Capítulo 3

Afinidades. Movimientos

3.1 Aplicaciones afines

Nota En lo que sigue $\mathcal{E} = (X, V, +)$ es un espacio afín sobre K de dimensión n y $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia de $\mathcal{E}$.

Definición 3.1.1 Llamamos aplicación afín sobre $\mathcal{E}$ a todo par $(f, \overrightarrow{f})$ tal que:

1. $f : X \longrightarrow X$ es una aplicación.
2. $\overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(V)$.
3. $\forall P \in X, \forall \mathbf{u} \in V,\ f(P + \mathbf{u}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{u})$.

Consecuencias

1. Como $\forall P, Q \in X,\ Q = P + \overrightarrow{PQ}$, la condición 3 de la definición es equivalente a la siguiente:

$$\forall P, Q \in X,\ f(Q) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}). \tag{3.1}$$

   Por otra parte, de 3.1 se obtiene inmediatamente que

$$\forall P, Q \in X,\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}. \tag{3.2}$$

2. De estas últimas igualdades deducimos:

   2.1) La igualdad 3.1 establece que la aplicación $f : X \longrightarrow X$ está determinada si se conocen $\overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(V)$ y la imagen por f de cualquier punto $P \in X$.

   2.2) La igualdad 3.2 nos indica que el endomorfismos $\overrightarrow{f}$ está unívocamente determinado por f.

Definición 3.1.2 Sea $(f, \overrightarrow{f})$ una aplicación afín de $\mathcal{E}$. Al endomorfismo $\overrightarrow{f} \in V$, unívocamente determinado por f, se le denomina *endomorfismo asociado a la aplicación* f.

No es fácil, en general, obtener $\overrightarrow{f}$, aplicando directamente la definición. Sí lo será utilizando recursos matriciales, como veremos más adelante. Veamos dos casos particularmente sencillos.

Ejemplo 1 Sea

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X,$$

definida por:

$$\forall P \in X,\ \mathrm{id}_X(P) = P.$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Obviamente id_X es una aplicación de X (la aplicación identidad). Tratemos de determinar a través de la igualdad 3.2, el endomorfismo $\overrightarrow{\mathrm{id}_X}$ asociado a id_X.

$$\forall P, Q \in X,\ \overrightarrow{\mathrm{id}_X}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\mathrm{id}_X(P)\mathrm{id}_X(Q)} = \overrightarrow{PQ} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{id}_X} = \mathrm{id}_V.$$

Nótese que se ha probado que $(\mathrm{id}_X, \overrightarrow{\mathrm{id}_X})$ es una aplicación afín de $\mathcal{E}$ donde $\overrightarrow{\mathrm{id}_X} = \mathrm{id}_V$.

Ejemplo 2 Fijado una vector $\mathbf{u} \in V$, consideremos la aplicación

$$T_{\mathbf{u}} : X \longrightarrow X,$$

definida por

$$\forall P \in X,\ T_{\mathbf{u}}(P) = P + \mathbf{u}.$$

Tratemos, igualmente, de determinar a través de la igualdad 3.2, el endomorfismo $\overrightarrow{T_{\mathbf{u}}}$ asociado a $T_{\mathbf{u}}$.

$$\forall P, Q \in X,\ \overrightarrow{T_{\mathbf{u}}}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{T_{\mathbf{u}}(P)T_{\mathbf{u}}(Q)} = \overrightarrow{(P+\mathbf{u})(Q+\mathbf{u})}. \tag{3.3}$$

Por el teorema de Tales paralelo se tiene que

$$\overrightarrow{P(P+\mathbf{u})} = \overrightarrow{Q(Q+\mathbf{u})} = \mathbf{u} \Longrightarrow \overrightarrow{(P+\mathbf{u})(Q+\mathbf{u})} = \overrightarrow{PQ}$$

y, por tanto, sustituyendo en 3.3, deducimos que

$$\overrightarrow{T_{\mathbf{u}}}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ} \Longrightarrow \overrightarrow{T_{\mathbf{u}}} = \mathrm{id}_V.$$

Nótese que se ha probado que $(T_{\mathbf{u}}, \overrightarrow{T_{\mathbf{u}}})$ es una aplicación afín de $\mathcal{E}$ (llamada traslación de vector guía $\mathbf{u}$), donde $\overrightarrow{T_{\mathbf{u}}} = \mathrm{id}_V$.

Definición 3.1.3 Sean $(f, \overrightarrow{f})$ una aplicación afín de $\mathcal{E}$ y $L = P + D(L)$ una variedad lineal afín. Se define $f(L)$ mediante la siguiente igualdad:

$$f(L) = \{f(P+\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in D(L)\} \tag{3.4}$$

Proposición 3.1.1 Sean $(f, \overrightarrow{f})$ una aplicación afín de $\mathcal{E}$ y $L = P + D(L)$ una variedad lineal afín. Se verifica que $f(L)$ es una variedad lineal afín de $\mathcal{E}$ que pasa por $f(P)$ y tal que $D(f(L)) = \overrightarrow{f}(D(L))$. Simbólicamente:

$$f(L) = f(P) + \overrightarrow{f}(D(L)) \tag{3.5}$$

Demostración Hay que probar la igualdad de los segundos miembros de 3.4 y 3.5.

$\boxed{\subset}$ $Q \in \{f(P+\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in D(L)\} \Longrightarrow \exists \mathbf{v} \in D(L) \mid Q = f(P+\mathbf{v}) \Longrightarrow Q = f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) \Longrightarrow Q \in f(P) + \overrightarrow{f}(D(L))$.

$\boxed{\supset}$ $Q \in f(P) + \overrightarrow{f}(D(L)) \Longrightarrow \exists \mathbf{v}' \in \overrightarrow{f}(D(L)) \mid Q = f(P) + \mathbf{v}' \Longrightarrow \exists \mathbf{v} \in D(L) \mid \mathbf{v}' = \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) \Longrightarrow Q = f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) = f(P+\mathbf{v}) \Longrightarrow Q \in \{f(P+\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in D(L)\}$.

Proposición 3.1.2 Sean $(f, \overrightarrow{f})$ una aplicación afín de $\mathcal{E}$ y $L = P + D(L)$ una variedad lineal afín. Se verifica que

$$\dim\big(f(L)\big) = \dim\big(\overrightarrow{f}(D(L))\big) \tag{3.6}$$

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración Es consecuencia inmediata de la proposición 3.5 y de la definición de dimensión de una variedad lineal afín.

Consecuencia Si $(f, \overrightarrow{f})$ es una aplicación afín de $\mathcal{E}$ y $P \in X$, podemos considerar a X como la variedad que pasa por P y cuya dirección $D(X) = V$. Es decir,

$$X = P + V.$$

De aquí y teniendo en cuenta la igualdad 3.6 se tiene que

$$\dim\big(f(X)\big) = \dim\big(\overrightarrow{f}(D(X))\big) = \dim\big(\overrightarrow{f}(V)\big) \tag{3.7}$$

Proposición 3.1.3 Sea $(f, \overrightarrow{f})$ una aplicación afín de $\mathcal{E}$. Se verifica que:

1) f inyectiva $\iff$ $\overrightarrow{f}$ inyectiva
2) f sobreyectiva $\iff$ $\overrightarrow{f}$ sobreyectiva
3) f biyectiva $\iff$ $\overrightarrow{f}$ automorfismo de V

Demostración

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ f es inyectiva si y sólo si $\forall (P \neq Q) \in X,\ f(P) \neq f(Q)$. De acuerdo con ello,

   $\forall P \in X,\ \forall (\mathbf{u} \neq \mathbf{v}) \in V \Longrightarrow P + \mathbf{u} \neq P + \mathbf{v} \Longrightarrow f(P + \mathbf{u}) \neq f(P + \mathbf{v}) \Longrightarrow f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{u}) \neq f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) \Longrightarrow \overrightarrow{f}(\mathbf{u}) \neq \overrightarrow{f}(\mathbf{v})$.
   De donde deducimos que $\overrightarrow{f}$ es inyectiva.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ $\overrightarrow{f}$ es inyectiva si y sólo si $\forall (\mathbf{u} \neq \mathbf{v}) \in V,\ \overrightarrow{f}(\mathbf{u}) \neq \overrightarrow{f}(\mathbf{v})$.

   Procedamos al absurdo. Como $\forall P \in X,\ P + \mathbf{u} \neq P + \mathbf{v}$, si fuese $f(P + \mathbf{u}) = f(P + \mathbf{v})$ se tendría que

   $f(P + \mathbf{u}) = f(P + \mathbf{v}) \Longrightarrow f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{u}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{v}) \Longrightarrow \overrightarrow{f}(\mathbf{u}) = \overrightarrow{f}(\mathbf{v})$, con lo cual $\overrightarrow{f}$ no sería inyectiva, en contra de la hipótesis.

2. $\boxed{\Longleftrightarrow}$ Teniendo en cuenta la consecuencia 3.7, se tiene:

   f sobreyectiva $\iff f(X) = X \iff \dim(f(X)) = \dim(X) = \dim(V) \overset{3.7}{=} \dim(\overrightarrow{f}(V)) \iff \overrightarrow{f}(V) = V \iff \overrightarrow{f}$ es sobreyectiva.

3. Es consecuencia inmediata de las proposiciones anteriores.

Proposición 3.1.4 Sean $(f, \overrightarrow{f})$ y $(g, \overrightarrow{g})$ dos aplicaciones afines de $\mathcal{E}$. Se verifica que:

1. $(g \circ f, \overrightarrow{g \circ f})$ es una aplicación afín de $\mathcal{E}$ y $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.
2. Si f es biyectiva, entonces $(f^{-1}, \overrightarrow{f^{-1}})$ es una aplicación afín de $\mathcal{E}$ siendo $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

Demostración

1. Desde luego $g \circ f : X \longrightarrow X$ es aplicación por serlo la composición de dos aplicaciones y $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \in \mathrm{End}(V)$ por la misma razón.
   Por otra parte,
   $\forall P \in X, \forall \mathbf{u} \in V,\ (g \circ f)(P + \mathbf{u}) = g\big(f(P + \mathbf{u})\big) = g\big(f(P) + \overrightarrow{f}(\mathbf{u})\big) = g\big(f(P)\big) + \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f}(\mathbf{u})\big) = (g \circ f)(P) + (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\mathbf{u})$, lo que prueba la proposición.

2. Al ser f biyectiva, $\overrightarrow{f}$ es un automorfismos de V y, por tanto $f^{-1} : X \longrightarrow X$ es biyectiva y $\overrightarrow{f}^{-1}$ es un automorfismo de V. Probemos la segunda parte de la proposición apoyándonos en el apartado anterior y en el ejemplo 1 (pág. 29) .
   $\forall P \in X, \forall \mathbf{u} \in V,\ P + \mathbf{u} = \mathrm{id}_X(P + \mathbf{u}) = (f^{-1} \circ f)(P + \mathbf{u}) = P + (\overrightarrow{f^{-1}} \circ \overrightarrow{f})(\mathbf{u}) \Longrightarrow \overrightarrow{f^{-1}} \circ \overrightarrow{f} = \mathrm{id}_V \Longrightarrow \overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

3.2 Ecuación matricial de una aplicación afín

Proposición 3.2.1 Sea $(f, \overrightarrow{f})$ una aplicación afín de $\mathcal{E}$ donde se ha fijado el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Sean

$$\begin{aligned} P &= (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ P' = f(P) &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \\ f(O) &= (a_1, a_2, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Sea, por último, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ la matriz, respecto de la base $\mathcal{B}$, del endomorfismo $\overrightarrow{f}$. Se verifica que

$$(1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \left(\begin{array}{c|c} 1 & a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n \\ \hline 0 & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) \end{array} \right).$$

Demostración $\forall P \in X$, se tiene:

$$P = O + \overrightarrow{OP} \Longrightarrow f(P) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP}),$$

de donde

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}).$$

Simbólicamente, si llamamos $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ y $\mathbf{a}$, respectivamente, a los vectores de posición de los puntos P, P' y $f(O)$, podemos escribir que

$$\mathbf{p}'_{\mathcal{B}} = \mathbf{a}_{\mathcal{B}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) \tag{3.8}$$

o, lo que es equivalente,

$$(1, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}) = (1, \mathbf{p}'_{\mathcal{B}}) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{a}_{\mathcal{B}} \\ \hline 0 & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) \end{array} \right).$$

Definición 3.2.1 A la matriz

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{a}_{\mathcal{B}} \\ \hline 0 & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) \end{array} \right),$$

se le llama matriz de f respecto de la referencia $\mathcal{R}$.

Ejemplo 3 (TRASLACIÓN). En el espacio afín $\mathbb{R}^3$, dado el vector $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$, se define la aplicación

$$T_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

de modo que

$$T_{\mathbf{u}}(P) = P + \mathbf{u}.$$

Hallar la ecuación matricial de $T_{\mathbf{u}}$.

Solución De la definición

$$T_{\mathbf{u}}(P) = P' = P + \mathbf{u}$$

y utilizando la notación de la definición se tiene que

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3) + (a_1, a_2, a_3),$$

de donde

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3) = (1, x_1, x_2, x_3) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

que es la ecuación matricial de $T_{\mathbf{u}}$. Nótese que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T_{\mathbf{u}}) = I_3$, lo que nos vuelve a recordar que $\overrightarrow{T_{\mathbf{u}}} = \mathrm{id}_V$. (Ver el ejemplo 2 de la pág. 30.)

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Proposición 3.2.2 Sean $(f, \overrightarrow{f})$ y $(g, \overrightarrow{g})$ aplicaciones afines de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$ dos sistemas de referencia afines de $\mathcal{E}$. Se verifica que:

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(g)$.
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{R}', \mathcal{R})\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f)\mathcal{M}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$.

Las demostraciones son similares a las realizadas en las fórmulas correspondientes para espacios vectoriales.

3.3 Afinidades

Definición 3.3.1 Sea $(f, \overrightarrow{f})$ una aplicación afín de $\mathcal{E}$. Diremos que $(f, \overrightarrow{f})$ es una afinidad si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es un automorfismo de V ($\overrightarrow{f} \in \mathrm{Gl}(V)$).

Consecuencias De la definición se desprende:

1. $(f, \overrightarrow{f})$ es una afinidad si y sólo si la aplicación f es biyectiva (ver proposición 3.1.3).
2. $(f, \overrightarrow{f})$ es una afinidad si y sólo si $\det\big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})\big) \neq 0$.

El ejemplo 3 prueba que $T_{\mathbf{u}}$ (traslación de vector guía $\mathbf{u}$) es una afinidad.

Proposición 3.3.1 (EL GRUPO AFÍN) Sea $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ el conjunto de las afinidades de $\mathcal{E}$. Se verifica que $\big(\mathrm{GA}(\mathcal{E}), \circ\big)$ es un grupo, llamado el grupo afín de $\mathcal{E}$.

Demostración Sean $(f, \overrightarrow{f}), (g, \overrightarrow{g}) \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Baste recordar que la composición de aplicaciones biyectivas y de automorfismos es, respectivamente una aplicación biyectiva y un automorfismo. De aquí que, junto con lo demostrado en la proposición 3.1.4, sea inmediato que:

g.1) $(g \circ f, \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}) \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

g.2) $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_V) \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

g.3) $(f^{-1}, \overrightarrow{f}^{-1}) \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

Definición 3.3.2 Sea $(f, \overrightarrow{f}) \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

1. Decimos que $P \in X$ es un *punto doble* para f, si $f(P) = P$.
2. Dada la variedad lineal afín L, diremos que L es *doble* para f si $f(L) \subset L$. Es decir si
$$\forall P \in L,\ f(P) \in L.$$
3. Diremos que L es una *variedad de puntos dobles* para f si todos los puntos de L son dobles. Es decir si
$$\forall P \in L,\ f(P) = P.$$

Proposición 3.3.2 Sea $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia afín de $\mathcal{E}$ y $(f, \overrightarrow{f}) \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Todo punto $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in X$ es doble para f si y sólo si es solución del sistema

$$\mathbf{x}(I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})) = \mathbf{a}, \tag{3.9}$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(O)$.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración Recordando la ecuación de una aplicación afín (ver fórmula 3.8), se tiene:

P doble $\Longleftrightarrow f(P) = P \Longleftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{p}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) \Longleftrightarrow \mathbf{p}(I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})) = \mathbf{a} \Longleftrightarrow \mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es solución de $\mathbf{x}(I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})) = \mathbf{a}$.

Consecuencias La ecuación 3.9 es la expresión matricial de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas.

1. Las ecuaciones de una variedad de puntos dobles para f (en adelante L_f) viene dada por

$$L_f \equiv \mathbf{x}(I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})) = \mathbf{a}.$$

   Si el sistema es compatible ($L_f \neq \emptyset$), se tendrá que

$$\dim(L_f) = n - \mathrm{rg}(I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})).$$

2. f tiene un único punto doble si y sólo si $|I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})| \neq 0$.

3. Del punto anterior y sabiendo que $|\lambda I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})| = 0$ es la ecuación característica de $\overrightarrow{f}$, se deduce inmediatamente que es condición necesaria y suficiente para que f tenga un único punto doble que $\lambda = 1$ no sea un autovalor de $\overrightarrow{f}$.

Nota En realidad, tanto la definición como la proposición precedentes así como sus consecuencias son aplicables a cualquier aplicación afín $(f, \overrightarrow{f})$ de $\mathcal{E}$. Sin embargo, dado que nuestro objetivo es estudiar un tipo especial de afinidades (movimientos en el plano y en el espacio), hemos preferido incluirlas en esta Sección.

Ejemplo 4 (HOMOTECIA). Se llama homotecia de centro C y razón $k \neq 0$ a la aplicación

$$H_{C,k} : X \longrightarrow X$$

definida por

$$P' = H_{C,k}(P) = C + k\overrightarrow{CP}.$$

En el caso particular en que $X = \mathbb{R}^3$, calcular las ecuaciones de la homotecia en la que $C = (a_1, a_2, a_3)$.

Solución De la definición de $H_{C,k}$, se tiene:

$$(x_1', x_2', x_3') = (a_1, a_2, a_3) + k(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3),$$

de donde

$$(x_1', x_2', x_3') = \big(a_1(1-k), a_2(1-k), a_3(1-k)\big) + k(x_1, x_2, x_3).$$

Expresando matricialmente este resultado, obtenemos:

- **Ecuación matricial**

$$(1,\, x_1', x_2', x_3') = (1,\, x_1, x_2, x_3) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & a_1(1-k) & a_2(1-k) & a_3(1-k) \\ \hline 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right).$$

  de donde deducimos que $H_{C,k}$ es una afinidad ya que $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(H_{C,k})) = k^3 \neq 0$.

- **Endomorfismo asociado**

  Nótese que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{H_{C,k}}) = kI_3$ lo que equivale a decir que la aplicación asociada a $H_{C,k}$ es

$$\overrightarrow{H_{C,k}} = k\,\mathrm{id}_V.$$

- **Variedad de puntos dobles**

  Haciendo $(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3)$, se tiene que

$$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} (1-k)x_1 & = & (1-k)a_1 \\ (1-k)x_2 & = & (1-k)a_2 \\ (1-k)x_3 & = & (1-k)a_3 \end{array} \right.$$

  Por tanto,

  1. Si $k \neq 1$, $L_f = (a_1, a_2, a_3) = C$ y el único punto doble es el centro C de la homotecia.
  2. Si $k = 1$, $L_f = \mathbb{R}^3$. Nótese, que en este caso, $H_{C,k} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Ejemplo 5 En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ Calcular la ecuación matricial y los puntos dobles de la *proyección ortogonal* sobre el plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

Solución Sea $P = (a, b, c)$ y $P' = (a', b', c')$ la proyección ortogonal de P sobre π . Las ecuaciones paramétricas de la recta r, perpendicular a π y que pasa por P son:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a + t \\ y & = & b + t \\ z & = & c + t \end{array} \right.$$

Como $P' = r \cap \pi$ basta sustituir x, y y z en la ecuación de π con lo que se obtiene

$$(a + b + c) + 3t = 3 \Longrightarrow t = 1 - \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} a' & = & 1 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c, \\ b' & = & 1 - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c, \\ c' & = & 1 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c. \end{array}$$

- La ecuación matricial de la proyección ortogonal vendrá, pues, dada por

$$(1,\, x',\, y',\, z') = (1,\, x,\, y,\, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right).$$

  Como

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

  deducimos que la proyección ortogonal sobre el plano π *no* es una afinidad.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA

- La variedad de puntos dobles tiene por ecuaciones

$$L_f \equiv \mathbf{x}(I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})) = \mathbf{a}.$$

Es decir,

$$L_f \equiv (x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (1, 1, 1).$$

Como era obvio, resulta que

$$L_f = \pi \equiv x + y + z = 3.$$

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA -

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA - UNIVERSIDAD DE SEVILLA -