Capítulo 1

El espacio afín

1.1 Introducción

Definición 1.1.1 Llamamos espacio afín sobre un cuerpo K a la terna $(X, V, +)$ donde:

1. X es un conjunto a cuyos elementos los llamaremos puntos y los notaremos con letras mayúsculas $(A, B, \ldots)$.

2. V es un espacio vectorial sobre K de dimensión finita, a sus elementos los notaremos con negrillas $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots)$.

3. $+$ es una aplicación
$$+ : X \times V \longrightarrow X$$
tal que
$$\forall (P, \mathbf{u}) \in X \times V,\ +(P, \mathbf{u}) = Q = P + \mathbf{u},$$
que verifica los siguientes axiomas:

   a.1) $\forall P \in X,\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,\ (P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

   a.2) $\forall P \in X,\ P + \mathbf{0} = P$.

   a.3) $\forall P, Q \in X,\ \exists! \mathbf{u} \in V \mid Q = P + \mathbf{u}$.
   Al único vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $Q = P + \mathbf{u}$, se representará por $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$.

Definición 1.1.2 Sea $(X, V, +)$ un espacio afín sobre K, Llamaremos dimensión de X a la dimensión del espacio vectorial V. Es decir
$$\dim(X) = n \Longleftrightarrow \dim(V) = n.$$

Proposición 1.1.1 (PROPIEDADES INMEDIATAS) Si $(X, V, +)$ un espacio afín, se verifican las siguientes propiedades:

p.1) $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow P = Q$.

p.2) $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

p.3) $\forall P, Q, R \in X,\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$.

p.4) $\forall P, Q \in X,\ \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

p.5) $\forall P, Q, R, S \in X,\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Longrightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$. (TALES PARALELO)

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Por el axioma a.3) se tiene que

$$\forall P, Q \in X, \;\; Q = P + \overrightarrow{PQ} \overset{\overrightarrow{PQ}=\mathbf{0}}{\Longrightarrow} Q = P + \mathbf{0} \overset{a.2)}{\Longrightarrow} Q = P.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} \overset{P=Q}{\Longrightarrow} P = P + \overrightarrow{PP} \overset{\substack{\text{a.2)}\\ \text{a.3)}}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}.$$

2. Es consecuencia inmediata del axioma a.3.

3. $$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = \mathbf{u} & \Longrightarrow \quad R = P + \mathbf{u} \\ \overrightarrow{RQ} = \mathbf{v} & \Longrightarrow \quad Q = R + \mathbf{v} \end{cases}$$

   de donde

$$Q = (P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \overset{a.2)}{=} P + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

   Es decir,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}.$$

4. $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0} \overset{\text{p.3}}{\Longrightarrow} \forall Q \in X, \; \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \mathbf{0} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$

5. $\overrightarrow{PR} \overset{\text{p.3}}{=} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \overset{\text{p.3}}{=} \overrightarrow{PQ} + \left(\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SR}\right) \overset{\text{p.4}}{=} \overrightarrow{PQ} + \left(\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{RS}\right) \overset{\text{p.h}}{=} \overrightarrow{QS}.$

Ejemplo 1

Se dan:

- El conjunto

$$X = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

- El espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- La aplicación

$$+ : X \times V \longrightarrow X$$

  definida por

$$+\left((x, y, x), \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) = (x + a, \; y + b, \; z + c).$$

  Probar que $(X, V, +)$ es una espacio afín sobre $\mathbb{R}$.

Solución

Veamos que la aplicación $+$ verifica los tres axiomas de la definición.

a.1) $P + \mathbf{0} = (x, y, z) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (x + 0, \; y + 0, \; z + 0) = (x, \; y, \; z).$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

a.2)

$$
\begin{aligned}
(P+\mathbf{u})+\mathbf{v} &= \left((x,\,y,\,z)+\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= (x+a_1,\,y+b_1,\,z+c_1)+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \big((x+a_1)+a_2,\,(y+b_1)+b_2,\,(z+c_1)+c_2\big) = \\
&= \big(x+(a_1+a_2),\,y+(b_1+b_2),\,z+(c_1+c_2)\big) = \\
&= (x,\,y,\,z)+\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= (x,\,y,\,z)+\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}\right) = P+(\mathbf{u}+\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$

a.3) Sean $P=(x_1\,y_1\,z_1)$ y $Q=(x_2\,y_2\,z_2)$ dos puntos de X. Es claro que

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ z_2-z_1 & 0 \end{pmatrix}$$

es el *único* elemento de V tal que $Q=P+\mathbf{u}$.
Obviamente $\dim(X)=\dim(V)=3$.

Ejemplo 2

Dados:

- El conjunto
$$X=\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R}\}.$$
- El espacio vectorial
$$V=(\mathbb{R}^n,+,\cdot\mathbb{R}).$$
- La aplicación
$$+:X\times V\longrightarrow X$$
definida por
$$+\big((x_1,x_2,\ldots,x_n),(a_1,a_2,\ldots,a_n)\big)=(x_1+a_1,\,x_2+a_2,\,\ldots\,x_n+a_n),$$
es una espacio afín sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n llamado espacio afín numérico.

Se demuestra de forma análoga al ejemplo anterior.

1.2 Sistema de referencia afín

Nota En lo que sigue supondremos que $(X,V,+)$ un espacio afín sobre K de dimensión n.

Definición 1.2.1 Llamamos sistema de referencia afín de X al conjunto $\mathcal{R}=\{O,\mathcal{B}\}$, donde:

- O es un punto de X al que llamaremos *origen de coordenadas*.
- $\mathcal{B}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ es una base de V.

Definición 1.2.2 Dado el sistema de referencia $\mathcal{R}=\{O,\mathcal{B}\}$ y el punto $P\in X$, al vector $\overrightarrow{OP}$ lo llamaremos vector de posición del punto P.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Definición 1.2.3 Dado el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ y el punto $P \in X$, llamaremos coordenadas de P respecto de la referencia $\mathcal{R}$ a las coordenadas de su vector de posición $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Simbólicamente,

$$P_{\mathcal{R}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Proposición 1.2.1 Sean $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$ dos sistemas de referencia afines de X y sean:

- $P_{\mathcal{R}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
- $P_{\mathcal{R}'} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$,
- $O'_{\mathcal{R}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Se verifica que

$$(1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \left(\begin{array}{c|c} 1 & a_1, a_2, \ldots, a_n \\ \hline \mathbf{0} & \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \end{array} \right)$$

donde $\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ es la matriz de las coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Demostración Se tiene que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \Longrightarrow \overrightarrow{OP}_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{OO'}_{\mathcal{B}} + \overrightarrow{O'P}_{\mathcal{B}}.$$

Recordando la fórmula del cambio de base

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}),$$

se tiene que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}),$$

o bien, más brevemente

$$(1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \left(\begin{array}{c|c} 1 & a_1, a_2, \ldots, a_n \\ \hline \mathbf{0} & \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \end{array} \right).$$

Ejemplo En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ se consideran las referencias afines $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}' = \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, donde las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ de A, B y C son

$$A = (1, 1), \quad B = (2, 0), \quad C = (3, 0).$$

Se pide:

1. Calcular las fórmulas del cambio de sistema de referencia.
2. Dada la recta, cuya ecuación respecto de $\mathcal{R}$ es

$$r \equiv 2x - 3y + 1 = 0,$$

   hallar su ecuación respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

3. La ecuación respecto de $\mathcal{R}$ de la cónica cuya ecuación, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ es

$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' + 1 = 0.$$

Solución

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

1. Como
$$\overrightarrow{AB}_{\mathcal{B}} = (1,-1), \quad \overrightarrow{AC}_{\mathcal{B}} = (2,-1),$$
se tiene que
$$\mathcal{B}' = \{(1,-1),\,(2,-1)\}$$
es una base de $\mathbb{R}^2$ y, por tanto,
$$\mathcal{M}(\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Por consiguiente, las ecuaciones pedidas vienen dadas por la igualdad
$$(1,\,x,\,y) = (1,\,x',\,y')\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \tag{1.1}$$
o bien,
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + x' + 2y' \\ y & = & 1 - x' - \ \ y' \end{array}\right. \tag{1.2}$$

2. Basta sustituir x e y en la ecuación de r, por sus valores dados por las fórmulas 1.2:
$$r \equiv 2(1 + x' + 2y') - 3(1 - x' - y') + 1 = 0 \equiv 5x' + 7y' = 0.$$

3. De 1.1 se tiene que
$$(1,\,x',\,y') = (1,\,x,\,y)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
ya que la matriz de un cambio de sistema de referencia es invertible. De aquí obtenemos que
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 3 - x - 2y \\ y' & = & -2 + x + y \end{array}\right.$$
Sustituyendo estos valores en la ecuación de la cónica, se tiene
$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' + 1 = 0 \equiv (3 - x - 2y)^2 + (-2 + x + y)^2 - 2(3 - x - 2y)(-2 + x + y) + 1 = 0.$$
Es decir,
$$4x^2 + 9y^2 + 12xy - 20x - 30y + 26 = 0.$$

1.3 Variedades lineales afines

Definición 1.3.1 Sea P un punto de X y W una variedad lineal de V. Llamaremos $P + W$ al subconjunto de X definido por
$$P + W = \{P + \mathbf{u} \in X \mid \mathbf{u} \in W\}.$$

Definición 1.3.2 Sea L un subconjunto de X. Diremos que L es una variedad lineal afín de X si se verifica una de las siguientes condiciones, mutuamente excluyentes:

- $L = \emptyset$.
- Existe un punto $P \in L$ y una variedad lineal $W \subset V$ tal que
$$L = P + W.$$

Nota La definición 1.3.1, nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que un punto Q pertenezca a la variedad L. En efecto,
$$Q \in L \Longleftrightarrow \exists \mathbf{w} \in W \mid Q = P + \mathbf{w} \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \mathbf{w} \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W. \tag{1.3}$$

Proposición 1.3.1 Si $L = P + W$ y $P' \in L$, entonces $L = P' + W$. Es decir, L es independiente del punto elegido en la variedad.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración Hay que probar que $P + W = P' + W$.

$\boxed{\subset}$ $Q \in P+W \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q} = \mathbf{v} \in W \Longrightarrow \overrightarrow{P'Q} = \mathbf{v} - \overrightarrow{PP'} \Longrightarrow \overrightarrow{P'Q} \in W \Longrightarrow Q \in P' + W$,ya que, por hipótesis, $P' \in L$ y, por tanto,$\overrightarrow{PP'} \in W$.

$\boxed{\supset}$ $Q \in P' + W \Longrightarrow \overrightarrow{P'Q} \in W \Longrightarrow \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} \in W \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} + \overrightarrow{PP'} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Longrightarrow Q \in P + W$ ya que, por hipótesis, $P' \in L$ y, por tanto, $\overrightarrow{PP'} \in W$.

Proposición 1.3.2 Sea $L = P + W$ una variedad lineal no vacía de X y, supongamos que existe otra variedad lineal $W' \subset V$ tal que $L = P + W'$ entonces se verifica que $W = W'$.

Demostración

$\boxed{W \subset W'}$. En efecto,

$$P + W = P + W' \Longrightarrow \forall \mathbf{v} \in W,\ \exists \mathbf{v}' \in W' \mid P + v = P + v' \overset{\text{p.2}}{\Longrightarrow} \mathbf{v} = \mathbf{v}' \Longrightarrow \mathbf{v} \in W'.$$

$\boxed{W' \subset W}$ Basta aplicar un razonamiento simétrico al anterior.

Definición 1.3.3 Sea $L = P + W$, a la variedad W, unívocamente determinada por L, se le llama *variedad de dirección de* L y será notada en lo sucesivo por $D(L)$.

Definición 1.3.4 Sea $L = P + D(L)$ una variedad lineal de X. Llamaremos dimensión de L a la dimensión de su variedad de dirección $D(L)$. Es decir

$$\dim(L) = r \Longleftrightarrow \dim(D(L)) = r.$$

Si $L = \emptyset$ convendremos en que $\dim(L) = -1$.

Nota Utilizaremos las denominaciones clásicas de *punto, recta, plano e hiperplano* para designar a las variedades lineales afines de dimensión cero, uno, dos y $n - 1$, respectivamente.

1.4 Ecuaciones de una variedad lineal afín

Nota En lo que sigue se supone que se ha fijado un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, donde $O \in X$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de V. Respecto a dicho sistema de referencia y dicha base se dan las coordenadas de los puntos y de los vectores así como las ecuaciones de las variedades de dirección. Notaremos por $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \ldots$ a los vectores de posición de los puntos $P, Q, \ldots$ lo que nos permitirá identificar las coordenadas de un punto respecto de $\mathcal{R}$ con las coordenadas de su vector de posición, respecto de $\mathcal{B}$.

Caso 1

Datos: un punto de L y unas ecuaciones implícitas de $D(L)$.
Sean, respectivamente,

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in L,$$
$$D(L) \equiv A\mathbf{y}^t = 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Sea $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$,

$$Q \in L \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in D(L) \Longleftrightarrow A(\mathbf{x} - \mathbf{p})^t = 0 \Longleftrightarrow A\mathbf{x}^t = A\mathbf{p}^t = \mathbf{b}^t,$$

donde

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i, \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Caso 2

Datos: un punto de L y unas ecuaciones paramétricas de $D(L)$.
Sean, respectivamente,

$$P = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in L,$$
$$D(L) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)A,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Sea $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$,

$$Q \in L \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in D(L) \Longleftrightarrow (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)A$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)A$$
$$\Downarrow$$
$$(1,\, x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1,\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{p} \\ \hline 0 & A \end{array} \right),$$

donde, recordamos, $\mathbf{p}$ es el vector de posición del punto P.

Caso 3

Datos: un punto de L y una base $\mathcal{B}_1$ de $D(L)$.
Sean, respectivamente,

$$P = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in L,$$
$$\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

y sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

la matriz de las coordenadas de $\mathcal{B}_1$ respecto de $\mathcal{B}$.

- Las ecuaciones paramétricas de L son inmediatas de calcular ya que si $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L = P + D(L)$, se tiene:

$$Q = P + D(L) \Longrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_r \mathbf{v}_r$$

  donde, sustituyendo los vectores $\mathbf{v}_i$ por sus coordenadas, obtendremos nuevamente que

$$L \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{a} \\ \hline 0 & A \end{array} \right).$$

- Para calcular un sistema de ecuaciones implícitas de L, calcularemos en primer lugar unas ecuaciones implícitas de $D(L)$ con lo cual estaremos en el **caso 1**.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

1.5 Dependencia afín

Definición 1.5.1 Sea

$$\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_r\} \subset X.$$

Diremos que $\mathcal{A}$ es un conjunto de puntos afínmente independientes o simplemente que $\mathcal{A}$ es afínmente independiente si el conjunto de vectores de V,

$$\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_r}\},$$

es linealmente independiente. De no ser así, diremos que $\mathcal{A}$ es afínmente dependiente.

Proposición 1.5.1 Sea

$$\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_r\} \subset X.$$

La dependencia o independencia afín de $\mathcal{A}$ no depende del punto inicialmente elegido. Es decir, si tomamos como punto inicial, por ejemplo A_r (lo cual hacemos por razones de estricta comodidad en la notación), se verifica que si

$$\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_r\}$$

es afínmente independiente, entonces

$$\mathcal{A}' = \{\overrightarrow{A_rA_0}, \overrightarrow{A_rA_1}, \ldots, \overrightarrow{A_rA_{r-1}}\},$$

es linealmente independiente.

Demostración En efecto, partamos de la relación

$$\alpha_0\overrightarrow{A_rA_0} + \alpha_1\overrightarrow{A_rA_1} + \ldots + \alpha_{r-1}\overrightarrow{A_rA_{r-1}} = \mathbf{0}.$$

Intercalando en cada sumando el punto A_0, se tiene que

$$\alpha_0(\overrightarrow{A_rA_0} + \overrightarrow{A_0A_0}) + \alpha_1(\overrightarrow{A_rA_0} + \overrightarrow{A_0A_1}) + \ldots + \alpha_{r-1}(\overrightarrow{A_rA_0} + \overrightarrow{A_0A_{r-1}}) = \mathbf{0},$$

de donde

$$\alpha_1\overrightarrow{A_0A_1} + \ldots + \alpha_{r-2}\overrightarrow{A_0A_{r-2}} - (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1})\overrightarrow{A_0A_r} = \mathbf{0}$$

y por ser $\mathcal{A}$ linealmente independiente se tiene que

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{r-2} & = & 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} & = & 0 \end{cases}$$

De donde deducimos que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$ y, por consiguiente, que $\mathcal{A}'$ es linealmente independiente.

Proposición 1.5.2 Si L una variedad afín de X de dimensión r, entonces en L hay, a lo sumo, $r+1$ puntos afínmente independientes.

Demostración Si $L = \emptyset$, es evidente.
Sea pues $L = P + D(L)$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una base de $D(L)$. Consideremos los puntos de L

$$Q_i = P + \mathbf{v}_i \ (i = 1, \ldots, r).$$

El conjunto de $r+1$ puntos de L

$$\{P, Q_1, Q_2 \ldots, Q_r\}$$

es afínmente independiente.
En efecto, los vectores

$$\{\overrightarrow{PQ_1} = \mathbf{v}_1,\ \overrightarrow{PQ_2} = \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{PQ_r} = \mathbf{v}_r\}$$

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

son linealmente independientes por ser una base de $D(L)$.
Veamos ahora, que en L no puede haber más de $r+1$ puntos afínmente independientes.
Si los puntos de L $\{A_0, A_1, \ldots, A_{r+1}\}$ fuesen afínmente independientes, los $r+1$ vectores de $D(L)$,

$$\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{r+1}}$$

serían linealmente independientes lo cual es absurdo ya que $\dim(D(L)) = r$.

Consecuencia. En el espacio afín X, hay, a lo sumo, $n+1$ puntos afínmente independientes.

1.6 Operaciones con variedades

Definición 1.6.1 (INTERSECCIÓN DE VARIEDADES). Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales afines de X,

$$L_1 \cap L_2 = \{P \in X \mid P \in L_1,\ P \in L_2\}. \tag{1.4}$$

Proposición 1.6.1 Si $L_1 = P_1 + D(L_1)$ y $L_2 = P_2 + D(L_2)$ son dos variedades lineales afines de X tales que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y $P \in L_1 \cap L_2$ se verifica que

$$L_1 \cap L_2 = P + D(L_1) \cap D(L_2). \tag{1.5}$$

Demostración Hay que probar la igualdad de los segundos miembros de 1.4 y 1.5.

$Q \in L_1 \cap L_2 \Longleftrightarrow Q \in L_1,\ Q \in L_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in D(L_1),\ \overrightarrow{PQ} \in D(L_2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in D(L_1) \cap D(L_2) \Longleftrightarrow Q \in P + D(L_1) \cap D(L_2)$.

Nota Obsérvese, que de la proposición se desprende que si L_1 y L_2 son variedades lineales afines de X se verifica que:

- Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $L_1 \cap L_2$ es, por definición, una variedad lineal afín de X.
- Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, $L_1 \cap L_2$ es una variedad lineal afín de X tal que

$$D(L_1 \cap L_2) = D(L_1) \cap D(L_2).$$

Definición 1.6.2 (VARIEDAD ENGENDRADA POR UNA PARTE DE X). Sea $\mathcal{E}$ una parte no vacía de X. Llamamos variedad lineal afín engendrada por $\mathcal{E}$ y la notamos por $L(\mathcal{E})$, a la menor[1] variedad lineal afín de X que contiene al conjunto $\mathcal{E}$.

Proposición 1.6.2 Sea $\mathcal{E}$ una parte no vacía de X y $P \in \mathcal{E}$. Se verifica que

$$L(\mathcal{E}) = P + D(L(\mathcal{E})), \tag{1.6}$$

donde

$$D(L(\mathcal{E})) = \left\langle \left\{ \overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in \mathcal{E} \right\} \right\rangle.$$

Como caso particular; si $\mathcal{E}$ es un conjunto finito de puntos de X,

$$\mathcal{E} = \{A_0, A_1, \ldots, A_r\},$$

entonces

$$L(\mathcal{E}) = A_0 + \langle \overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_0A_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_0A_r} \rangle.$$

[1] A la "menor" en el orden parcial inducido por la inclusión de conjuntos ($A \leq B \Longleftrightarrow A \subset B$).

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración Habrá que probar:

1. $\mathcal{E} \subset L(\mathcal{E})$ lo cual es inmediato ya que, en efecto,

$$\forall Q \in \mathcal{E},\ Q = P + \overrightarrow{PQ} \Longrightarrow Q \in L(\mathcal{E}).$$

2. Si L una variedad lineal afín que contiene a $\mathcal{E}$, entonces $L(\mathcal{E}) \subset L$.
   Como $P \in L$, L será de la forma $L = P + D(L)$. Vamos a probar que $L(\mathcal{E}) \subset L$. Bastará para ello demostrar la inclusión

$$D(L(\mathcal{E})) \subset D(L)$$

   lo cual es inmediato si se tiene en cuenta que

$$\forall Q \in \mathcal{E} \subset L,\ \overrightarrow{PQ} \in D(L(\mathcal{E})) \overset{\mathcal{E}\subset L}{\Longrightarrow} \overrightarrow{PQ} \in D(L)$$

   y, por tanto, $D(L(\mathcal{E})) \subset D(L)$ como se quería demostrar.

La segunda parte de la proposición es consecuencia inmediata de lo anterior.

Nota Para calcular unas ecuaciones de la variedad $L(\mathcal{E})$ en el caso en que $\mathcal{E} = \{A_0, A_1, \ldots, A_r\}$ (también llamada variedad afín de X determinada por $r+1$ puntos), basta tomar $P = A_0$, $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{A_0A_i}$ $i = (1, \ldots, r)$ y aplicar lo dicho en el caso 3 de la Sección 1.4.

Definición 1.6.3 Sean L_1 y L_2 variedades lineales no vacías de X. Llamamos suma de las variedades L_1 y L_2 a la menor variedad lineal de X que contiene a L_1 y a L_2. Es, por tanto, la variedad engendrada por la unión de dichas variedades. Simbólicamente:

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

Proposición 1.6.3 Si L_1 y L_2 son las variedades afines,

$$L_1 = P_1 + D(L_1), \quad L_2 = P_2 + D(L_2),$$

se verifica que

$$L_1 + L_2 = P_1 + \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle + D(L_1) + D(L_2). \tag{1.7}$$

Demostración Sea

$$L = P_1 + \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle + D(L_1) + D(L_2) = P_1 + D(L).$$

Habrá que probar que la variedad L definida por la igualdad anterior es la menor variedad lineal de X que contiene a L_1 y a L_2.
En efecto,

- Veamos que L contiene a $L_1 \cup L_2$.

$$Q \in L_1 \cup L_2 \Longrightarrow (Q \in L_1) \vee (Q \in L_2).$$

  Pero,

$$Q \in L_1 \Longrightarrow \overrightarrow{P_1Q} \in D(L_1) \subset D(L) \Longrightarrow Q \in L$$

  y

$$Q \in L_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P_2Q} \in D(L_2) \Longrightarrow \overrightarrow{-P_1P_2} + \overrightarrow{P_1Q} \in D(L_2),$$

  de donde

$$\overrightarrow{P_1Q} \in \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle + D(L_2) \subset D(L) \Longrightarrow Q \in L.$$

- Veamos que L es la menor variedad lineal afín que contiene a L_1 y a L_2. En efecto, sea L' una variedad lineal de X que contenga a L_1 y a L_2. Como $P_1 \in L'$, ésta será de la forma

$$L' = P_1 + D(L').$$

Hay que probar pues, que $D(L) \subset D(L')$, lo cual es fácil de ver si se tiene en cuenta que:

a) $P_2 \in L_2 \overset{P_2 \in L'}{\Longrightarrow} \overrightarrow{P_1P_2} \in D(L') \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle \subset D(L')$.

b) $\forall Q \in L_1 \Longrightarrow \overrightarrow{P_1Q} \in D(L_1) \overset{Q \in L'}{\Longrightarrow} \overrightarrow{P_1Q} \in D(L')$, de donde $D(L_1) \subset D(L')$.

c) $\forall Q \in L_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P_2Q} \in D(L_2)$.
Pero $\overrightarrow{P_2Q} = -\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1Q} \in D(L')$ y, teniendo en cuenta que P_2, $Q \in L'$, se tiene que $D(L_2) \subset D(L')$.

De este modo $D(L') \supset D(L_1 + L_2)$ por contener a cada uno de sus sumandos.

Consecuencia Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, entonces

$$L_1 + L_2 = P_1 + D(L_1) + D(L_2). \tag{1.8}$$

Demostración En efecto, sea $Q \in L_1 \cap L_2$. Se tiene que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1Q} - \overrightarrow{P_2Q} \in D(L1) + D(L2) \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle \subset D(L_1) + D(L_2),$$

de donde resulta 1.8.

Proposición 1.6.4 Sea $\mathcal{R}(X)$ el conjunto de las variedades lineales de X y consideremos las operaciones suma $(+)$ e intersección $(\cap)$ de variedades anteriormente definidas y sean L, L_1, L_2, $L_3 \in \mathcal{R}(X)$, se verifican las siguientes propiedades:

1. ASOCIATIVAS
   - $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$.
   - $(L_1 \cap L_2) \cap L_3 = L_1 \cap (L_2 \cap L_3)$.
2. CONMUTATIVAS
   - $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$.
   - $L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1$.
3. IDEMPOTENTES
   - $L + L = L$.
   - $L \cap L = L$.
4. LEYES DE SIMPLIFICACIÓN
   - $L_1 + (L_1 \cap L_2) = L_1$.
   - $L_1 \cap (L_1 + L_2) = L_1$.

Nota A la terna $(\mathcal{R}(X), +, \cap)$ se le da el nombre de retículo por verificar sus operaciones las propiedades 1, 2, 3 y 4.

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA · UNIVERSIDAD DE SEVILLA

1.7 Fórmula de la dimensión. Aplicaciones

Teorema 1.7.1 (FÓRMULA DE LA DIMENSIÓN) Sean L_1 y L_2 variedades lineales afines no vacías de X:

1. Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, se verifica que
$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).$$
2. Pero si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, entonces
$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) - \dim\big(D(L_1) \cap D(L_2)\big).$$

Demostración

1. $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \overset{1.8}{\Longrightarrow} D(L_1 + L_2) = D(L_1) + D(L_2)$, por consiguiente,
$$\begin{aligned}\dim(L_1 + L_2) &= \dim\big(D(L_1 + L_2)\big) = \dim\big(D(L_1) + D(L_2)\big) = \\ &= \dim(D(L_1)) + \dim(D(L_2)) - \dim\big(D(L_1) \cap D(L_2)\big) \overset{1.5}{=} \\ &= \dim(D(L_1)) + \dim(D(L_2)) - \dim\big(D(L_1 \cap L_2)\big) = \\ &= \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).\end{aligned}$$
2. $L_1 \cap L_2 = \emptyset \overset{1.7}{\Longrightarrow} D(L_1 + L_2) = \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle + D(L_1) + D(L_2)$, Por consiguiente,
$$\begin{aligned}\dim(L_1 + L_2) &= \dim\big(D(L_1 + L_2)\big) = \dim\left(\left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle + \big(D(L_1) + D(L_2)\big)\right) = \\ &= 1 + \dim\big(D(L_1) + D(L_2)\big) - \dim\left(\left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle \cap \big(D(L_1) + D(L_2)\big)\right)\end{aligned}$$
Pero,
$$\left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle \cap \big(D(L_1) + D(L_2)\big)) = \{\mathbf{0}\}.$$
En efecto,
$\left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle \cap \big(D(L_1) + D(L_2)\big) \neq \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle \subset D(L_1) + D(L_2) \Longrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \in D(L_1) + D(L_2) \Longrightarrow \exists \mathbf{v}_1 \in D(L_1),\ \exists \mathbf{v}_2 \in D(L_2) \mid \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \Longrightarrow P_2 = P_1 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \Longrightarrow \underbrace{P_2 - \mathbf{v}_2}_{\in L_2} = \underbrace{P_1 + \mathbf{v}_1}_{\in L_1} \Longrightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, en contra de la hipótesis. Luego
$$\left(\left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle \cap \big(D(L_1) + D(L_2)\big)\right) = \{\mathbf{0}\}.$$
Por tanto, se tiene que
$$\begin{aligned}\dim(L_1 + L_2) &= \dim(D(L_1)) + \dim(D(L_2)) + 1 - \dim\big(D(L_1) \cap D(L_2)\big) = \\ &= \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) - \dim\big(D(L_1) \cap D(L_2)\big)\end{aligned}$$

Definición 1.7.1 Sean L_1 y L_2 variedades lineales no vacías de X.

1. Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, se dice que L_1 y L_2 son *secantes*. Si éste es el caso y además
   (a) si $D(L_1) \cap D(L_2) = \{\mathbf{0}\}$, entonces $L_1 \cap L_2 = P$.
   (b) si $D(L_1) \subset D(L_2)$ o $D(L_1) \supset D(L_2)$, entonces $L_1 \subset L_2$ o $L_1 \supset L_2$.
   (c) si, como caso particular, $D(L_1) = D(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$.
2. Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, se dice que L_1 y L_2 son *disjuntas*. Si éste es el caso y además

(a) si $D(L_1) \subset D(L_2)$ o $D(L_1) \supset D(L_2)$, entonces $L_1 \parallel L_2$.

(b) si $D(L_1) \cap D(L_2) = \{\mathbf{0}\}$, entonces diremos que L_1 y L_2 *se cruzan.*

(c) si $D(L_1) \cap D(L_2) \neq \{\mathbf{0}\}$ y las variedades no son paralelas, entonces diremos que L_1 y L_2 son *"semiparalelas"*[2]

Posiciones relativas de rectas y planos en $\mathbb{R}^4$

1. **Posiciones de dos rectas r_1 y r_2.**

(a)

$$r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \Longrightarrow \begin{cases} D(r_1 + r_2) = D(r_1) + D(r_2) \Longrightarrow 1 \leq \dim(r_1 + r_2) \leq 2 \\ \dim(r_1 \cap r_2) = 2 - \dim(r_1 + r_2) \end{cases}$$

- $\dim(r_1 + r_2) = 1 \Longrightarrow \dim(r_1 \cap r_2) = 2 - 1 = 1 \Longrightarrow r_1 = r_2$.
- $\dim(r_1 + r_2) = 2 \Longrightarrow \dim(r_1 \cap r_2) = 2 - 2 = 0 \Longrightarrow r_1 \cap r_2 = P$.

(b) Sean $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$.

$$r_1 \cap r_2 = \emptyset \Longrightarrow \begin{cases} D(r_1 + r_2) = \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + D(r_1) + D(r_2) \Longrightarrow 2 \leq \dim(r_1 + r_2) \leq 3 \\ \dim(D(r_1) \cap D(r_2)) = 3 - \dim(r_1 + r_2) \end{cases}$$

- $\dim(r_1 + r_2) = 2 \Longrightarrow \dim(D(r_1) \cap D(r_2)) = 3 - 2 = 1 \Longrightarrow r_1 \parallel r_2$.
- $\dim(r_1 + r_2) = 3 \Longrightarrow \dim(D(r_1) \cap D(r_2)) = 3 - 3 = 0 \Longrightarrow r_1$ y r_2 se cruzan.

2. **Posiciones de dos planos π_1 y π_2.**

(a)

$$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \Longrightarrow \begin{cases} D(\pi_1 + \pi_2) = D(\pi_1) + D(\pi_2) \Longrightarrow 2 \leq \dim(\pi_1 + \pi_2) \leq 4 \\ \dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 4 - \dim(\pi_1 + \pi_2) \end{cases}$$

- $\dim(\pi_1 + \pi_2) = 2 \Longrightarrow \dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 4 - 2 = 2 \Longrightarrow \pi_1 = \pi_2$.
- $\dim(\pi_1 + \pi_2) = 3 \Longrightarrow \dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 4 - 3 = 1 \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r$. Los planos se cortan según una recta.
- $\dim(\pi_1 + \pi_2) = 4 \Longrightarrow \dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = P$. Los planos se cortan en un punto P.

(b) Sean $P_1 \in \pi_1$, $P_2 \in \pi_2$.

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Longrightarrow \begin{cases} D(\pi_1 + \pi_2) = \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + D(\pi_1) + D(\pi_2) \Longrightarrow 3 \leq \dim(\pi_1 + \pi_2) \leq 4 \\ \dim(D(\pi_1) \cap D(\pi_2)) = 5 - \dim(\pi_1 + \pi_2) \end{cases}$$

- $\dim(\pi_1 + \pi_2) = 3 \Longrightarrow \dim(D(\pi_1) \cap D(\pi_2)) = 5 - 3 = 2 \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$.
- $\dim(\pi_1 + \pi_2) = 4 \Longrightarrow \dim(D(\pi_1) \cap D(\pi_2)) = 5 - 4 = 1 \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 son "semiparalelos".

3. **Posiciones de recta y plano, r y π.**

(a)

$$r \cap \pi \neq \emptyset \Longrightarrow \begin{cases} D(r + \pi) = D(r) + D(\pi) \Longrightarrow 2 \leq \dim(r + \pi) \leq 3 \\ \dim(r \cap \pi) = 3 - \dim(r + \pi) \end{cases}$$

- $\dim(r + \pi) = 2 \Longrightarrow \dim(r \cap \pi) = 3 - 2 = 1 \Longrightarrow r \subset \pi$.
- $\dim(r + \pi) = 3 \Longrightarrow \dim(r \cap \pi) = 3 - 3 = 0 \Longrightarrow r \cap \pi = P$. Los planos se cortan en un punto P.

[2]Esta situación se puede producir cuando la dimensión del espacio es superior a tres. Obsérvese que las variedades no se cortan pero no son paralelas ni se cruzan de ahí que a esta posición le llamemos "semiparalelas".

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

(b) Sean $P_1 \in r,\ P_2 \in \pi$.

$$r \cap \pi = \emptyset \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(r+\pi) = \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + D(r) + D(\pi) \Longrightarrow 3 \leq \dim(r+\pi) \leq 4 \\ \dim(D(r) \cap D(\pi)) = 4 - \dim(r+\pi) \end{array} \right.$$

- $\dim(r+\pi) = 3 \Longrightarrow \dim(D(r) \cap D(\pi)) = 4 - 3 = 1 \Longrightarrow D(r) \subset D(\pi) \Longrightarrow r \parallel \pi$.
- $\dim(r+\pi) = 4 \Longrightarrow \dim(D(r) \cap D(\pi)) = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow r$ y π se cruzan.

Posiciones relativas de un hiperplano y de una variedad, H y L.

Sea $\dim(L) = r < n$. Como $\dim(H) = n - 1$, se tiene que:

1.
$$L \cap H \neq \emptyset \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(L+H) = D(L) + D(H) \Longrightarrow n - 1 \leq \dim(L+H) \leq n \\ \dim(L \cap H) = n + r - \dim(L+H) \end{array} \right.$$

- $\dim(L+H) = n - 1 \Longrightarrow \dim(L \cap H) = r + n - 1 - (n-1) = r \Longrightarrow L \subset H$.
- $\dim(L+H) = n \Longrightarrow \dim(L \cap H) = r + n - 1 - n = r - 1$, de donde $L \cap H$ es una variedad de dimensión $r - 1$.

2. Sean $P_1 \in L,\ P_2 \in H$.

$$L \cap H = \emptyset \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(L+H) = \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + D(L) + D(H) \Longrightarrow \dim(L+H) = n \\ \dim(D(L) \cap D(H)) = r + n - \dim(L+H) \end{array} \right.$$

- $\dim(L+H) = n \Longrightarrow \dim(D(L) \cap D(H)) = r \Longrightarrow D(L) \subset D(H) \Longrightarrow L \parallel H$.

Proposición 1.7.1 Es condición necesaria para que dos variedades lineales afines, $L_1,\ L_2 \in X$, se crucen que $\dim(L_1) + \dim(L_2) < n$ $(n = \dim(X))$

Demostración Si L_1 y L_2 se cruzan se verifica que

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset, \quad D(L_1) \cap D(L_2) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(L_1 + L_2) \leq n.$$

Sustituyendo en la fórmula de la dimensión, 1.7.1 (2, se tiene:

$$n \geq \dim(L_1) + \dim(L_2) + 1 \Longrightarrow \dim(L_1) + \dim(L_2) \leq n - 1 < n.$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA