y') = (1, x, y) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & cos(\varphi) & sen(\varphi) \\ 0 & -sen(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

El ángulo de giro depende de la orientación del sistema de referencia. Concretamente, si $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$ es otro sistema de referencia métrico, y respecto de $\mathcal{B}'$ la matriz de $\overrightarrow{f}$ es

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix},$$

se verifica que $a' = a$ y $b' = b|\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})|$. Por tanto, si φ' es el ángulo $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$ tal que $cos(\varphi') = a'$ y $sen(\ \varphi') = b'$, se tendrá que si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ tienen la misma orientación entonces $\varphi = \varphi'$. En otro caso, $\varphi' = 2\pi - \varphi$.
El caso particular $\varphi = \pi$ es la simetría central, ya estudiada anteriormente. Salvo en el caso de la simetría central, los giros no tienen rectas dobles.

Notas 5.2.6.– Según lo anterior se tiene:

5.2.6.1. El grupo de los movimientos directos está formado por la identidad, las traslaciones y los giros.

5.2.6.2. Los movimientos inversos son las simetrías axiales y las simetrías con deslizamiento.

Clasificación de los movimientos en $\mathbf{R}^2$

Tipo	**Autov. de $\vec{f}$**	**Tipo**	**Ptos. Dobles**	**Nombre del movim.**	**Notación**
1.a.	1, 1	Directo	$\mathbf{R}^2$	Identidad	$id_{\mathbf{R}^2}$
1.b.	1, 1	Directo	$\emptyset$	Traslación de vector $\mathbf{u}$	$\tau_{\mathbf{u}}$
2.a.	1, -1	Inverso	una recta r	Simetría axial	σ_r
2.b.	1, -1	Inverso	$\emptyset$	Simetría axial con deslizamiento	$\sigma_r \cdot \tau_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{u}} \cdot \sigma_r$ $\mathbf{u} \in D(r)$
3	-1, -1	Directo	un punto A	Simetría central	σ_A
4	$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbf{R}$	Directo	un punto A	Giro de centro A y ángulo α	$g_{A,\alpha}$

Nota: El caso 3 es un caso particular de 4 para $\alpha = \pi$.

5.3 Clasificación de los movimientos en el espacio

Procedamos ahora de forma análoga a como se ha hecho en el plano.

Nota 5.3.1.– Para cada isometría φ existe una base ortonormal de V respecto de la cual la matriz de φ es diagonal por cajas, y las cajas son de los tres tipos siguientes:

$$(1)\ ,\ (-1)\ ,\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\ ,\ a^2+b^2=1\ ,\ b\neq 0.$$

Consiguientemente, para cada isometría de V existe una base ortonormal tal que su matriz respecto de ella es de uno de los tipos siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}\ a^2+b^2=1\ ,\ b\neq 0.$$

Nota 5.3.2.– Tomemos un movimiento f tal que la matriz canónica de $\overrightarrow{f}$ sea la identidad. Entonces, de forma análoga a como se vio en el plano, resulta que f es la <u>*identidad*</u> o una <u>*traslación*</u>.

Notas 5.3.3.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1,x',y',z') = (1,x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haremos su estudio según que tenga o no puntos dobles.

5.3.3.1. Supongamos que f tiene puntos dobles. Esto implica automáticamente que $\beta=\gamma=0$ y el conjunto de todos los puntos dobles es el plano $x=\alpha/2$. A cada punto $P=(x,y,z)$ corresponde el punto $f(P)=(\alpha-x,y,z)$ y se verifica:

1. La recta $Pf(P)$ es perpendicular al plano $H: x=\alpha/2$ de puntos dobles y el punto medio de $\overline{Pf(P)}$ pertenece a H. Por eso a f se le llama la <u>*simetría (especular)*</u> de plano H.

2. $f^2=\mathrm{id}_X$.

5.3.3.2. Supongamos que f no tiene puntos dobles, lo que ocurre si y sólo si $(\beta,\gamma)\neq(0,0)$. Es fácil comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que prueba que f es producto conmutativo de una simetría σ respecto de un plano H por una traslación τ de vector $\mathbf{u}$ paralelo a H. Este movimiento recibe el nombre de *simetría especular con deslizamiento*.

La dirección de H está formada por los autovectores asociados al autovalor 1 de $\vec{f}$. Tomando una nueva descomposición de f del mismo tipo, esta propiedad se mantiene (usar el caso anterior). Puesto que cualquier plano paralelo a H distinto de H no es doble para f, la simetría está unívocamente determinada y por tanto, también la traslación.

Notas 5.3.4.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y', z') = (1, x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haremos su estudio según que tenga o no puntos dobles.

5.3.4.1. Supongamos que f tiene puntos dobles. Esto ocurre si y sólo si $\gamma = 0$. Entonces, el conjunto de los puntos dobles de f es la recta $r_0 : x = \alpha/2\ ,\ y = \beta/2$. Cada punto $P = (x, y, z)$ tiene su imagen $f(P) = (\alpha - x, \beta - y, z)$, lo que indica que el punto medio de $\overline{Pf(P)} \in r_0$ y $Pf(P) \perp r_0$. Por eso a f se le llama la *simetría axial* de eje r_0. Se verifica que $f^2 = \mathrm{id}_X$.

5.3.4.2. Supongamos que f no tiene puntos dobles, lo que ocurre si y sólo si $\gamma \neq 0$. Es fácil comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que prueba que f es producto conmutativo de una simetría σ respecto de una recta r_0 por una traslación τ de vector paralelo a r_0. Este movimiento es una *simetría axial con deslizamiento*.

La dirección de r_0 es el conjunto de autovectores asociados al autovalor 1 de $\vec{f}$. Lo mismo ocurriría para otra descomposición de f del mismo tipo. Puesto que cualquier recta paralela a r_0 que no sea r_0 no es doble para f, la simetría está unívocamente determinada y por tanto, también la traslación.

Notas 5.3.5.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y', z') = (1, x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces f tiene un único punto doble, que es $A = (\alpha/2, \beta/2, \gamma/2)$. Cada punto $P = (x, y, z)$ se transforma en $f(P) = (\alpha - x, \beta - y, \gamma - z)$, y así A es el punto medio del segmento $\overline{Pf(P)}$. Por esta razón se llama a f la *simetría central* de centro A.

Notas 5.3.6.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y', z') = (1, x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}\ ,\ a^2 + b^2 = 1\ ,\ b \neq 0.$$

Haremos su estudio según que tenga o no puntos dobles.

5.3.6.1. Supongamos que f tiene puntos dobles. Esto implica automáticamente que $\alpha = 0$ y el conjunto de todos los puntos dobles es la recta r_0 dada por las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (a-1)y & - & bz & = & -\beta \\ by & + & (a-1)z & = & -\gamma \end{array} \right. .$$

Esta recta es de la forma $r_0 : y = \delta_2 \ , \ z = \delta_3$. Un plano H perpendicular a r_0 tiene una ecuación de la forma $H : x = c$ y es, por tanto, invariante por f. Si f_1 es la restricción de f a H, y consideramos sobre H el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{A, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde $A = H \cap r_0$, entonces las ecuaciones de f_1 son de la forma

$$(1, y', z') = (1, y, z) \begin{pmatrix} 1 & \alpha' & \beta' \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix},$$

que son las de un giro de centro A. Nótese que α', β' se calculan en función de δ_2, δ_3, y que el ángulo del giro no depende de H, siempre que se mantenga perpendicular a r_0. Por eso, a este movimiento f se le llama <u>*giro*</u> de eje r_0.

5.3.6.2. Supongamos que f no tiene puntos dobles, lo que ocurre si y sólo si $\alpha \neq 0$. Es fácil comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que prueba que f es producto conmutativo de un giro g de eje r_0 por una traslación τ de vector paralelo a r_0. A este movimiento se le llama <u>*movimiento helicoidal*</u>.

La dirección de r_0 la forman los autovectores asociados al autovalor 1 de $\vec{f}$. Esta propiedad se mantiene es cualquier otra descomposición del mismo tipo de f. Puesto que cualquier recta paralela a r_0 distinta de r_0 no es doble para f, g y τ están unívocamente determinados.

Notas 5.3.7.– Sea f un movimiento de ecuaciones

$$(1, x', y', z') = (1, x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \ , \ a^2 + b^2 = 1.$$

Nótese que siempre se puede suponer que $b \neq 0$, pues si $b = 0$, el movimiento está estudiado antes. El movimiento f tiene un único punto doble, solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} & & x & = & \alpha/2 \\ (a-1)y & - & bz & = & -\beta \\ by & + & (a-1)z & = & -\gamma \end{array} \right. .$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y así f es producto conmutativo de un giro g de eje r_0 por una simetría σ de plano H_0 perpendicular a r_0. Naturalmente, $A = r_0 \cap H_0$ es el punto doble de f. A este movimiento se le llama una <u>*simetría alabeada o rotacional*</u>.
La dirección de la recta r_0 es el conjunto de autovectores del autovalor -1 de $\vec{f}$. Como A es el único punto doble de f, r_0 y H_0 están unívocamente determinados. Por tanto, la descomposición es única.

Notas 5.3.8.– Según lo anterior se tiene:

5.3.8.1. El grupo de los movimientos directos está formado por las traslaciones, las simetrías axiales, los giros, las simetría axiales con deslizamiento y los movimientos helicoidales.

5.3.8.2. Los movimientos inversos son las simetrías respecto de planos y las simetrías con deslizamiento, las simetrías centrales, y las simetrías alabeadas.

Nota 5.3.9.– Ángulo de giro de eje r

Sea f un giro en el espacio de eje r. Observar que f queda unívocamente determinado dando un ángulo α, $0 < \alpha < \pi$, ya que bastaría fijar una dirección adecuada sobre r.

Tomamos $\mathbf{w} \in D(r)^{\perp}$. Sea $\alpha = \angle(\mathbf{w}, \vec{f}(\mathbf{w}))$. *Diremos que el giro f es de ángulo α respecto de la dirección $\mathbf{v} \in D(r)$ si*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \vec{f}(\mathbf{w}) \end{vmatrix} > 0.$$

Notar que en el caso $\Delta < 0$, bastaría tomar $-\mathbf{v}$ como dirección sobre el eje de giro.

La definición anterior no depende de la elección hecha del vector $\mathbf{w}$. En efecto, tomamos otro vector $\mathbf{w}' \in D(r)^{\perp}$. Podemos considerar sin pérdida de generalidad que $|\mathbf{w}| = |\mathbf{w}'|$. La aplicación lineal φ verificando $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\varphi(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$ y $\varphi(\vec{f}(\mathbf{w})) = \vec{f}(\mathbf{w}')$ está unívocamente determinada por estar definida sobre una base. Por tanto se corresponde con la isometría que envía $\mathbf{w}$ a $\mathbf{w}'$ correspondiente a un giro de eje r . Al ser una isometría directa, el signo del determinante Δ no cambia.
Como en el caso del plano, el ángulo de giro depende de la orientación del sistema de referencia.

Clasificación de los movimientos en $\mathbf{R}^3$

Tipo	**Autov. de $\vec{f}$**	**Tipo**	**Ptos. Dobles**	**Nombre del movim.**	**Notación**
1.a.	1, 1, 1	Directo	$\mathbf{R}^3$	Identidad	$id_{\mathbf{R}^3}$
1.b.	1, 1, 1	Directo	$\emptyset$	Traslación de vector $\mathbf{u}$	$\tau_{\mathbf{u}}$
2.a.	1, 1, -1	Inverso	un plano H	Simetría especular	σ_H
2.b.	1, 1, -1	Inverso	$\emptyset$	Simetría especular con deslizamiento	$\sigma_H \cdot \tau_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{u}} \cdot \sigma_H$ $\mathbf{u} \in D(H)$
3.a.	1, -1, -1	Directo	una recta r	Simetría axial	σ_r
3.b.	1, -1, -1	Directo	$\emptyset$	Simetría axial con deslizamiento	$\sigma_r \cdot \tau_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{u}} \cdot \sigma_r$ $\mathbf{u} \in D(r)$
4	-1, -1, -1	Inverso	un punto P	Simetría central	σ_P
5.a.	1 $\lambda_2, \lambda_3 \notin \mathbf{R}$	Directo	una recta r	Giro de eje r y ángulo α	$\rho_{r,\alpha}$
5.b.	1 $\lambda_2, \lambda_3 \notin \mathbf{R}$	Directo	$\emptyset$	Movimiento Helicoidal	$\rho_{r,\alpha} \cdot \tau_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{u}} \cdot \rho_{r,\alpha}$ $\mathbf{u} \in D(r)$
6	-1 $\lambda_2, \lambda_3 \notin \mathbf{R}$	Inverso	un punto P	Simetría rotacional	$\rho_{r,\alpha} \cdot \sigma_H = \sigma_H \cdot \rho_{r,\alpha}$ $H \perp r,\ P = H \cap r$

Nota: Los casos 3.a., 3.b. y 4 son casos particulares de 5.a., 5.b. y 6 respectivamente para $\alpha = \pi$.

5.4 El Teorema de Cartan-Dieudonné

Sea H un hiperplano en el espacio euclídeo n-dimensional $(X, V, +)$. Denotamos por σ_H a la aplicación $\sigma_H : X \to X$ que a cada punto $P \in X$ le asocia el punto P' tal que el punto medio de P y P' es la proyección ortogonal de P sobre H.

Lema 5.4.1.– *σ_H es un movimiento y $\sigma_H\sigma_H = id_X$.*

Demostración: Fijamos un sistema de referencia métrico en el que $H : x_1 = 0$, es decir, $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ con $O \in H$, $\{\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base ortonormal de $D(H)$ y $\mathbf{u}_1 \in D(H)^\perp$ vector unitario.

Dado $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in X$, $s = P + D(H)^\perp$ es la recta de ecuaciones paramétricas

$$x_1 = \alpha_1 + t, \quad x_i = \alpha_i, \quad 2 \leq i \leq n, t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la proyección ortogonal de P sobre H, es el punto

$$P' = s \cap H = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

De ahí obtenemos

$$\sigma_H(P) = (-\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Es decir, σ_H es la aplicación lineal afín de matriz respecto de $\mathcal{R}$

$$\mathcal{M}(\sigma_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, es un movimiento pues $\mathcal{M}(\vec{\sigma_H})$ es una matriz ortogonal.

Además, $\mathcal{M}(\sigma_H)\mathcal{M}(\sigma_H) = I$, luego $\sigma_H\sigma_H = id_X$.

Definición 5.4.2.– *Llamaremos simetría hiperplana a un movimiento del tipo σ_H con H un hiperplano.*

Nota 5.4.3.– Si f es un movimiento, denotaremos por L_f al conjunto de puntos dobles para f. Observar que L_f es una variedad lineal afín por ser el conjunto de soluciones del sistema lineal

$$(1\ \mathbf{x})\mathcal{M}(f) = (1\ \mathbf{x}).$$

En el caso particular $f = \sigma_H$ se tiene que $L_f = H$.

Teorema 5.4.4.– *(*Teorema de Cartan-Dieudonné*) Todo movimiento en el espacio afín euclídeo n-dimensional se descompone en producto de a lo sumo $n+1$ simetrías hiperplanas.*

Demostración: Sea $f : X \to X$ un movimiento.

Si $f = id_X$, entonces $f = \sigma_H\sigma_H$ con H hiperplano arbitrario.

Si $f \neq id_X$, la variedad lineal afín de puntos dobles de f, $L_f \neq X$. Por tanto, existe un punto $P \in X$ tal que $f(P) \neq P$. Sea H_1 el hiperplano mediador de P y $f(P)$.

Se verifica que $L_f \subset H_1$, pues si $Q \in L_f$, por ser f movimiento se tiene

$$d(Q, P) = d(f(Q), f(P)) = d(Q, f(P)),$$

luego Q equidista de P y $f(P)$ por lo que está en H_1.

Sea $f_1 = \sigma_{H_1} f$. Se tiene que f_1 es un movimiento por ser composición de movimientos. Se verifica que

$$L_f \subset L_{f_1}$$

ya que si $Q \in L_f \subset H_1$,

$$\sigma_{H_1} f(Q) = \sigma_{H_1}(Q) = Q.$$

Además, la inclusión es estricta pues $P \notin L_f$ mientras que $P \in L_{f_1}$ porque

$$f_1(P) = \sigma_{H_1}(f(P)) = P.$$

Por tanto, $dimL_f < dimL_{f_1}$.

Si $f_1 = id_X$ tendríamos $id_X = \sigma_{H_1} f$, luego

$$f = \sigma_{H_1}^{-1} = \sigma_{H_1}$$

y habríamos acabado.

Si $f_1 \neq id_X$ podemos repetir el razonamiento hecho con f y construir en nuevo movimiento f_2 a partir de f_1 verificándose

$$dimL_f < dimL_{f_1} < dimL_{f_2}.$$

De esta forma se establece un proceso en el que en cada paso se obtiene un movimiento f_i cuya variedad de puntos dobles es de mayor dimensión que la del paso anterior. Este proceso debe ser finito porque $dimL_{f_i} \leq n$, para cada i. Por tanto, al ser $dimL_f \geq -1$, llegaremos a un paso $r \leq n+1$ en el que

$$f_r = \sigma_{H_r} \cdots \sigma_{H_1} f = id_X.$$

En este momento obtenemos

$$f = \sigma_{H_1}^{-1} \cdots \sigma_{H_r}^{-1} id_X = \sigma_{H_1} \cdots \sigma_{H_r}.$$

Como corolario inmediato se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.4.5.– *El grupo de los movimientos está generado por las simetrías hiperplanas.*

Nota 5.4.6.–

Toda traslación $\tau_{\mathbf{u}}$ es composición de dos simetrías hiperplanas $\tau_{\mathbf{u}} = \sigma_{H_1}\sigma_{H_2}$, con $H_1 || H_2$ hiperplanos perpendiculares a $\mathbf{u}$ y $d(H_1, H_2) = \frac{|\mathbf{u}|}{2}$.

Fijamos un sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ con $O \in H_2$ y $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$. Se tendrá, $\mathbf{u} = (|\mathbf{u}|, 0, \ldots, 0)$. Sean, $H_2 : x_1 = 0$ y $H_1 : x_1 = \frac{|\mathbf{u}|}{2}$. Las simetrías hiperplanas correspondientes tienen como matrices:

$$\mathcal{M}(\sigma_{H_1}) = \begin{pmatrix} 1 & |\mathbf{u}| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{M}(\sigma_{H_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathcal{M}(\sigma_{H_1}\sigma_{H_2}) = \mathcal{M}(\sigma_{H_2})\mathcal{M}(\sigma_{H_1}) = \begin{pmatrix} 1 & |\mathbf{u}| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\tau_{\mathbf{u}} = \sigma_{H_1}\sigma_{H_2}$.

Nota 5.4.7.– Si $n = 2$ y f es un giro, f es composición de dos simetrías axiales cuyos ejes pasan por el centro y forman un ángulo la mitad del ángulo de giro.

Fijamos un sistema de referencia métrico en el que el centro de giro sea el origen O. La matriz de f será

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}, \text{ con } a^2 + b^2 = 1,$$

donde $a = cos\alpha$, $b = sen\alpha$, siendo α el ángulo de giro.

Si $P = (1, 0)$, $f(P) = (a, b)$. Sea m la mediatriz de P y $f(P)$,

$$m : (a-1)x + by = 0.$$

Consideramos $f_1 = \sigma_m f$ que será un movimiento inverso por ser producto de uno inverso por uno directo. Además, tanto O como P son puntos dobles de f_1, luego f_1 es una simetría de eje la recta que une O con P, $m' : y = 0$. Por tanto, $f = \sigma_m \sigma_{m'}$.

Veamos que $\beta = \angle(m, m') = \frac{\alpha}{2}$.

El vector normal a m es $\mathbf{w} = (a-1, b)$ y el vector normal a m' es $\mathbf{w}' = (0, 1)$. Luego,

$$cos\beta = \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}'}{|\mathbf{w}||\mathbf{w}'|} = \frac{b}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2}}.$$

Usando que $a^2 + b^2 = 1$ llegamos a

$$cos\beta = \sqrt{\frac{b^2}{2-2a}} = \sqrt{\frac{1-a^2}{2(1-a)}} = \sqrt{\frac{1+a}{2}} = \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}} = cos\frac{\alpha}{2}.$$

Por tanto, $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Nota 5.4.8.– Si $n = 3$ y f es un giro de eje r, f es composición de dos simetrías planas cuyos planos de simetría contienen a r y forman un ángulo la mitad del ángulo de giro.

Consideramos un sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en el que

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}, \text{ con } a^2 + b^2 = 1.$$

Se tiene que $r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $a = cos\alpha$, $b = sen\alpha$, siendo α el ángulo de giro.

Sea $H : x = 0$. La restricción de f a H, $f|_H$, es un giro de centro O y ángulo α. Respecto del sistema de $\mathcal{R}_H = \{O; \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ se tiene

$$\mathcal{M}(f|_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

Usando la nota anterior, $f|_H = \sigma_{m_1}\sigma_{m_2}$, donde $m_1 : (a-1)y + bz = 0$ y $m_2 : y = 0$ son rectas tales que $\angle(m_1, m_2) = \frac{\alpha}{2}$ dentro del plano H.

Sean H_i los planos que contienen a m_i y r respectivamente,

$$H_1 : (a-1)y + bz = 0 \text{ y } H_2 : y = 0.$$

Se tiene que

$$\mathcal{M}(\sigma_{H_1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \mathcal{M}(\vec{\sigma}_{m_1}) \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{M}(\sigma_{H_2}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \mathcal{M}(\vec{\sigma}_{m_2}) \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathcal{M}(\sigma_{H_1}\sigma_{H_2}) = \mathcal{M}(\sigma_{H_2})\mathcal{M}(\sigma_{H_1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \mathcal{M}(\vec{f|_H}) \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f).$$

Por tanto, $f = \sigma_{H_1}\sigma_{H_2}$. Además, $\angle(H_1, H_2) = \angle(m_1, m_2) = \frac{\alpha}{2}$.

Nota 5.4.9.– Los resultados anteriores permiten obtener el Teorema de Cartan-Diedonné en los casos $n = 2$ ó 3. (Recordar las tablas de clasificación)

5.5 El grupo de las semejanzas

Consideremos un espacio euclídeo $(X, V, +)$, de dimensión n.

Definición 5.5.1.– *Se dice que una aplicación afín $f : X \to X$ es una* semejanza *si existe $\lambda > 0$ tal que para todo par de puntos P y Q del espacio se verifica la siguiente relación:*

$$d(f(P), f(Q)) = \lambda d(P, Q).$$

Diremos que λ es la razón de la semejanza f.

Ejemplos 5.5.2.–

5.5.2.1. Evidentemente los movimientos son semejanzas de razón 1.

5.5.2.2. Sea h una homotecia de centro $O \in X$ y razón λ, como $\overrightarrow{h} = \lambda id_V$, se verifica

$$d(h(P), h(Q)) = |\overrightarrow{h(P)h(Q)}| = |\overrightarrow{h}(\overrightarrow{PQ})| = |\lambda\overrightarrow{PQ}| = |\lambda| d(P, Q),\ \forall P, Q \in X.$$

Luego h es una semejanza de razón $|\lambda|$.
En los siguientes resultados vamos a ver que éstos son, prácticamente, los únicos ejemplos que podemos poner de semejanzas. Probaremos que el conjunto de las semejanzas, con la composición de aplicaciones, es el subgrupo de $GA(X)$ generado por las homotecias y los movimientos.

Lema 5.5.3.– *Toda semejanza que no sea un movimiento se puede escribir como producto de una homotecia por un movimiento.*

Demostración: Dada una semejanza , $f : X \to X$, de razón λ, sea h una homotecia de razón λ y centro $O \in X$ cualquiera. Se tiene:

$$d(h^{-1}(P), h^{-1}(Q)) = \frac{1}{\lambda} d(P, Q)\ \forall P, Q \in X.$$

Luego

$$d(h^{-1}(f(P)), h^{-1}(f(Q))) = \frac{1}{\lambda} d(f(P), f(Q)) = \frac{1}{\lambda}\lambda d(P, Q) = d(P, Q)\ \forall P, Q \in X,$$

por lo que la aplicación $g = h^{-1}f$ es un movimiento. Así:

$$f = hg$$

como queríamos probar. De hecho, hemos probado que toda semejanza se descompone de infinitas maneras como producto de una homotecia por un movimiento, ya que el centro de h puede ser cualquier punto del espacio. Como consecuencia se tiene el siguiente

Teorema 5.5.4.– *El conjunto de las semejanzas, con la composición de aplicaciones, es el subgrupo del grupo afín $GA(X)$, generado por las homotecias y los movimientos. Notaremos por $S(X)$ al grupo de las semejanzas de X.*

Nota 5.5.5.– Las homotecias conservan los ángulos orientados, por lo que las semejanzas conservan los ángulos (no orientados). A las transformaciones que conservan ángulos se les llama *transformaciones conformes*. Así pues, las semejanzas son transformaciones conformes y al grupo $S(X)$ se le llama el *grupo equiforme de X*.

Lema 5.5.6.– *Una afinidad $f \in GA(X)$ tiene un único punto doble si y sólo si la aplicación lineal $\overrightarrow{f}$ no tiene el autovalor 1.*

Demostración: Hemos visto en la proposición 5.1.6 que si f tiene puntos dobles, y es Q uno de ellos, todos los puntos dobles forman la variedad $Q + \ker(\overrightarrow{f} - id_V)$. Entonces f tendrá un único punto doble si y sólo si la dirección de la anterior variedad es $\{\mathbf{0}\}$ y así $\overrightarrow{f} - id_V$ es un automorfismo y, por lo tanto, $\overrightarrow{f}$ no tiene el autovalor 1.

Proposición 5.5.7.– *Toda semejanza, f, que no sea un movimiento, tiene un único punto doble, que llamaremos* centro de semejanza.

DEMOSTRACIÓN: Este resultado es consecuencia directa del lema anterior, ya que, si λ es la razón de la semejanza, los autovalores asociados a ésta no pueden valer 1. Para ver ésto, tomemos una homotecia h de razón λ, se tiene $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h}\,\overrightarrow{g}$, donde $\overrightarrow{g}$ es una isometría. Sea $\mathbf{u}$, si existe, un autovector de $\overrightarrow{f}$ de autovalor μ, es decir $\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) = \mu\mathbf{u}$. Por otro lado, $\overrightarrow{f}(\mathbf{u}) = \overrightarrow{h}\,\overrightarrow{g}(\mathbf{u}) = \lambda\overrightarrow{g}(\mathbf{u})$, y, por ser $\overrightarrow{g}$ isometría, $|\mathbf{u}| = |\overrightarrow{g}(\mathbf{u})|$, luego, $\mu = \pm\lambda$. Pero λ no puede ser ni 1 ni -1. Luego $\overrightarrow{f}$ no tiene el autovalor 1.

5.6 Clasificación de las semejanzas

Nota 5.6.1.– Ya hemos visto que toda semejanza f, de centro O y razón $\lambda \neq 1$, se puede descomponer como producto de cualquier homotecia h, de razón λ, por un movimiento $g = h^{-1}f$. Por ser $\overrightarrow{h} = \lambda id_V$ para toda homotecia h, es evidente que $\overrightarrow{g}$ no depende del centro de h, lo que nos permite dar una primera clasificación de las semejanzas, según $\overrightarrow{g}$ sea directa o inversa.

Definición 5.6.2.– *Sea $f \in S(X) \setminus Mo(X)$ de razón λ, sea $h \in H(X)$ también de razón λ. Diremos que $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{h}^{-1}\overrightarrow{f}$ es la isometría asociada a f.*

Definición 5.6.3.– *Sea $f : X \to X$ una semejanza de razón $\lambda > 0$. Diremos que f es una semejanza directa si su isometría asociada es directa, en caso contrario diremos que f es una semejanza inversa. Notaremos por $S_+(X)$ al conjunto de las semejanzas directas, que es grupo, y por $S_-(X)$ al de las inversas.*

5.6.1 Semejanzas en el plano

Consideremos el plano afín euclídeo.

Nota 5.6.4.– Como en el plano las matrices de las isometrías, en cualquier base ortonormal, son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \mp b & \pm a \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1,$$

y la parte vectorial de las homotecias es λid_V, resulta que las matrices de las semejanzas son de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda a & \lambda b \\ 0 & \mp\lambda b & \pm\lambda a \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1 \text{ y } \lambda > 0.$$

Ejemplo 5.6.5.– Es evidente que las traslaciones y los giros son semejanzas directas.

Teorema 5.6.6.– *Toda semejanza directa que no sea un movimiento se puede escribir como producto conmutativo de un giro por una homotecia de igual centro. (Se consideran la identidad y la simetría central como giros de ángulos 0 y π respectivamente)*
A esta transformación la llamaremos <u>semejanza espiral</u> o <u>giro con dilatación</u>.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in S(X)_+$, $f \notin Mo(X)$, de centro O y razón λ. Entonces, eligiendo h de centro O y razón λ, resulta:

$$f = hg = gh$$

donde g es un movimiento directo que también deja fijo el punto O, por lo que g es un giro de centro O, como queríamos probar.

Notas 5.6.7.–

5.6.7.1. Podemos considerar los giros como semejanzas espirales de razón 1.

5.6.7.2. Si $f \in S(X)_+$ no es homotecia ni traslación, $\overrightarrow{f}$ no tiene direcciones dobles y, por tanto, f no tiene rectas dobles.

Nota 5.6.8.– Las semejanzas espirales están unívocamente determinadas por el centro, el ángulo y la razón.

Ejemplo 5.6.9.– Como ejemplo de semejanzas inversas podemos poner las simetrías axiales y las simetrías con deslizamiento.

Teorema 5.6.10.– *Toda semejanza inversa que no sea movimiento se puede escribir como producto conmutativo de una homotecia por una simetría axial cuyo eje pasa por el centro de aquélla. (Se consideran la identidad y la simetría axial como giros de ángulos 0 y π respectivamente)*
Llamaremos a estas transformaciones <u>*simetrías con dilatación*</u>.

Demostración: Sea $f \in S(X)_-$, $f \notin Mo(X)$, de centro O y razón λ. Al igual que en el caso de los giros con dilatación, podemos suponer que $f = hg = gh$, siendo h una homotecia de centro O y razón λ, y g un movimiento inverso con, al menos, un punto doble O, es decir, una simetría axial cuyo eje pasa por el centro de la semejanza.

Nota 5.6.11.– Toda simetría con dilatacion está unívocamente determinada por el centro, la razón y el eje de simetría.

Nota 5.6.12.– Las simetrías con dilatación tienen dos rectas dobles, el eje de la simetría y la perpendicular al eje que pasa por el centro de semejanza.

5.6.2 Semejanzas en el espacio

Consideremos ahora el espacio afín euclídeo tridimensional.

Ejemplo 5.6.13.– Las traslaciones, los giros y los movimientos helicoidales son semejanzas directas de razón 1. Asimismo, las simetrías especulares, especulares con deslizamiento y rotacionales son semejanzas inversas de razón 1.

Teorema 5.6.14.– *Toda semejanza de razón λ, que no sea un movimiento, se puede escribir como producto conmutativo de un giro por una homotecia de centro sobre el eje de giro y razón $\pm\lambda$.*

Demostración: Sea $f : X \to X$, $f \in S(X)$, $f \notin Mo(X)$ de centro O y razón λ. Entonces, eligiendo h de centro O y razón λ, resulta:

$$f = hg = gh$$

donde g es un movimiento que también deja fijo el punto O.
Si f es una semejanza directa, g es un movimiento directo con un punto fijo O. Así pues, g es un giro cuyo eje pasa por O.
Si f es una semejanza inversa, g es un movimiento inverso con un punto fijo O. Podemos hacer una interpretación geométrica de f de la forma siguiente: Consideremos la homotecia h' de centro O y razón $-\lambda$. Se tiene: $h' = hs$, donde s es la simetría central de centro O. Por tanto:

$$f = hg = hssg = h'g'$$

donde $g' = sg$ es un movimiento directo con un punto fijo O. Así, pues, g' es un giro cuyo eje pasa por O y f se obtiene componiendo g' con una homotecia de razón negativa $-\lambda$.

5.7 Ejercicios

Ejercicio 1.–En el plano afín euclídeo, X, se consideran la recta r y un vector $\mathbf{u} \notin D(r)$. Sea $f : X \to X$, la aplicación del plano tal que a cada punto $P \in X$ le asocia el punto $f(P) = P + \lambda\overrightarrow{PP'}$, donde $\lambda \in \mathbf{R}$ y $P' = r \cap (P + \langle \mathbf{u} \rangle)$. Se pide:

1.- Probar que f es aplicación afín. ¿Para qué valores de λ es afinidad?
2.- Hallar los puntos, direcciones y rectas dobles de f.
3.- En los apartados siguientes se considerará fijado un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}$. Dar la ecuación de f si $r : x + y - 2 = 0$ y $\mathbf{u} = (1, 1)$. ¿Para qué valores de λ es f movimiento?
4.- Sea la recta $s : 2x + 2y - 1 = 0$ y sea T un triángulo que tiene un lado sobre r y el vértice opuesto sobre s. Hallar el lugar geométrico de los baricentros de $f(T)$ para $\lambda = 2$.
Ejercicio 2.–Se considera el plano afín X y en él un sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Se pide:

1. Hallar la matriz, respecto de $\mathcal{R}$, de todas las aplicaciones afines que dejan invariantes los puntos $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ y la dirección del vector $\mathbf{w}$= $(1, 1)$.

2. Entre todas las aplicaciones afines anteriores hay una que no es afinidad: hallar su ecuación y comprobar que se trata de una proyección paralela del plano sobre la recta AB paralelamente al vector $\mathbf{w}$.

3. Entre todas las afinidades anteriores hay un movimiento distinto de la identidad: clasificarlo y hallar sus elementos geométricos.

Ejercicio 3.–Sea M el conjunto de todos los movimientos del plano que dejan invariante la recta $r : x = 0$.
1) Determinar los movimientos de M. Calcular su expresión matricial general.
2) Sea s la recta $y = 0$, y O el punto (0,0). Si f es un movimiento tal que $f(s) = r$, ¿es cierto que $f(O) = O$? ¿por qué?
3) Calcular todos los movimientos f tales que $f(s) = r$ y además $f(O) = O$. (hay 4)
4) Calcular todos los movimientos f tales que $f(s) = r$.
Ejercicio 4.–Clasificar y hallar los elementos invariantes de los movimientos cuyas matrices se dan a continuación

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 20/9 & 5/9 & -4/9 \\ 0 & 4/9 & -8/9 & 1/9 \\ 0 & 4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 0 & 7/9 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 16/19 & 92/19 & -18/19 \\ 0 & -18/19 & 1/19 & 6/19 \\ 0 & 1/19 & -18/19 & 6/19 \\ 0 & 6/19 & 6/19 & 17/19 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & 38/5 & -1/5 & -3 \\ 0 & -11/15 & 2/15 & -2/3 \\ 0 & 2/15 & -14/15 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 1 & -26/9 & 16/9 & -2/9 \\ 0 & -4/9 & -1/9 & 8/9 \\ 0 & -7/9 & -4/9 & -4/9 \\ 0 & -4/9 & 8/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.–En el espacio euclídeo tridimensional, sea f un movimiento. Estudiar las rectas y planos dobles de f según el tipo de movimiento que sea f.
Ejercicio 6.–Para las tres primeras cuestiones se considerará fijado un espacio afín $(X, V, +)$ de dimensión $n > 1$ sobre un cuerpo k. Para cada una de ellas, se trata de decir si es verdadero o falso el enunciado. Para que una cuestión se considere bien contestada deberá contener una respuesta y una justificación.

Para la última cuestión se deberá tener en cuenta que los elementos de un movimiento son: los planos, ejes o centros de simetría; los planos o ejes, y los vectores desplazamiento, en las simetrías con deslizamiento; los vectores de las traslaciones; los ejes y ángulos de giros (y los vectores desplazamiento en el caso de movimientos helicoidales); y los ejes de giro y planos de simetría en las simetrías con giro (simetrías alabeadas).
1). Dada una recta de X, se puede dar el caso de que se cruce con un hiperplano, si la dimensión n es suficientemente alta.
2). Sean H un hiperplano y r una recta secante a él. Las rectas secantes a r y paralelas a H rellenan el espacio (esto es, por cada punto del espacio pasa una de ellas).

3) Se toma $n = 4$, dos variedades lineales L_2, L_2' de dimensión 2 tales que $L_2 + L_2' = X$ y $L_2 \cap L_2'$ es un punto, y se designa por f a la proyección sobre L_2 paralelamente a L_2'. Si r es una recta secante a L_2', entonces $\dim f^{-1}f(r) = 3$.
4). En el espacio euclídeo tridimensional, con coordenadas (x, y, z), se consideran las rectas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 3y + 3z + 1 & = & 0 \\ x + 6y - 3z - 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$r_2 = (3, 4, 1) + < (0, 1, -1) > .$$

Probar que se cruzan y calcular la perpendicular común, dando su dirección y sus pies en ambas rectas.
5). Se da el movimiento f del espacio euclídeo tridimensional cuyas ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} 1 & -4/3 & -14/3 & -4/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Decir de qué tipo es y calcular sus elementos.
Ejercicio 7.–Responder a las siguientes cuestiones de geometría del espacio:
1). Escribir la lista completa de las posiciones relativas de dos planos en un espacio de dimensión 5.
2). En el espacio tridimensional, hallar la ecuación de la simetría σ_3 de plano $x + y - z = 0$.
3). Hallar la ecuación del movimiento $f = \sigma_3\sigma_2\sigma_1$, donde σ_1 es la simetría de plano $x = 0$, y σ_2 la de plano $y = 0$.
4). Decir qué tipo de movimiento es f y calcular sus elementos.
Ejercicio 8.–

1. Clasificar y descomponer como producto de simetrías axiales el movimiento de $\mathbb{R}^2$ de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Probar que el movimiento de $\mathbb{R}^3$ de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puede escribirse como producto de dos simetrías planas.

Ejercicio 9.–En el espacio afín euclídeo $(X, V, +)$ sobre $\mathbb{R}$, de dimensión 3, fijado un sistema de referencia métrico, se da la transformación $f : X \to X$, definida por:

$$f(x, y, z) = (z, x, y).$$

Se pide:
1.- Demostrar que f es un movimiento.
2.- Escribir sus ecuaciones, estudiar de qué tipo es y determinar sus elementos geométricos.
Ejercicio 10.–En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se da la transformación:

$$f(x, y, z) = (\frac{x - 2y + 2z}{3} + 4, \frac{y + 2z - 2x}{3} + 4, \frac{z + 2x + 2y}{3})$$

Determinar si es un movimiento y de qué tipo, estudiando sus elementos geométricos.
Ejercicio 11.–Clasificar las siguientes semejanzas dando sus elementos:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1996 \\ 0 & -1996 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12.–Sea $T = ABC$ un triángulo, sea T' el triángulo de vértices A', punto medio de $\overline{BC}$, B', punto medio de $\overline{AC}$ y C', punto medio de $\overline{AB}$. Probar que T y T' son semejantes y encontrar todas las semejanzas que llevan T en T', distinguiendo los casos en que T es escaleno, isósceles o equilátero.
Ejercicio 13.–Sea $T = ABC$ un triángulo rectángulo en A, sea A' el pie de la altura desde A. Probar que los triángulos T, $T' = ABA'$ y $T'' = ACA'$ son semejantes. Hallar todas las semejanzas que transforman T en T' y T' en T''.
Ejercicio 14.–Sean los puntos $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$, $D = (0,1)$, $E = (2,4)$ y $F = (0,4)$. Hallar todas las semejanzas que transforman el rectángulo $L = ABCD$ en $L' = ABEF$.
Ejercicio 15.–*Nota: Las semejanzas serán descritas por sus elementos geométricos.* Se consideran los puntos:

$$A = (0,0),\ B = (1,0),\ C = (2,1),\ D = (1,1),\ E = (3,1),\ F = (1,3),\ G = (-1,3)$$

sean L y L' las figuras definidas por los romboides $ABCD$ y $DEFG$. Se pide:
1.- Hallar razonadamente todos los movimientos que dejan invariante la figura L.
2.- Hallar razonadamente el conjunto de todas las semejanzas que transforman L en L'.