Capítulo 2

Espacios euclídeos

2.1 Definición y propiedades

Definición 2.1.1 Llamamos espacio euclídeo al espacio afín $(X, V, +)$ donde V es un espacio vectorial euclídeo. Es decir,

- V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, que supondremos de dimensión finita.
- Sobre V se ha definido un producto escalar.

Definición 2.1.2 Dado el sistema de referencia del espacio euclídeo X, $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, donde $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de V, decimos que $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia métrico si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V ($\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$).

Definición 2.1.3 Sea $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$. Diremos que A es una matriz ortogonal si verifica que $AA^t = I$.

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene que

$$\det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2 = 1,$$

de donde deducimos que

1. $\det(A) \neq 0$ lo que implica que A es invertible y, por tanto, que $A^{-1} = A^t$,
2. $\det(A) = \pm 1$, lo que nos permite clasificar las matrices ortogonales. En efecto, sean

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(n) &= \{A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}, \\
\mathcal{O}_+(n) &= \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = 1\} \subset \mathcal{O}(n), \\
\mathcal{O}_-(n) &= \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = -1\} \subset \mathcal{O}(n).
\end{aligned}$$

   Es fácilmente comprobable que

   - $\big(\mathcal{O}(n), \cdot\big)$ es un grupo multiplicativo,
   - $\big(\mathcal{O}_+(n), \cdot\big)$ es un subgrupo de $\mathcal{O}(n)$.

Proposición 2.1.1 Sean $(V, \bullet)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ortonormales de V. Se verifica que $\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ (resp. $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$) es una matriz ortogonal.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA · UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración En efecto, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ dos bases ortonormales de V y $\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = A = (a_{ij})$ la matriz de las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$ y sea $B = AA^t$.

El elemento que ocupa la posición (i, j) de B será de la forma

$$b_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})^t = \mathbf{u}'_i \bullet \mathbf{u}'_j = \delta_{ij}$$

y, en consecuencia,

$$B = AA^t = I \Longrightarrow A \in \mathcal{O}(n).$$

Consecuencia Si $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$ son dos sistemas de referencia métricos y

$$(1, \mathbf{x}) = (1, \mathbf{x}') \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{a} \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$$

es la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia, se verifica que A es una matriz ortogonal.

Baste recordar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases ortonormales de V y que $A = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Definición 2.1.4 Dados los sistemas de referencia métricos $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$, se dice que tienen la misma orientación si se verifica que $\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \in \mathcal{O}_+(n)$. Si no es así, se dice que tienen distinta orientación.

2.2 Distancia entre variedades

Nota En lo que sigue $(X, V, +)$ es un espacio euclídeo de dimensión n y $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ es un sistema de referencia métrico respecto del cual se darán las coordenadas de los puntos y las ecuaciones de las variedades.

Definición 2.2.1 Dados los puntos $P, Q \in X$ llamamos distancia de P a Q y la notaremos $\mathrm{d}(P, Q)$ al módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$. Simbólicamente,

$$\mathrm{d}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

De la definición se deduce que si $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$,

$$\mathrm{d}(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \ldots + (q_n - p_n)^2}.$$

Proposición 2.2.1 (PROPIEDADES INMEDIATAS) Sean $P, Q, R \in X$. Se verifican las siguientes propiedades cuyas demostraciones son consecuencia inmediata de las correspondientes propiedades dadas para el módulo de un vector.

d.1) $\mathrm{d}(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$.

d.2) $\mathrm{d}(P, Q) = \mathrm{d}(Q, P)$.

d.3) $\mathrm{d}(P, Q) \leq \mathrm{d}(P, R) + \mathrm{d}(R, Q)$.

Proposición 2.2.2 (TEOREMA DE PITÁGORAS) Sean $P, Q, R \in X$,

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR} \Longrightarrow \mathrm{d}(Q, R)^2 = \mathrm{d}(P, Q)^2 + \mathrm{d}(P, R)^2.$$

Demostración Utilizando la propiedad p.3) de la proposición 1.1.1, se tiene:

$$\overrightarrow{QR}^2 = (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR})^2 = (-\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})^2 = \overrightarrow{PQ}^2 + \overrightarrow{PR}^2$$

$$\Downarrow$$

$$|\overrightarrow{QR}|^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}(Q,R)^2 = \mathrm{d}(P,Q)^2 + \mathrm{d}(P,R)^2.$$

Proposición 2.2.3 Sean A y B dos puntos distintos de X y M su punto medio. Sea

$$\mathcal{L} = \{P \in X \mid \mathrm{d}(P,A) = \mathrm{d}(P,B)\}.$$

Se verifica que $\mathcal{L}$ es el hiperplano

$$H = M + \left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle^{\perp}.$$

Demostración Obviamente H es un hiperplano ya que

$$\dim(H) = \dim(D(H)) = \dim\big(\langle \overrightarrow{AB} \rangle^{\perp}\big) = n - \dim\big(\langle \overrightarrow{AB} \rangle\big) = n - 1.$$

Por otra parte.

$P \in \mathcal{L} \iff \mathrm{d}(P,A) = \mathrm{d}(P,B) \iff \overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{PB}^2 \iff (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA})^2 = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB})^2 \iff 2\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{MB} \iff \overrightarrow{PM} \bullet (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \iff \overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \iff \overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{PM} \in \left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle^{\perp} \iff P \in H.$

Definición 2.2.2 El hiperplano H, calculado en la proposición anterior, recibe el nombre de hiperplano mediador del segmento $\overline{AB}$. En particular,

- si $n = 2$, H es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$,
- si $n = 3$, H recibe el nombre de plano mediador de $\overline{AB}$.

Ejercicio En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y respecto de una referencia métrica, se dan los puntos $A = (1,-1,2)$ y $B = (3,-1,4)$. Calcular el plano mediador del segmento $\overline{AB}$.

Solución

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es

$$M = (2,0,3).$$

Como $\overrightarrow{AB} = (2,2,2)$, se tiene que

$$H = (2,0,3) + \langle (1,1,1) \rangle^{\perp}.$$

Calculemos $D(H)$.

$$D(H) \equiv (1,1,1) \bullet (x,y,z) = 0 \Longrightarrow D(H) \equiv x + y + z = 0,$$

de donde la ecuación de H será de la forma,

$$H \equiv x + y + z = b.$$

Como $M \in H$, se tiene que $b = 5$, luego

$$H \equiv x + y + z = 5.$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA · UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Definición 2.2.3 (DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA VARIEDAD) Sea P un punto y $L \neq \emptyset$ una variedad lineal afín de X. La distancia de P a L se define mediante la siguiente igualdad:

$$\mathrm{d}(P, L) = \inf\{\mathrm{d}(P, Q) \mid Q \in L\}.$$

Obviamente, si $P \in L$, se deduce que $\mathrm{d}(P, L) = 0$.

Proposición 2.2.4 Sea P un punto y $L \neq \emptyset$ una variedad lineal afín de X. La variedad

$$L' = P + D(L)^{\perp},$$

verifica:

1. $L' \cap L = \{Q\}$ (L' corta a L en un único punto Q).
2. $\mathrm{d}(P, L) = \mathrm{d}(P, Q)$.

Demostración

1. Probemos en primer lugar que $L' \cap L \neq \emptyset$. En efecto, Si $L' \cap L = \emptyset$, se tendría que

$$\dim(L' + L) = \dim(L') + \dim(L) + 1 - \dim(D(L') \cap D(L))$$

y como $D(L') \cap D(L)) = \{\mathbf{0}\}$ por ser variedades ortogonales se tiene que

$$\dim(L' + L) = n - \dim(L) + \dim(L) + 1 = n + 1,$$

lo cual es absurdo ya que $L' + L \subset X$.

Puesto que $L' \cap L \neq \emptyset$ y teniendo en cuenta que en este caso $V = D(L') \oplus D(L)$ y que, por tanto

$$\dim(L' + L) = \dim(D(L' + L)) = \dim(D(L') + D(L)) = n,$$

se tiene que

$$\dim(L' \cap L) = \dim(L') + \dim(L) - n = n - \dim(L) + \dim(L) - n = 0,$$

de donde $L' \cap L$ se cortan en un punto.

2. Sea $L' \cap L = Q$ y $R \in L$ un punto cualquiera de L. Se tiene que

$$\overrightarrow{QP} \in D(L'), \quad \overrightarrow{QR} \in D(L) \Longrightarrow \overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{QR}.$$

Aplicando pues el teorema de pitágoras (ver proposición 2.2.2),

$$\mathrm{d}(P, R)^2 = \mathrm{d}(Q, P)^2 + \mathrm{d}(Q, R)^2 \Longrightarrow \mathrm{d}(P, R)^2 \geq \mathrm{d}(P, Q)^2 \Longrightarrow \mathrm{d}(P, R) \geq \mathrm{d}(P, Q).$$

Proposición 2.2.5 Como caso particular de la proposición anterior, si

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in X$$

y la variedad dada es el hiperplano

$$H \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0,$$

se verifica que

$$\mathrm{d}(P, H) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{2.1}$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración Recordemos que, en este caso,

$$D(H)^{\perp} = \langle (a_1, a_2, \ldots, a_n) \rangle$$

y que, por tanto,

$$L = P + \langle (a_1, a_2, \ldots, a_n) \rangle,$$

tomando $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D(H)^{\perp}$ y, siendo

$$Q = L \cap H = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

se tiene que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{PQ} = \lambda \mathbf{a}$$

igualdad de la que deducimos:
Por una parte, que

$$\mathrm{d}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\lambda||\mathbf{a}|. \tag{2.2}$$

Pero, por otra, que

$$q_i = p_i + \lambda a_i, \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Como $Q \in H$, sustituyendo los valores de 2.3 en la ecuación de H, se tiene:

$$a_1(p_1 + \lambda a_1) + a_2(p_2 + \lambda a_2) + \ldots + a_n(p_n + \lambda a_n) + a_0 = 0,$$

de donde

$$(a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n + a_0) + \lambda |\mathbf{a}|^2 = 0.$$

Es decir,

$$|\lambda| = \frac{|a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n + a_0|}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Sustituyendo este valor en 2.2, se tiene que

$$\mathrm{d}(P, H) = \mathrm{d}(P, Q) = \frac{|a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n + a_0|}{|\mathbf{a}|}$$

que es la fórmula 2.1

Definición 2.2.4 (VARIEDADES PERPENDICULARES) Sean L_1 y L_2 variedades lineales no vacías de X, diremos que son perpendiculares ($L_1 \perp L_2$) si se verifica una de las siguientes condiciones

$$D(L_1) \subset D(L_2)^{\perp} \quad \text{o} \quad D(L_1) \supset D(L_2)^{\perp}.$$

Definición 2.2.5 (DISTANCIA ENTRE DOS VARIEDADES) Sean L_1 y L_2 variedades lineales no vacías de X. Se define la distancia entre ambas mediante la siguiente igualdad:

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) = \inf\{\mathrm{d}(P_1, P_2) \mid P_1 \in L_1, \ P_2 \in L_2\}.$$

Nótese que la definición de distancia responde al concepto intuitivo del "camino más corto"entre las dos variedades.
Es obvio que si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, $\mathrm{d}(L_1, L_2) = 0$.

Lema 2.2.1 Sean L_1 y L_2 variedades lineales no vacías de X,

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \Longrightarrow \dim\big(D(L_1) + D(L_2)\big) \leq n - 1.$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración Procedamos al absurdo. Supongamos que $\dim\big(D(L_1) + D(L_2)\big) = n$. De la fórmula de la dimensión

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(D(L_1) \cap D(L_2)) + 1,$$

deducimos que

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(D(L_1)) + \dim(D(L_2)) - \dim(D(L_1) \cap D(L_2)) + 1,$$

de donde

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(D(L_1) + D(L_2)) + 1 \overset{p.h.}{=} n + 1$$

lo cual es absurdo ya que $L_1 + L_2 \subset X$.

Proposición 2.2.6 Sean L_1 y L_2 variedades lineales no vacías de X tales que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Existe una variedad lineal afín L que verifica las siguientes condiciones:

1. $\dim(L) \geq 1$.
2. $L \perp L_1$ y $L \perp L_2$.
3. $L \cap L_1 = \{P_1\}$, $L \cap L_2 = \{P_2\}$ (L corta, respectivamente, a L_1 y a L_2 en un único punto, P_1 y P_2).
4. $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(P_1, P_2)$.
5. Los puntos P_1 y P_2 son únicos si y sólo si L_1 y L_2 se cruzan.

Demostración Consideremos una variedad L tal que

$$D(L) = \big(D(L_1) + D(L_2)\big)^{\perp} = D(L_1)^{\perp} \cap D(L_2)^{\perp} \tag{2.4}$$

Por la definición de $D(L)$, se tiene que

$$V = \big(D(L_1) + D(L_2)\big) \oplus D(L)$$

y, por consiguiente,

$$V = \big(D(L_1) + D(L_2)\big) + D(L) \tag{2.5}$$

$$\big(D(L_1) + D(L_2)\big) \cap D(L) = \{\mathbf{0}\} \tag{2.6}$$

1. $\dim(L) = \dim(D(L)) = n - \dim(D(L_1) + D(L_2)) \overset{\text{lema}}{\geq} n - (n-1) \geq 1$.
2. Como $D(L) \overset{2.4}{=} D(L_1)^{\perp} \cap D(L_2)^{\perp}$, se tiene que

$$\big(D(L) \subset D(L_1)^{\perp}\big) \wedge \big(D(L) \subset D(L_2)^{\perp}\big) \Longrightarrow (L \perp L_1) \wedge (L \perp L_2).$$

3. Probemos en primer lugar que $L \cap L_1 \neq \emptyset$, $L \cap L_2 \neq \emptyset$. En efecto, sean Q_1 y Q_2 dos puntos cualesquiera tomados, respectivamente, en L_1 y L_2. Por 2.5 se tiene que

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}, \quad (\mathbf{u}_1 \in D(L_1),\ \mathbf{u}_2 \in D(L_2),\ \mathbf{v} \in D(L))$$

y, por tanto,

$$Q_2 = Q_1 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}. \tag{2.7}$$

Consideremos los puntos

$$P_1 = Q_1 + \mathbf{u}_1, \qquad P_2 = Q_2 - \mathbf{u}_2$$

y la variedad

$$L = P_1 + D(L).$$

Se tiene que:

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

- $\overrightarrow{Q_1P_1} = \mathbf{u}_1 \in D(L_1) \Longrightarrow P_1 \in L_1$ pero, por la definición de L, $P_1 \in L$ y, por tanto,
$$P_1 \in L \cap L_1 \Longrightarrow L \cap L_1 \neq \emptyset.$$
- $\overrightarrow{Q_2P_2} = -\mathbf{u}_2 \in D(L_2) \Longrightarrow P_2 \in L_2$.
Pero, por otra parte,
$P_2 = Q_2 - \mathbf{u}_2 \overset{2.7}{=} Q_1 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v} - \mathbf{u}_2 = P_1 + \mathbf{v} \Longrightarrow P_2 \in L$. Luego, igualmente,
$$P_2 \in L \cap L_2 \Longrightarrow L \cap L_2 \neq \emptyset.$$

Veamos ahora que $L \cap L_1 = P_1$ y $L \cap L_2 = P_2$. En efecto,
$L \cap L_1 \neq \emptyset \Longrightarrow D(L \cap L_1) = D(L) \cap D(L_1) \overset{2.6}{=} (D(L_1)^\perp \cap D(L_2)^\perp) \cap D(L_1) = \{\mathbf{0}\}$,
de donde se deduce que
$$\dim(L \cap L_1) = 0 \Longrightarrow L \cap L_1 = P_1.$$
Análogamente se demuestra que $L \cap L_2 = P_2$.

4. Vamos a probar $\forall R_1 \in L_1$ y $\forall R_2 \in L_2$,
$$\mathrm{d}(R_1, R_2) \geq \mathrm{d}(P_1, P_2).$$
En efecto,
$$\overrightarrow{R_1R_2} = \overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_1R_2} = \overrightarrow{R_1P_1} + (\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2R_2}) = (\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2}) + \overrightarrow{P_1P_2}.$$
Pero
$$\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2} \in D(L_1) + D(L_2), \quad \overrightarrow{P_1P_2} \in D(L),$$
luego $\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$. Por consiguiente,
$$\overrightarrow{R_1R_2}^2 = (\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2})^2 + \overrightarrow{P_1P_2}^2,$$
de donde
$$|\overrightarrow{R_1R_2}|^2 \geq |\overrightarrow{P_1P_2}|^2 \Longrightarrow \mathrm{d}(R_1, R_2) \geq \mathrm{d}(P_1, P_2).$$

5. $\boxed{\Longrightarrow}$ (Si P_1 y P_2 son únicos puntos que verifican la condición 4), entonces L_1 y L_2 se cruzan.)
Procedamos al absurdo. Si L_1 y L_2 no se cruzasen sería $D(L_1) \cap D(L_2) \neq \{\mathbf{0}\}$ y podríamos tomar $\mathbf{v} \in D(L_1) \cap D(L_2)$ tal que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Consideremos los puntos
$$R_1 = P_1 + \mathbf{v}, \quad R_2 = P_2 + \mathbf{v}.$$
Se tiene, entonces, que
$$\overrightarrow{P_1R_1} = \overrightarrow{P_2R_2} = \mathbf{v}.$$
Aplicando el teorema de Tales paralelo, se tiene que
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{R_1R_2} \Longrightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{R_1R_2}| \Longrightarrow \mathrm{d}(P_1, P_2) = \mathrm{d}(R_1, R_2)$$
y, por tanto, P_1 y P_2 no serían los únicos verificando la condición 4), en contra de la hipótesis.

$\boxed{\Longleftarrow}$ (Si L_1 y L_2 se cruzan, entonces P_1 y P_2 los únicos puntos que verifican la condición 4).)
En efecto, sean $R_1 \in L_1$ y $R_2 \in L_2$ tales que $\mathrm{d}(R_1, R_2) = \mathrm{d}(P_1, P_2)$. Si esto fuese así, se verificaría que
$$\overrightarrow{R_1R_2}^2 = \overrightarrow{P_1P_2}^2 \Longrightarrow \left((\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2}) + \overrightarrow{P_1P_2}\right)^2 = \overrightarrow{P_1P_2}^2.$$
Pero
$$\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2} \in D(L_1) + D(L_2), \quad \overrightarrow{P_1P_2} \in D(L),$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

luego $\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$. Por consiguiente,

$$(\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2})^2 + \overrightarrow{P_1P_2}^2 = \overrightarrow{P_1P_2}^2,$$

de donde

$$(\overrightarrow{R_1P_1} + \overrightarrow{P_2R_2})^2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{P_1R_1} = \overrightarrow{P_2R_2},$$

Ahora bien, como

$$\overrightarrow{P_1R_1} \in D(L_1),\ \overrightarrow{P_2R_2} \in D(L_2) \Longrightarrow \overrightarrow{P_1R_1},\ \overrightarrow{P_2R_2} \in D(L_1) \cap D(L_2)) = \{\mathbf{0}\},$$

de donde

$$\overrightarrow{P_1R_1} = \overrightarrow{P_2R_2} = \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow R_1 = P_1,\ R_2 = P_2.$$

Proposición 2.2.7 L es la mayor variedad (en el orden de la inclusión) que verifica las condiciones 1, 2, y 3 de la proposición anterior.

Demostración En efecto, supongamos que la variedad $L' = P_1 + D(L')$ verifica las condiciones 1, 2 y 3 de la proposición anterior. Tenemos que probar que $D(L') \subset D(L)$
Recordemos, por una parte, que

$$D(L) = (D(L_1) + D(L_2))^\perp = D(L_1)^\perp \cap D(L_2)^\perp$$

y, por otra, que

$$(L' \perp L_1) \wedge (L' \perp L_2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \big(D(L') \subset D(L_1)^\perp\big) \vee \big(D(L') \supsetneq D(L_1)^\perp\big) \\ \wedge \\ \big(D(L') \subset D(L_2)^\perp\big) \vee \big(D(L') \supsetneq D(L_2)^\perp\big) \end{array} \right.$$

Pueden darse, en principio, cuatro casos:

1. $\big(D(L') \subset D(L_1)^\perp\big) \wedge \big(D(L') \subset D(L_2)^\perp\big) \Longrightarrow D(L') \subset D(L_1)^\perp \cap D(L_2)^\perp = D(L)$, con lo cual $L' \subset L$

2. Los restantes casos incluirían una de las condiciones $D(L') \supsetneq D(L_1)^\perp$, $D(L') \supsetneq D(L_2)^\perp$ o ambas. Veamos que esto no es posible. En efecto,

$$D(L') \supsetneq D(L_1)^\perp \Longrightarrow \dim(D(L') > n - \dim(D(L_1)) \Longrightarrow \dim(L') + \dim(L_1) > n. \qquad (2.8)$$

Por otra parte, como $\dim(L' \cap L_1) = 0$ por la condición 3, aplicando la fórmula de la dimensión deduciríamos que

$$\dim(L' + L_1) = \dim(L') + \dim(L_1) - \dim(L' \cap L_1) \overset{2.8}{>} n,$$

lo cual es absurdo ya que $L' + L_1 \subset X$.

Análoga situación se produciría si $D(L') \supsetneq D(L_2)^\perp$.

Ejercicio 1 En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ y respecto de un sistema de referencia métrico se dan la recta y el plano siguientes:

$$L_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & x_2 & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Posición relativa de L_1 y L_2.
2. $\mathrm{d}(L_1, L_2)$.
3. Ecuaciones de la variedad perpendicular común.

Solución

1. **Posición relativa**

   (a) **Cálculo de** $D(L_1)$

   Se obtiene ésta resolviendo el sistema homogéneo cuya matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Como $x_4 = 0$, tomando $x_3 = -1$ se tiene que

$$D(L_1) = \langle (1, 1, -1, 0) \rangle.$$

   Como L_1 viene dada por un sistema homogéneo se tiene que un punto Q_1 de L_1 es

$$Q_1 = (0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

   (b) **Cálculo de** $D(L_2)$

   La matriz ampliada del sistema L_2 es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   de donde obtenemos fácilmente que

$$L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & -x_4 \\ x_3 & = & 1 - x_4 \end{array} \right. \Longrightarrow D(L_2) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & -x_4 \\ x_3 & = & -x_4 \end{array} \right.$$

   En el sistema $D(L_2)$, dando, sucesivamente, al par (x_1, x_2) los valores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ obtenemos que

$$D(L_2) = \langle (1, 0, 0, 0),\ (0, -1, -1, 1) \rangle.$$

   Por otra parte, en el sistema L_1, tomando $x_4 = 0$, obtenemos el punto de L_2,

$$Q_2 = (0, 1, 1, 0) \in L_2.$$

   (c) **Cálculo de** $\dim(L_1 + L_2)$

   Como $\dim(L_1 + L_2) = \dim\big(D(L_1 + L_2)\big)$, deberemos calcular $D(L_1 + L_2)$ sabiendo que

$$D(L_1 + L_2) = D(L_1) + D(L_2) + \langle \overrightarrow{Q_1 Q_2} \rangle$$

   y que, por tanto,

$$\dim(L_1 + L_2) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

   Por otra parte, el hecho de que las tres primeras filas de la matriz anterior sean linealmente independientes (el rango de la matriz formada por ellas tiene de rango 3) nos indica que

$$D(L_1) \cap D(L_2) = \{\mathbf{0}\}.$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Por tanto, si tenemos en cuenta esta última condición y aplicamos la fórmula de la dimensión obtenemos que

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) = -1 \Longrightarrow L_1 \cap L_2 = \emptyset$$

y, como consecuencia, L_1 y L_2 *se cruzan.*

2. **Cálculo de** $\mathbf{d}(L_1, L_2)$

Calculemos, en primer lugar, la variedad

$$D(L) = (D(L_1) + D(L_2))^{\perp}.$$

Se tiene que

$$D(L) \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & = & 0 \\ & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Tomando $x_3 = 1$ se tiene que

$$D(L) = \langle (0, 1, 1, 2) \rangle.$$

Ahora bien, como $V = (D(L_1) + D(L_2)) \oplus D(L)$, se tiene que

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} = (0, 1, 1, 0) = \underbrace{\alpha_1(1, 1, -1, 0)}_{\mathbf{u}_1 \in DL_1)} + \underbrace{\alpha_2(1, 0, 0, 0) + \alpha_3(0, -1, -1, 1)}_{\mathbf{u}_2 \in D(L_2)} + \underbrace{\alpha_4(0, 1, 1, 2)}_{\mathbf{v} \in D(L)},$$

de donde obtenemos fácilmente que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \left(0, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Luego

$$\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Tomemos ahora los puntos

$$P_1 = Q_1 + \mathbf{u}_1 = (0, 0, 0, 0)), \quad P_2 = Q_2 - u_2 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Se tiene entonces que

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\, u.$$

3. La variedad perpendicular común tiene por ecuación $L = P_1 + D(L)$. Por tanto,

$$L = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \langle (0, 1, 1, 2) \rangle.$$

Nota En este último ejercicio puede observarse como los puntos P_1 y P_2 son únicos porque las variedades L_1 y L_2 se cruzan. A continuación proponemos un segundo ejercicio donde podrá apreciarse que al no verificarse dicha condición, existen infinitos puntos $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$ que verifican la condición $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(P_1, P_2)$.

Ejercicio 2 En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ y respecto de un sistema de referencia métrico de dan los planos

$$L_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 1 \end{array} \right. \qquad L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Posición relativa de L_1 y L_2.
2. $\mathrm{d}(L_1, L_2)$.
3. Ecuaciones de una variedad perpendicular común a L_1 y L_2.

Para calcular la posición relativa de L_1 y L_2 estudiaremos el sistema

$$L_1 \cap L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 1 \\ x_1 & = & 1 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

cuya matriz ampliada es

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

La matriz A es la matriz de los coeficientes de la variedad $D(L_1) \cap D(L_2)$ y como

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \Longrightarrow \dim\big(D(L_1) \cap D(L_2)\big) = 4 - 3 = 1.$$

Luego los planos se cortan según una recta o son "semiparalelos". Como

$$\mathrm{rg}(A|\mathbf{b}) = 4 \neq \mathrm{rg}(A) = 3 \Longrightarrow L_1 \cap L_2 = \emptyset$$

y, por consiguiente, los planos L_1 y L_2 son "semiparalelos".

1. Claramente

$$D(L_1) = \langle (0,0,1,0)\,(0,0,0,1) \rangle,$$

y

$$D(L_2) = \langle (0,1,0,0)\,(0,0,1,0) \rangle.$$

Por otra parte, podemos tomar

$$Q_1 = (0,1,0,0) \in L_1, \quad Q_2 = (1,0,0,0) \in L_2.$$

Calculemos a continuación $D(L) = \big(D(L_1) + D(L_2)\big)^{\perp}$.

$$D(L) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow D(L) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

de donde

$$D(L) = \langle (1,0,0,0) \rangle.$$

Calculemos a continuación dos puntos $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$ tales que $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(P_1, P_2)$. Recordando que

$$V = (D(L_1) + D(L_2)) \oplus D(L),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_1Q_2} = (1,-1,0,0) = & \underbrace{\alpha_1(0,0,1,0) + \alpha_2(0,0,0,1)}_{\mathbf{u}_1 \in D(L_1)} + \\ & + \underbrace{\alpha_3(0,1,0,0) + \alpha_4(0,0,0,1)}_{\mathbf{u}_2 \in D(L_2)} + \\ & + \underbrace{\alpha_5(1,0,0,0)}_{\mathbf{v} \in D(L)}, \end{aligned}$$

de donde

$$\left\{\begin{array}{rcr} \alpha_5 & = & 1 \\ \alpha_3 & = & -1 \\ \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2+\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Nótese que, en este caso, el sistema es indeterminado y que, por tanto, tiene infinitas soluciones (esto es debido, como ya se dijo, a que L_1 y L_2 no se cruzan). Tomando

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=(0,0,-1,0,1),$$

se tiene que

$$\mathbf{u}_1=(0,0,0,0),\quad \mathbf{u}_2=(0,-1,0,0).$$

luego

$$P_1=Q_1+\mathbf{u}_1=(0,1,0,0),\quad P_2=Q_2-\mathbf{u}_2=(1,1,0,0).$$

Por tanto,

$$\mathrm{d}(L_1,L_2)=\mathrm{d}(P_1,P_2)=1\,u.$$

2. Una variedad perpendicular común a L_1 y a L_2, puede ser

$$L=(0,1,0,0)+\langle(1,0,0,0)\rangle.$$

2.3 Ángulo entre variedades

Proposición 2.3.1 Sea $(V,\bullet)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. Se verifica que

$$-1\leq\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mid\mathbf{u}\mid\mid\mathbf{v}\mid}\leq 1.$$

Demostración Recordando la fórmula de Cauchy-Schwartz $(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})^2\leq\mathbf{u^2v^2}$, extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros, se tiene que

$$\mid\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\mid\leq\mid\mathbf{u}\mid\mid\mathbf{v}\mid\Longrightarrow\frac{\mid\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\mid}{\mid\mathbf{u}\mid\mid\mathbf{v}\mid}\leq 1\Longrightarrow -1\leq\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mid\mathbf{u}\mid\mid\mathbf{v}\mid}\leq 1.$$

Consecuencia Recordando que la función

$$\cos:[0,\pi]\longrightarrow[-1,1]$$

es biyectiva, deducimos que

$$\exists!\alpha\in[0,\pi]\mid\cos\alpha=\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mid\mathbf{u}\mid\mid\mathbf{v}\mid},$$

lo cual da lugar a la definición siguiente:

Definición 2.3.1 Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. Llamamos ángulo entre $\mathbf{u},\mathbf{v}$ al ángulo $\alpha\in[0,\pi]$ tal que

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\mid\mathbf{u}\mid\mid\mathbf{v}\mid}.$$

Es de uso común la notación $\cos\alpha=\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$.

Ejercicio Probar las siguientes implicaciones donde $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$.

a) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=0\Longleftrightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

b) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}>0\Longleftrightarrow\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

c) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} < 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

d) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{v}\,| \Longleftrightarrow \alpha = 0$.

e) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -|\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{v}\,| \Longleftrightarrow \alpha = \pi$.

Nota En lo que sigue $(X, V, +)$ es un espacio euclídeo de dimensión n y $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia métrico.

Proposición 2.3.2 Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ y sean $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Consideremos los vectores $\mathbf{u}' = \lambda\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}' = \mu\mathbf{v}$. Se verifica que

$$\frac{|\,\mathbf{u}' \bullet \mathbf{v}'\,|}{|\,\mathbf{u}'\,||\,\mathbf{v}'\,|} = \frac{|\,\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}\,|}{|\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{v}\,|}.$$

Demostración

$$\frac{|\,\mathbf{u}' \bullet \mathbf{v}'\,|}{|\,\mathbf{u}'\,||\,\mathbf{v}'\,|} = \frac{|\,\lambda\mathbf{u} \bullet \mu\mathbf{v}\,|}{|\,\lambda\mathbf{u}\,||\,\mu\mathbf{v}\,|} = \frac{|\,\lambda\mu\,||\,\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}\,|}{|\,\lambda\,||\,\mu\,|\,|\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{v}\,|} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{v}\,|}.$$

Nota El objetivo de la presente proposición es probar que los ángulos que a continuación se definen, son independientes de los vectores que se tomen en las direcciones correspondientes. En otras palabras, que los ángulos dados por las fórmulas siguientes "están bien definidos".

Definición 2.3.2 (ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS) Consideremos las rectas $r = P + \langle u \rangle$ y $s = Q + \langle v \rangle$. Llamamos ángulo entre r y s al ángulo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{|\,\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}\,|}{|\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{v}\,|}. \tag{2.9}$$

Es también de uso común la notación $\alpha = (\widehat{r, s})$.

Definición 2.3.3 (ÁNGULO ENTRE DOS HIPERPLANOS) Dados los hiperplanos

$$h_1 \equiv \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} + a_0 = 0, \quad \big(\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\big),$$

$$h_2 \equiv \mathbf{b} \bullet \mathbf{x} + b_0 = 0, \quad \big(\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\big).$$

Llamamos ángulo entre h_1 y h_2 al ángulo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{|\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}\,|}{|\,\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}\,|}. \tag{2.10}$$

Es también de uso común la notación $\alpha = (\widehat{h_1, h_2})$.

Definición 2.3.4 (ÁNGULO ENTRE RECTA E HIPERPLANO) Consideremos la recta $r = P + \langle u \rangle$ y el hiperplano $h \equiv \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} + a_0 = 0$, donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Llamamos ángulo entre r y h al ángulo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\,\mathbf{u} \bullet \mathbf{a}\,|}{|\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{a}\,|} = \operatorname{sen}\alpha. \tag{2.11}$$

Es igualmente de uso común la notación $\alpha = (\widehat{r, h})$.

Ejercicio Un caso particular interesante es cuando $n = 2$ donde una recta es a su vez un hiperplano. Dadas las rectas

$$r \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0, \quad s \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_0 = 0.$$

¿coinciden los ángulos al aplicar cada una de las definiciones? Como es obvio, la repuesta es afirmativa como se prueba a continuación.

1. Para la aplicación de la fórmula 2.9, se tiene que

$$\mathbf{u} = (a_2, -a_1) \in D(\mathbf{u}), \quad \mathbf{v} = (b_2, -b_1) \in D(\mathbf{v}).$$

Por consiguiente,

$$\cos\alpha = \frac{|\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}\ |}{|\ \mathbf{u}\ ||\ \mathbf{v}\ |} = \frac{|\ a_1b_1 + a_2b_2\ |}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

2. Para la aplicación de la fórmula 2.10, basta tener en cuenta que

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in D(r)^{\perp}, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in D(s)^{\perp}$$

y que, por tanto,

$$\cos\alpha = \frac{|\ \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}\ |}{|\ \mathbf{a}\ ||\ \mathbf{b}\ |} = \frac{|\ a_1b_1 + a_2b_2\ |}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

3. Para la aplicación de la fórmula 2.11, consideraremos a r como recta y a s como hiperplano con lo cual utilizaremos los vectores

$$\mathbf{u} = (a_2, -a_1), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2).$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{|\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{b}\ |^{\mathbf{2}}}{|\ \mathbf{u}\ |^{\mathbf{2}}|\ \mathbf{b}\ |^{\mathbf{2}}}},$$

de donde

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}} = \frac{|\ a_1b_1 + a_2b_2\ |}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA