Capítulo 4

Movimientos en el plano y en el espacio

4.1 Movimientos: definición y propiedades

Nota Hasta el final del presente capítulo, $\mathcal{E} = (X, V, +)$ representará un espacio euclídeo de dimensión n y $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia métrico de $\mathcal{E}$.

Definición 4.1.1 Diremos que la aplicación afín $(f, \overrightarrow{f})$ de $\mathcal{E}$, es un movimiento si y sólo si $\overrightarrow{f}$ (endomorfismo de V asociado a f) es un endomorfismo ortogonal o, en el lenguaje clásico, $\overrightarrow{f}$ es una isometría de V.

Consecuencias Sea $\mathrm{MO}(\mathcal{E})$ el conjunto de los movimientos de $\mathcal{E}$, $\mathcal{O}(V)$ el conjunto de los endomorfismos ortogonales de V y $\mathcal{O}(n)$ el conjunto de las matrices ortogonales de orden n sobre $\mathbb{R}$. Son inmediatas las siguientes propiedades:

c.1) $M_0 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) \in \mathcal{O}(n)$ por ser $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Por tanto, $M_{00} = \det(M_0) = \pm 1$.

c.2) De lo anterior se deduce inmediatamente que $\mathrm{MO}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

c.3) $(\mathrm{MO}(\mathcal{E}), \circ)$ es un subgrupo del grupo afín $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ llamado grupo de los movimientos de $\mathcal{E}$.

Definición 4.1.2 Sea $(f, \overrightarrow{f}) \in \mathrm{MO}(\mathcal{E})$ y sea $M_0 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$.

1. Diremos que $(f, \overrightarrow{f})$ es un movimiento directo si $M_0 \in \mathcal{O}_+(n)$, donde, recordamos, que $O_+(n)$ es el conjunto de las matrices ortogonales cuyo determinante es igual a 1.

2. Diremos que $(f, \overrightarrow{f})$ es un movimiento inverso si $M_0 \in \mathcal{O}_-(n)$, donde $O_-(n)$ es el conjunto de las matrices ortogonales cuyo determinante es igual a -1.

Consecuencia Como consecuencia inmediata de la definición se tiene que $\big(\mathrm{MO}_+(\mathcal{E}), \circ\big)$ es un subgrupo de $\mathrm{MO}(\mathcal{E})$ llamado el grupo de los movimientos directos de $\mathcal{E}$.

Proposición 4.1.1 Es condición necesaria y suficiente para que la aplicación afín $(f, \overrightarrow{f})$ sea un movimiento, que la aplicación f conserve las distancias. Simbólicamente:

$$(f, \overrightarrow{f}) \in \mathrm{MO}(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \forall A, B \in X,\ \mathrm{d}(f(A), f(B)) = \mathrm{d}(A, B).$$

Demostración

$$(f,\overrightarrow{f}\,)\in \mathrm{MO}(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f}\in\mathcal{O}(V) \Longleftrightarrow \forall A,B\in X,\ |\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{AB})|=|\overrightarrow{AB}| \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |\overrightarrow{f(A)f(B)}|=|\overrightarrow{AB}| \Longleftrightarrow \mathrm{d}(f(A),f(B))=\mathrm{d}(A,B).$$

Proposición 4.1.2 Si $(f,\overrightarrow{f}\,)\in \mathrm{MO}(\mathcal{E})$, entonces f conserva la amplitud de los ángulos pero, en general, no conserva la orientación de los mismos.
En otras palabras: dados $A,B,C\in X \mid \overrightarrow{AB}\neq \mathbf{0}\neq \overrightarrow{AC}$. Sean

$$\alpha=(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}),\quad \beta=(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(A)f(C)}}),$$

entonces

$$(f,\overrightarrow{f}\,)\in \mathrm{MO}(\mathcal{E}) \Longrightarrow \cos\beta=\cos\alpha.$$

Demostración $\overrightarrow{f}\in\mathcal{O}(V) \Longleftrightarrow \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in V,\ \overrightarrow{f}\,(\mathbf{x})\bullet\overrightarrow{f}\,(\mathbf{y})=\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}$. Por consiguiente,

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{f(A)f(B)}\bullet\overrightarrow{f(A)f(C)}}{|\overrightarrow{f(A)f(B)}|\,|\overrightarrow{f(A)f(C)}|}=\frac{\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{AB})\bullet\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}=\cos\alpha.$$

Que f no conserva los ángulos queda de manifiesto en el siguiente ejemplo.
Consideremos la aplicación afín $(f,\overrightarrow{f}\,)\in \mathrm{MO}(\mathcal{E})$ donde $\mathcal{E}=(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2,+)$ cuya expresión matricial es

$$(1,\,x',\,y')=(1,\,x,\,y)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Dados los puntos $A=(1,2)$, $B=(2,5)$ y $C=(2,3)$ se tiene que

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&5\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&5&2\\1&3&2\end{pmatrix},$$

de donde

$$f(A)=(2,1),\ f(B)=(5,2),\ f(C)=(3,2).$$

Por tanto,

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{f(A)f(B)}\bullet\overrightarrow{f(A)f(C)}}{|\overrightarrow{f(A)f(B)}|\,|\overrightarrow{f(A)f(C)}|}\Longrightarrow\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Sin embargo, es fácilmente comprobable los ángulos α y β tienen distinta orientación ya que

$$\mathrm{sig}\left(\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}\right)\neq\mathrm{sig}\left(\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix}\right),$$

donde las filas de los determinantes son, respectivamente, las coordenadas de los vectores $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$ y $\left\{\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(A)f(C)}\right\}$. La razón es que $(f,\overrightarrow{f}\,)\in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E})$.

4.2 Movimientos en el plano. Ejemplos

Nota En lo que sigue se supondrá que $(V, \bullet)$ es un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 y que $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ es un sistema de referencia métrico de $\mathcal{E}$.

Definición 4.2.1 (IDENTIDAD) Llamamos identidad de X a la aplicación

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X,$$

definida por

$$\forall P \in X,\ \mathrm{id}_X(P) = P' = P.$$

Ecuaciones Sea $P = (x, y)$ y $P' = (x', y') = \mathrm{id}_X(P)$. Por definición se tiene que

$$(x', y') = (x, y) \Longrightarrow (1,\ x', y') = (1,\ x, y) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Claramente $\mathrm{id}_X \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.

Definición 4.2.2 (TRASLACIÓN) Sea $\mathbf{u} = (\alpha, \beta) \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Llamamos traslación de vector guía $\mathbf{u}$ a la aplicación

$$T_{\mathbf{u}} : X \longrightarrow X,$$

definida por

$$\forall P \in X,\ T_{\mathbf{u}}(P) = P' = P + \mathbf{u}.$$

Ecuaciones Sea $P = (x, y)$ y $P' = (x', y') = T_{\mathbf{u}}(P)$.

$$P' = P + \mathbf{u} \Longrightarrow (x', y') = (x, y) + (\alpha, \beta) = (\alpha + x, \beta + y),$$

de donde

$$(1,\ x', y') = (1,\ x, y) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Como en el caso anterior, $T_{\mathbf{u}} \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.

Definición 4.2.3 (SIMETRÍA CENTRAL) Dado un punto $C = (\alpha, \beta)$, llamamos simetría central de centro C a la aplicación

$$\sigma_C : X \longrightarrow X,$$

definida por

$$\forall P \in X,\ \sigma_C(P) = P' \Longleftrightarrow \overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$$

Se desprende de la definición que si $P = C$, $\overrightarrow{CP'} = \mathbf{0}$, de donde $P' = C$. Es decir, $\sigma_C(C) = C$. El centro de la simetría es pues un punto doble.

Ecuaciones Sea $P = (x, y)$ y $P' = (x', y') = \sigma_C(P)$.

$$\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP} \Longrightarrow (x' - \alpha,\ y' - \beta) = (\alpha - x,\ y - \beta(x', y') = (2\alpha - x,\ 2\beta - y),$$

de donde

$$(1,\ x', y') = (1,\ x, y) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2\alpha & 2\beta \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y, por tanto, $\sigma_C \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.

Definición 4.2.4 GIRO Dados el punto $C \in X$ y el ángulo orientado φ, llamamos giro de centro C y amplitud φ a la aplicación

$$G_{C,\varphi} : X \longrightarrow X,$$

definida por

- $\forall P \neq C,\ G_{C,\varphi}(P) = P' \Longleftrightarrow (|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{CP'}|) \wedge (\widehat{PCP'} = \varphi)$.
- $G_{C,\varphi}(C) = C$.

Ecuaciones Supondremos dos casos:

1. Centro$O = (0,0)$, ángulo orientado φ.

   Sea $P = (x,y)$ y $P' = (x',y') = G_{O,\varphi}(P)$ y sean $\overrightarrow{OU_1} = \mathbf{u}_1$ y

   $$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OU_1}\overrightarrow{OP}}), \quad \beta = (\widehat{\overrightarrow{OU_1}\overrightarrow{OP'}}).$$

   Sea $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OP'}| = r$. Se tiene que:

   $$\begin{array}{rclcl} \cos\varphi & = & \cos(\beta-\alpha) & = & \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha, \\ \operatorname{sen}\varphi & = & \operatorname{sen}(\beta-\alpha) & = & \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha. \end{array}$$

   Multiplicando ambos miembros por r^2, se tiene

   $$\begin{array}{rcl} r^2\cos\varphi & = & (r\cos\beta)(r\cos\alpha) + (r\operatorname{sen}\beta)(r\operatorname{sen}\alpha), \\ r^2\operatorname{sen}\varphi & = & (r\operatorname{sen}\beta)(r\cos\alpha) - (r\cos\beta)(r\operatorname{sen}\alpha), \end{array}$$

   de donde

   $$\begin{array}{rcl} r^2\cos\varphi & = & x'x + y'y \\ r^2\operatorname{sen}\varphi & = & y'x - x'y \end{array}$$

   Resolviendo el sistema anterior en las incógnitas x', y' y teniendo en cuenta que $x^2+y^2 = r^2$, se tiene que

   $$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & x\cos\varphi - y\operatorname{sen}\varphi \\ y' & = & x\operatorname{sen}\varphi + y\cos\varphi \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

   Es decir,

   $$(1,\ x',y') = (1,\ x,y)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{array}\right), \tag{4.2}$$

   matriz que nos indica que $G_{O,\varphi} \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.

2. $C = (\alpha,\beta)$, ángulo orientado φ

   Sea $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ el sistema de referencia métrico inicial. Tomemos como nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{C, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. El problema consiste en calcular $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f)$.
   Recordemos la fórmula

   $$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{R},\mathcal{R}')\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}(f)\mathcal{M}(\mathcal{R}',\mathcal{R}) \tag{4.3}$$

   de la que conocemos:

   $$\mathcal{M}(\mathcal{R},\mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -\alpha & -\beta \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \mathcal{M}(\mathcal{R}',\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

y, por supuesto,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{array}\right).$$

Sustituyendo en 4.3 se tiene que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha - \alpha\cos\varphi + \beta\operatorname{sen}\varphi & \beta - \alpha\operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi \\ \hline 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{array}\right).$$

Nota Hemos seguido este procedimiento con el fin de revisar los conceptos de matriz de un cambio de sistema de referencia así como el de matriz del cambio de sistema de referencia de una aplicación afín. Sin embargo hay que admitir que hubiera resultado más sencillo realizar en las ecuaciones 4.1, los siguientes cambios:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x' + \alpha \\ y & = & y' + \beta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x'' + \alpha \\ y' & = & y'' + \beta \end{array}\right.$$

Definición 4.2.5 (SIMETRÍA AXIAL) Dada la recta r, llamamos simetría axial de eje r a la aplicación

$$\sigma_r : X \longrightarrow X,$$

definida por

- Si $P \in r$, entonces $\sigma_r(P) = P$.
- Si $P \notin r$, entonces $\sigma_r(P) = P'$, si y sólo si r es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

Ejemplo Por razones de operatividad calcularemos las ecuaciones de la simetría para un caso concreto. El caso general se resolvería exactamente por el mismo procedimiento.
Sean $r \equiv x - 2y - 5 = 0$, $P = (a, b)$ y $P' = (a', b')$. Como r ha de ser la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$, procederemos del modo siguiente:

1. **Cálculo de la recta que pasa por P y es perpendicular a r.**
   Las ecuaciones paramétricas de dicha recta son

$$PP' \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a + t \\ y & = & b - 2t \end{array}\right.$$

2. **Cálculo del punto $M = PP' \cap r$.**

$$M \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a + t \\ y & = & b - 2t \\ x - 2y & = & 5 \end{array}\right.$$

   Resolviendo dicho sistema se obtiene que

$$t = 1 - \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b,$$

$$x = 1 + \frac{4}{5}a + \frac{2}{5}b,$$

$$y = -2 + \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b.$$

   Por consiguiente,

$$M = \left(1 + \frac{4}{5}a + \frac{2}{5}b,\ -2 + \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b\right).$$

3. **Cálculo de P'**

   Como M debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, se tiene que

$$\left(1+\frac{4}{5}a+\frac{2}{5}b,\ -2+\frac{2}{5}a+\frac{1}{5}b\right)=\frac{(a,b)+(a',b')}{2},$$

   de donde

$$(a',b')=\left(2+\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b,\ -4+\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b\right).$$

4. **Ecuaciones de f**

   Del resultado anterior, se tiene que

$$(1,\,x',\,y')=(1,\,x,\,y)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & -4 \\ \hline 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right).$$

Proposición 4.2.1 (PRODUCTO DE SIMETRÍAS AXIALES) Dadas las rectas r y r', si consideramos las simetrías axiales σ_r y $\sigma_{r'}$, se verifica que:

1. Si $r=r'$, entonces
$$\sigma_{r'}\circ\sigma_r=\mathrm{id}_X.$$
2. Si $r\parallel r'$ y P y P' son los pies de cualquier recta perpendicular común a r y a r', entonces
$$\sigma_r'\circ\sigma_r=T_{2\overrightarrow{PP'}}.$$
3. Si $r\cap r'=C$ y $\varphi=(\widehat{r,r'})$ (ángulo orientado), entonces
$$\sigma_r'\circ\sigma_r=G_{C,2\varphi}.$$

Demostración

1. Sea $r=r'$. Es evidente, por la definición de simetría, que
$$\sigma_r(P)=P'\Longleftrightarrow\sigma_r(P')=P$$
   y, por tanto,
$$\sigma_r^2(P)=\sigma_r(\sigma_r)(P)=P\Longrightarrow\sigma_r^2=\mathrm{id}_X,$$
   de donde deducimos también que $\sigma_r^{-1}=\sigma_r$.
2. Sea $r\parallel r'$ y P y P', respectivamente, la intersección los pies de una perpendicular común a r y a r' trazada por $A\in X$. Sean $\sigma_r(A)=A'$ y $\sigma_{r'}(A')=A''$. Es claro que
$$\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=\underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\overrightarrow{PA'}}+\underbrace{\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{A'P'}}_{\overrightarrow{PP'}}+\underbrace{\overrightarrow{P'A''}}_{\overrightarrow{A'P'}}=2\overrightarrow{PP'}.$$
3. Sean $r\cap r'=C$, $A\in X$, $\sigma_r(A)=A'$ y $\sigma_{r'}(A')=A''$.
   Sean también $\overline{AA'}\cap r=P$ y $\overline{A'A''}\cap r'=P'$.
   Por una parte, es claro que
$$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{CA'}\right|=\left|\overrightarrow{CA''}\right|.$$
   Por otra, se tiene que
$$\widehat{ACA''}=\widehat{ACA'}+\widehat{A'CA''}=\underbrace{\widehat{ACP}}_{\widehat{PCA'}}+\underbrace{\widehat{PCA'}+\widehat{A'CP'}}_{\widehat{PCP'}}+\underbrace{\widehat{P'CA''}}_{\widehat{A'CP'}}=2\widehat{PCP'}=2\varphi.$$

4.3 Clasificación de los movimientos del plano

Recordemos que si $\dim(V) = 2$ y $(f, \overrightarrow{f}) \in \mathrm{MO}(\mathcal{E})$, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V respecto de la cual $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ es de una de las formas

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Caso 1. Movimientos directos Si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) = A_1$, como $A_1 \in \mathcal{O}_+(2)$, $(f, \overrightarrow{f})$ será uno de los siguientes movimientos directos:

1. $b = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$.

   (a) $a = 1$. Si este es el caso, las ecuaciones de f son

   $$(1\,x',\, y') = (1\,x,\, y) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha + x \\ y' & = & \beta + y \end{array} \right.$$

   De donde la variedad de puntos dobles, obtenida haciendo $(x', y') = (x, y)$, es

   $$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 0x & = & \alpha \\ 0y & = & \beta \end{array} \right.$$

   sistema, cuya compatibilidad depende de α y β.

   a.1) $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. En este caso

   $$L_f = X, \quad f \equiv (x', y') = (x, y),$$

   por lo que f es la identidad de X ($f = \mathrm{id}_X$).

   a.2) $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. En cuyo caso

   $$L_f = \emptyset \quad f \equiv (x', y') = (x + \alpha, y + \beta).$$

   Es decir, f es una traslación de vector guía $\mathbf{u} = (\alpha, \beta)$. En efecto, si $P = (x, y)$ y $P' = (x', y')$, se tiene que

   $$\overrightarrow{PP'} = (x', y') - (x, y) = (x + \alpha, y + \beta) - (x, y) = (\alpha, \beta)$$

   Elementos dobles

   Es doble, toda recta r tal que $\mathbf{u} \in D(r)$.

   (b) $a = -1$. Si este es el caso, las ecuaciones de f son

   $$(1\,x',\, y') = (1\,x,\, y) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha - x \\ y' & = & \beta - y \end{array} \right.$$

   De donde la variedad de puntos dobles, obtenida haciendo $(x', y') = (x, y)$, es

   $$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \alpha \\ 2y & = & \beta \end{array} \right.$$

   Por tanto, $L_f = C = \left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$.

   Veamos que f es una simetría central de centro C. En efecto, si $P = (x, y)$ y $P' = (x', y')$, se tiene que

   $$\overrightarrow{PP'} = (x', y') - (x, y) = (\alpha - x, \beta - y) - (x, y) = (\alpha, \beta)$$

   y es claro que el punto medio del segmentos $\overline{PP'}$ es el punto C.

   Elementos dobles

- El único punto doble es el centro C de la simetría.
- Es doble, toda recta r tal que $C \in r$.

2. $b \neq 0$.
   Si este es el caso, las ecuaciones de f son

$$(1\,x',\,y') = (1\,x,\,y)\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha + ax - by \\ y' & = & \beta + bx + ay \end{array} \right.$$

De donde la variedad de puntos dobles, obtenida haciendo $(x', y') = (x, y)$, es

$$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + (a-1)x - by \\ 0 & = & \beta + bx + (a-1)y \end{array} \right.$$

El determinante de los coeficientes del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{vmatrix} = 2(1-a) \neq 0,$$

ya que $a \neq 1$ y, por consiguiente, el sistema L_f tiene solución única. Es decir,

$$L_f = C = (c_1, c_2),$$

donde (c_1, c_2) es la solución de dicho sistema.
Veamos que f es un giro de centro C y amplitud el ángulo ϖ tal que $\cos\varphi = a$.
En efecto, habrá que probar que

$$\forall P \neq C,\ P' = f(P) \Longrightarrow \left(|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{CP'}|\right) \wedge \left(\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}}\right) = a\right).$$

- Como $f(C) = C$ y $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(V)$, se tiene que

$$|\overrightarrow{CP'}| = |\overrightarrow{f(C)f(P)}| = |\,\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{CP})| = |\overrightarrow{CP}|.$$

- Sea

$$\overrightarrow{CP} = (v_1, v_2) \Longrightarrow |\overrightarrow{CP}|^2 = |\overrightarrow{CP'}|^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

  Por otra parte,

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}}\right) = \frac{\overrightarrow{CP} \bullet \overrightarrow{CP'}}{|\overrightarrow{CP}|\,|\overrightarrow{CP'}|} = \frac{\overrightarrow{CP} \bullet \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{CP})}{|\overrightarrow{CP}|^2}$$

  y como

$$\overrightarrow{CP} \bullet \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{CP}) = (v_1, v_2) \bullet (v_1, v_2)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a(v_1^2 + v_2^2),$$

  sustituyendo se tiene que

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}}\right) = a.$$

- El sentido del ángulo queda unívocamente determinado por A_1 ya que al ser

$$a^2 + b^2 = 1 \Longrightarrow \operatorname{sen}\varphi = b.$$

Caso 2. Movimientos inversos Si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) = A_2$, como $A_2 \in \mathcal{O}_-(2)$, $(f, \overrightarrow{f}) \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E})$. Por otra parte, los autovalores de A_2 son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$, por lo que existe una base ortonormal $\mathcal{C}$ de V respecto de la cual

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, respecto del sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{C}\}$ la expresión matricial de $(f, \overrightarrow{f})$ será

$$(1,\, x',\, y') = (1,\, x,\, y) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

o bien,

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & \alpha + x \\ y' & = & \beta - y \end{array}\right\} \Longrightarrow L_f \equiv \left\{\begin{array}{rcl} 0x & = & \alpha \\ 2y & = & b \end{array}\right.$$

sistema que tiene solución si y sólo si $\alpha = 0$.
Caben, pues, 2 casos:

2.1) $\alpha = 0$ en cuyo caso

$$L_f = r \equiv y = \frac{\beta}{2}.$$

Veamos que $(f, \overrightarrow{f})$ es una simetría axial de eje la recta r.
En efecto, sea M el punto medio de $\overline{PP'}$, hay que probar que:

- $M \in r$. En efecto,

$$\forall P = (x, y) \Longrightarrow P' = (x, \beta - y) \Longrightarrow M = \left(x, \frac{\beta}{2}\right) \Longrightarrow M \in r.$$

- $\overrightarrow{PP'} \in D(r)^{\perp}$ lo cual es inmediato ya que

$$\overrightarrow{PP'} = (0, \beta - 2y),\ D(r) = \langle (1, 0) \rangle \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} \in D(r)^{\perp}.$$

Elementos dobles

1. PUNTOS DOBLES Son dobles todos los puntos del eje de simetría.
2. RECTAS DOBLES
   - El eje de simetría es una recta de puntos dobles.
   - Es doble toda recta perpendicular al eje de simetría.

2.2) $\alpha \neq 0$, en cuyo caso

$$L_f = \emptyset.$$

Veamos que,

$$f = \sigma_r \circ T_{\mathbf{u}} = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_r,$$

donde

- σ_r es una simetría axial de eje la recta $r \equiv y = \dfrac{\beta}{2}$.
- $T_{\mathbf{u}}$ es una traslación de vector guía $\mathbf{u} = (\alpha,\, 0)$ que, como es evidente $\mathbf{u} \in D(r)$.

En efecto, basta comprobar que

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \beta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \beta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

f recibe el nombre de *simetría axial con deslizamiento.*

Elementos dobles
El único elementos doble es la recta r (eje de la simetría axial).

Un aspecto importante en la práctica es calcular el eje r de la simetría así como el vector $\mathbf{u}$ de la traslación para lo cual es necesario conocer un punto de r.
Recordamos a este respecto que $f(O) = (\alpha, \beta)$.

Proposición 4.3.1 Sea $(f, \overrightarrow{f})$ un movimiento tal que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

se verifica que el punto medio M del segmento $\overline{Of(O)}$, pertenece a r (eje de la simetría axial).

Demostración En efecto

$$M = \frac{1}{2}(\alpha, \beta) \Longrightarrow M \in r \equiv y = \frac{\beta}{2}.$$

Consecuencias Como $M \in r \Longrightarrow f(M) \in r$ (r es doble). Por tanto,

$$\begin{array}{rrcl} 1. & r & = & M + \langle \overrightarrow{Mf(M)} \rangle \\ 2. & \mathbf{u} & = & \overrightarrow{Mf(M)} \end{array}$$

Nota En lo que sigue y a efectos de simplificar la escritura, llamaremos M a la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f)$. Es decir,

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \alpha\ \beta \\ \hline 0 & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) \end{array}\right).$$

M_0 al menor obtenido prescindiendo de la primera fila y de la primera columna de M. Es decir, $M_0 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ y será $M_{00} = \det(M_0)$.
Por último L_f representará siempre a la variedad de puntos dobles de f.

Movimientos en el plano
Clasificación

Movimientos directos

$$M_{00} = 1 \begin{cases} L_f = X \Longleftrightarrow M = I_3 \Longleftrightarrow f = \mathrm{id}_X \\ L_f = \emptyset \Longleftrightarrow M_0 = I_2,\ M \neq I_3 \Longleftrightarrow f = T_{\mathbf{u}}{}^{(\mathrm{i})} \\ L_f = P \begin{cases} M_0 = -I_2 \Longleftrightarrow f = \sigma_P \\ M_0 \neq -I_2 \Longrightarrow f = G_{P,\varphi}{}^{(\mathrm{ii})} \end{cases} \end{cases}$$

Movimientos inversos

$$M_{00} = -1 \begin{cases} L_f = \emptyset \Longleftrightarrow f = \sigma_r \circ T_{\mathbf{u}} = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_r{}^{(\mathrm{iii})} \\ L_f = r \Longleftrightarrow f = \sigma_r \end{cases}$$

(i) $\mathbf{u} = (\alpha, \beta)$.
(ii) $\cos\varphi = a$, $\operatorname{sen}\varphi = b$.
(iii) $r = M + \left\langle \overrightarrow{Mf(M)} \right\rangle$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$ donde M es el punto medio del segmento $\overline{Of(O)}$.

4.4 Movimientos en el espacio. Ejemplos

Nota En lo que sigue se supondrá que $(V, \bullet)$ es un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y que $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ es un sistema de referencia métrico de $\mathcal{E}_3$.

Definición 4.4.1 (IDENTIDAD) Llamamos identidad de X a la aplicación

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X,$$

definida por

$$\forall P \in X,\ \mathrm{id}_X(P) = P' = P.$$

Ecuaciones Sea $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z') = \mathrm{id}_X(P)$. Por definición se tiene que

$$(x', y', z') = (x', y', z') \Longrightarrow (1,\ x', y', z') = (1,\ x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Claramente $\mathrm{id}_X \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.

Definición 4.4.2 (TRASLACIÓN) Sea $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Llamamos traslación de vector guía $\mathbf{u}$ a la aplicación

$$T_{\mathbf{u}} : X \longrightarrow X,$$

definida por

$$\forall P \in X,\ T_{\mathbf{u}}(P) = P' = P + \mathbf{u}.$$

Ecuaciones Sea $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z') = T_{\mathbf{u}}(P)$.

$$P' = P + \mathbf{u} \Longrightarrow (x', y', z') = (x, y, z) + (\alpha, \beta) = (\alpha + x, \beta + y, \gamma + z),$$

de donde

$$(1,\, x', y', z') = (1,\, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Como en el caso anterior, $T_{\mathbf{u}} \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.

Definición 4.4.3 (SIMETRÍA CENTRAL) Dado un punto $C = (\alpha, \beta, \gamma)$, llamamos simetría central de centro C a la aplicación

$$\sigma_C : X \longrightarrow X,$$

definida por

$$\forall P \in X,\ \sigma_C(P) = P' \Longleftrightarrow \overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$$

Se desprende de la definición que si $P = C$, $\overrightarrow{CP'} = \mathbf{0}$, de donde $P' = C$. Es decir, $\sigma_C(C) = C$. El centro de la simetría es pues un punto doble.

Ecuaciones Sea $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z') = \sigma_C(P)$.

$$\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP} \Longrightarrow (x' - \alpha,\, y' - \beta,\, z' - \gamma) = (\alpha - x,\, y - \beta)$$

de donde

$$(x',\, y',\, z') = (2\alpha - x,\, 2\beta - y,\, 2\gamma - z).$$

Expresando este resultado matricialmente, resulta que

$$(1,\, x', y', z') = (1,\, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y, por tanto, $\sigma_C \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E})$.

Definición 4.4.4 (SIMETRÍA AXIAL) Dada la recta r, llamamos simetría axial de eje r a la aplicación

$$\sigma_r : X \longrightarrow X,$$

definida por

- Si $P \in r$, entonces $\sigma_r(P) = P$.
- Si $P \notin r$, entonces $\sigma_r(P) = P'$, si y sólo si r es una mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

Ejemplo Por razones de operatividad calcularemos las ecuaciones de le simetría para un caso concreto. El caso general se resolvería exactamente por el mismo procedimiento.
Calcular la ecuación matricial de la simetría σ_r, donde

$$r \equiv x = y = z.$$

Sean $P = (a, b, c)$ y $P' = \sigma_r(P) = P' = (a', b', c')$. Como r ha de ser la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$, procederemos del modo siguiente:

1. **Cálculo del plano π que pasa por $P = (a, b, c)$ y es perpendicular a r.**
   La ecuación de dicho plano es

$$\pi \equiv (x - a) + (y - b) + (z - c) = 0.$$

2. **Cálculo del punto $M = \pi \cap r$.**

$$M \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + x = a + b + c \\ x = y = z \end{array} \right.$$

Resolviendo dicho sistema se obtiene que

$$x = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

$$y = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

$$z = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

Por consiguiente,

$$M = \left(\frac{1}{3}(a + b + c),\ \frac{1}{3}(a + b + c),\ \frac{1}{3}(a + b + c) \right).$$

3. **Cálculo de P'**

Como M debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, se tiene que

$$\left(\frac{1}{3}(a + b + c),\ \frac{1}{3}(a + b + c),\ \frac{1}{3}(a + b + c) \right) = \frac{(a, b, c) + (a', b', c')}{2},$$

de donde

$$(a', b', c') = \left(-\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c,\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c,\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \right).$$

4. **Ecuaciones de f**

Del resultado anterior, se tiene que

$$(1,\ x',\ y',\ z') = (1,\ x,\ y,\ z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right).$$

Como puede observarse $f \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$ ya que $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})\right) = 1$ y, por supuesto, dicha matriz es ortogonal.
Puede llamar la atención este hecho, ya que las simetrías axiales en el plano son movimientos inversos.

Definición 4.4.5 (SIMETRÍA ESPECULAR) Dado el plano π, llamamos simetría especular o respecto del plano π a la aplicación

$$\sigma_\pi : X \longrightarrow X,$$

definida por

- Si $P \in \pi$, entonces $\sigma_\pi(P) = P$.
- Si $P \notin \pi$, entonces $\sigma_\pi(P) = P'$, si y sólo si π es el plano mediador del segmento $\overline{PP'}$.

Ejemplo Por razones de operatividad calcularemos las ecuaciones de la simetría para un caso concreto. El caso general se resolvería exactamente por el mismo procedimiento.
Calcular la ecuación matricial de la simetría σ_π, donde

$$\pi \equiv x + y + z = 3$$

Sean $P = (a, b, c)$ y $P' = \sigma_\pi(P) = P' = (a', b', c')$. Como π ha de ser el plano mediador del segmento $\overline{PP'}$, procederemos del modo siguiente:

1. **Cálculo de la recta r que pasa por $P = (a, b, c)$ y es perpendicular a π.**
   La ecuación de dicha recta es

$$r \equiv \{x = a + t,\ y = b + t,\ z = c + t\}$$

2. **Cálculo del punto $M = \pi \cap r$.**

$$M \equiv \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & a+t \\ y & = & b+t \\ z & = & c+t \\ x+y+z & = & 3 \end{array} \right.$$

   Resolviendo dicho sistema se obtiene que

$$\begin{aligned} t &= 1 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c \\ x &= 1 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c \\ y &= 1 - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \\ z &= 1 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \end{aligned}$$

   Por consiguiente,

$$M = \left(1 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c,\ 1 - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c,\ 1 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c\right).$$

3. **Cálculo de P'**
   Como M debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, se tiene que

$$(a', b', c') = \left(2 + \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c,\ 2 - \frac{2}{3}a + \frac{12}{3}b - \frac{2}{3}c,\ 2 - \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c\right).$$

4. **Ecuaciones de f**
   Del resultado anterior, se tiene que

$$(1,\ x',\ y',\ z') = (1,\ x,\ y,\ z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

   Como puede observarse $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ es ortogonal y $f \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E})$ ya que $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})\right) = -1$.

Definición 4.4.6 (GIRO) Llamamos giro de eje la recta r y amplitud el ángulo orientado φ, a la aplicación

$$G_{r,\varphi} : X \longrightarrow X$$

definida por:

- $G_{r,\varphi}(P) = P \Longleftrightarrow P \in r$.
- Si $P \notin r$, sea π un plano tal $P \in \pi$ y $\pi \perp r$ y $C = \pi \cap r$. Entonces

$$G_{r,\varphi}(P) = P' \Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ P' \in \pi \\ \bullet\ |\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{CP'}| \\ \bullet\ (\widehat{P + r, P' + r}) = \widehat{PCP'} = \varphi \end{cases}$$

  Como puede observarse, la restricción de $G_{r,\varphi}$ al plano π es un giro de centro C y amplitud φ.

Ecuaciones Resulta, en general, difícil abordar el problema de un modo directo. Más adelante veremos que dicho problema es relativamente sencillo pues un giro en el espacio es la composición de dos simetrías especulares que contienen al eje r.
No obstante y como ejercicio de revisión de algunas fórmulas, abordaremos el problema de modo "directo".
Calcular las ecuaciones del giro cuyos elementos son:

$$r \equiv x = y = z, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Comencemos razonando que, por ejemplo, el giro de eje la recta $z = 0$ y amplitud φ tiene de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} z' & = & z \\ x' & = & x\cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y' & = & x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{array}$$

(Basta observar que la restricción del giro al plano $z = 0$, es un giro de centro O y amplitud φ).
de donde

$$(1, x', y', z') = (1, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Consideremos el plano π que pasando por el origen de coordenadas es perpendicular a r cuya ecuación es

$$\pi \equiv x + y + z = 0.$$

La variedad de dirección de dicho plano es

$$D(\pi) = \langle(-1, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\rangle.$$

Construyamos una base ortonormal de $D(\pi)$, aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt.
Tomemos

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0).$$

Tomemos

$$\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1) - \lambda(-1, 1, 0) \mid \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1.$$

Para ello se ha de verificar que

$$0 = (-1,0,1) \bullet (-1,1,0) - \lambda(-1,1,0) \bullet (-1,1,0) \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2},$$

de donde

$$\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$$

o, para mejorar los cálculos, tomemos

$$\mathbf{v}_2 = (-1,-1,2).$$

Es claro que

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(-1,1,0), (-1,-1,2)\}$$

es una base ortogonal de $D(\pi)$. Para conseguir la base ortonormal buscada, bastará normalizar los vectores de $\mathcal{B}'$. Luego una base ortonormal de $D(\pi)$ es

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

Sea $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ el sistema de referencia dado. Consideremos el nuevo sistema de referencia (cuyo eje OZ es, precisamente, la recta dada r) $\mathcal{R}' = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\mathbf{e}_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\mathbf{e}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ tienen la misma orientación ($\det(\mathcal{M}(\mathcal{C},\mathcal{B})) = 1$).
Recordando que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{R},\mathcal{R}')\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}(f)\mathcal{M}(\mathcal{R}',\mathcal{R}),$$

se tiene que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\
0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\
0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\
0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{array}\right),$$

de donde

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\
0 & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3}
\end{array}\right)$$

y, por consiguiente, las ecuaciones del giro son

$$(1, x', y', z') = (1, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}}{3} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{3} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{3} \end{array} \right).$$

Proposición 4.4.1 (PRODUCTO DE SIMETRÍAS ESPECULARES) Dados los planos π y π', si consideramos las simetrías especulares σ_π y $\sigma_{\pi'}$, se verifica que:

1. Si $\pi = \pi'$, entonces
$$\sigma_{\pi'} \circ \sigma_\pi = \mathrm{id}_X.$$

2. Si $\pi \parallel \pi'$ y P y P' son los pies de cualquier recta perpendicular común a π y a π', entonces
$$\sigma'_\pi \circ \sigma_\pi = T_{2\overrightarrow{PP'}}.$$

3. Si $\pi \cap \pi' = r$ y $\varphi = (\widehat{\pi, \pi'})$ (ángulo orientado), entonces
$$\sigma'_\pi \circ \sigma_\pi = G_{r,2\varphi}.$$

Demostración

1. Sea $r = r'$. Es evidente, por la definición de simetría, que
$$\sigma_\pi(P) = P' \Longleftrightarrow \sigma_\pi(P') = P$$
y, por tanto,
$$\sigma_\pi^2(P) = \sigma_\pi(\sigma_\pi)(P) = P \Longrightarrow \sigma_\pi^2 = \mathrm{id}_X,$$
de donde deducimos también que $\sigma_\pi^{-1} = \sigma_\pi$.

2. Sea $\pi \parallel \pi'$ y P y P', respectivamente, la intersección los pies de una perpendicular común a r y a r' trazada por $A \in X$. Sean $\sigma_\pi(A) = A'$ y $\sigma_{\pi'}(A') = A''$. Es claro que
$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\overrightarrow{PA'}} + \underbrace{\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'P'}}_{\overrightarrow{PP'}} + \underbrace{\overrightarrow{P'A''}}_{\overrightarrow{A'P'}} = 2\overrightarrow{PP'}.$$

3. Sean $\pi \cap \pi' = C$, $A \in X$, $\sigma_\pi(A) = A'$ y $\sigma_{\pi'}(A') = A''$.
Sean también $\overline{AA'} \cap \pi = P$, $\overline{A'A''} \cap \pi' = P'$ y C la intersección con r del plano que pasa por A y A'' y es perpendicular a r.
Por una parte, es claro que
$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{CA'}\right| = \left|\overrightarrow{CA''}\right|.$$
Por otra, se tiene que
$$\widehat{ACA''} = \widehat{ACA'} + \widehat{A'CA''} = \underbrace{\widehat{ACP}}_{\widehat{PCA'}} + \underbrace{\widehat{PCA'} + \widehat{A'CP'}}_{\widehat{PCP'}} + \underbrace{\widehat{P'CA''}}_{\widehat{A'CP'}} = 2\widehat{PCP'} = 2\varphi.$$

4.5 Clasificación de los movimientos del espacio

Recordemos que si $\dim(V) = 3$ y $(f, \overrightarrow{f}) \in \mathrm{MO}(\mathcal{E})$, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V respecto de la cual $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ es de una de las formas

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}, \quad (\lambda_1 = \pm 1,\ a^2 + b^2 = 1)$$

y que, en el caso de la segunda, existe una base ortonormal $\mathcal{C}$ de V respecto de la cual

$$A_3 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estudiaremos los movimientos en sus formas canónicas para lo cual calcularemos los autovalores de A_1 y A_2 combinando los valores de λ_1 con las distintas posibilidades de a y b.

Caso 1 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) = A_1$ **y** $b = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$

a) $\lambda = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1.$

b) $\lambda = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1.$

c) $\lambda = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1.$

d) $\lambda = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1.$

Caso 2 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) = A_1$ **y** $b \neq 0$

e) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = a + bi,\ \lambda_3 = a - bi.$

f) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = a + bi,\ \lambda_3 = a - bi.$

Caso 3 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) = A_3$

g) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1.$

h) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1.$

Como puede observarse, los casos g) y h) son, respectivamente, equivalentes a los casos c) y b) por lo que nos limitaremos a las seis primeras posibilidades.

a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1.$
En este caso

$$f \equiv (1, x', y', z') = (1, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

de donde deducimos, en primer lugar, que $f \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.
La variedad de puntos dobles de f es

$$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha + x \\ y & = & \beta + y \\ z & = & \gamma + z \end{array} \right.$$

Luego pueden presentarse dos casos:

a.1) $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$. Si este es el caso

$$L_f = X, \quad f \equiv (1,x',y',z') = (1,x,y,z)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

de donde $f = \mathrm{id}_X$.

a.2) $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$, entonces el sistema es incompatible y $L_f=\emptyset$.
Veamos que, f es una traslación $T_{\mathbf{u}}$, donde $\mathbf{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$.
En efecto, si $P=(x,y,z)$, será $P'=(\alpha+x,\beta+y,\gamma+z)$ y, por consiguiente,

$$\overrightarrow{PP'} = (\alpha+x,\beta+y,\gamma+z)-(x,y,z) = (\alpha,\beta,\gamma)\,,\ \forall P\in X.$$

Elementos dobles

- **Rectas dobles** Es doble toda recta r tal que $D(r)=\langle\mathbf{u}\rangle$.
- **Planos dobles** Es doble todo plano π tal que $\mathbf{u}\in D(\pi)$.

b) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-1$.
En este caso

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y, por tanto, $f\in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.
Las ecuaciones de f vienen dadas por

$$f \equiv (1,x',y',z') = (1,x,y,z)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

de donde, la variedad de puntos dobles será

$$L_f \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \alpha+x \\ y & = & \beta-y \\ z & = & \gamma-z \end{array}\right.$$

Luego pueden presentarse dos casos:

b.1) $\alpha=0$. Si este es el caso

$$L_f = r \equiv \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{\beta}{2} \\ z & = & \dfrac{\gamma}{2} \end{array}\right.$$

Vamos a probar que f es una simetría axial de eje r ($f=\sigma_r$).
En efecto, si $P=(x,y,z)$, será $P'=(x,\beta-y,\gamma-z)$ y, por consiguiente,

- $\overrightarrow{PP'}=(x,\beta-y,\gamma-z)-(x,y,z)=(0,\beta-2y,\gamma-2z)\ \forall P\in X$ y como $D(r))\langle(1,0,0)\rangle$, se tiene inmediatamente que

$$\overrightarrow{PP'}\bullet(1,0,0)=0 \Longrightarrow \overrightarrow{PP'}\in D(r)^{\perp}.$$

- Por otra parte, si M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, se tiene que

$$M = \frac{(x, \beta - y, \gamma - z) + (x, y, z)}{2} = \left(x, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right),$$

luego $M \in r$.

Elementos dobles

- **Puntos dobles** Es doble todo punto $P \in r$.
- **Rectas dobles** Son dobles:
  - El eje r de la simetría.
  - Toda recta s tal que s es perpendicular y secante a r.
- **Planos dobles**
  - Todo plano π tal que $\pi \perp r$.
  - Todo plano π tal que $r \subset \pi$.

b.2) $\alpha \neq 0$, entonces el sistema es incompatible y $L_f = \emptyset$.
Veamos que, f es la composición de una simetría de eje r con una traslación $T_{\mathbf{u}}$, donde $\mathbf{u} = (\alpha, 0, 0)$.
En efecto, basta ver que

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego,

$$f = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_r = \sigma_r \circ T_{\mathbf{u}}, \quad (\mathbf{u} = (\alpha, 0, 0)\,,\ r \equiv \{y = \frac{\beta}{2},\ z = \frac{\gamma}{2}\}).$$

Nótese que $\mathbf{u} \in D(r) = \langle (1, 0, 0) \rangle$.
Este movimiento recibe el nombre de *simetría axial con deslizamiento.*

Elementos dobles

- **Rectas dobles** La única recta doble es r (eje de la simetría).
- **Planos dobles** Es doble todo plano π tal que $\pi \supset r$.

Propiedad fundamental Si M es el punto medio del segmento $\overline{Of(O)}$, se verifica que $M \in r$.

Demostración Análoga demostración a la realizada en el plano.

c) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1$. Las ecuaciones de f son

$$\left(1, x', y', z'\right) = (1, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y es obvio que $f \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E})$.
Las ecuaciones de la variedad de puntos dobles vienen dadas por el sistema

$$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha - x \\ y & = & \beta + y \\ z & = & \gamma + z \end{array} \right.$$

Pueden presentarse, nuevamente, dos casos:

c.1) $(\beta, \gamma) = (0, 0)$. Si este es el caso

$$L_f = \pi \equiv x = \frac{\alpha}{2}.$$

Vamos a probar que f es una simetría especular de plano π ($f = \sigma_\pi$).
En efecto, si $P = (x, y, z)$, será $P' = (\alpha - x, y, z)$, entonces

- $\overrightarrow{PP'} = (\alpha - x, y, z) - (x, y, z) = (\alpha - 2x, 0, 0)$ $\forall P \in X$ y como

$$D(\pi)) = \langle (0, 1, 0)\,(0, 0, 1) \rangle,$$

  se tiene inmediatamente que

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PP'} \bullet (0, 1, 0) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} \perp (0, 1, 0) \\ \overrightarrow{PP'} \bullet (0, 0, 1) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} \perp (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} \in D(\pi)^\perp.$$

- Por otra parte, si M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, se tiene que

$$M = \frac{(x, y, z) + (\alpha - x, y, z)}{2} = \left(\frac{\alpha}{2}, y, z \right),$$

  luego $M \in \pi$.

Elementos dobles

- **Puntos dobles** Es doble todo punto $P \in \pi$.
- **Rectas dobles** Son dobles:
  - Toda recta $r \subset \pi$.
  - Toda recta s tal que $s \perp \pi$.
- **Planos dobles**
  - El plano π de la simetría.
  - Todo plano ρ tal que $\rho \perp \pi$.

c.2) $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$, entonces el sistema es incompatible y $L_f = \emptyset$.
Veamos que, f es la composición de una simetría especular respecto de π con una traslación $T_{\mathbf{u}}$, donde $\mathbf{u} = (\alpha, 0, 0)$.
En efecto, basta ver que

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Luego,

$$f = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_\pi = \sigma_\pi \circ T_{\mathbf{u}}, \quad (\mathbf{u} = (0, \beta, \gamma)\,,\ \pi \equiv x = \frac{\alpha}{2}.$$

Nótese que $\mathbf{u} \in D(\pi) = \langle (0,1,0)\,, (0,0,1) \rangle$.
Este movimiento recibe el nombre de *simetría especular con deslizamiento.*

Elementos dobles

- **Rectas dobles** toda recta $r \subset \pi$ y tal que $\mathbf{u} \in D(r)$.
- **Planos dobles**
  - Es doble el plano π (plano de la simetría).
  - Es doble todo plano $\rho \perp \pi$ y tal que $\mathbf{u} \in D(\rho)$.

Propiedad fundamental Si M es el punto medio del segmento $\overline{Of(O)}$, se verifica que $M \in r$.

Demostración En efecto, recordando que $f(O) = (\alpha, \beta, \gamma)$, se tiene que

$$M = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$$

y es, por tanto, evidente que $M \in \pi$.

d) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1.$
En este caso la ecuación matricial de f es

$$\left(1, x', y', z'\right) = (1, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y es obvio que $f \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E})$.
Las ecuaciones de la variedad de puntos dobles vienen dadas por el sistema

$$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha - x \\ y & = & \beta - y \\ z & = & \gamma - z \end{array} \right.$$

de donde $L_f = C = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$.
Vamos a probar que f es una simetría central de centro C ($f = \sigma_C$).
En efecto, si $P = (x, y, z)$, será $P' = (\alpha - x, \beta - y, \gamma - z)$, entonces el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es

$$\frac{1}{2}\left((x, y, z) + (\alpha - x, \beta - y, \gamma - z)\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = C.$$

Elementos dobles

- **Puntos dobles** El único punto doble es C, centro de la simetría.
- **Rectas dobles** Es doble toda recta que pase por C.
- **Planos dobles** Es doble todo plano que pase por C.

e) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a + bi,\ \lambda_3 = a - bi.$
Es decir,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

y, por tanto, las ecuaciones de f son

$$\big(1, x', y', z'\big) = (1, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right),$$

de donde $f \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E})$.
Las ecuaciones explícitas de f son

$$f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha + x \\ y' & = & \beta + ay - bz \\ z' & = & \gamma + by + az \end{array} \right.$$

y, por tanto, la variedad de puntos dobles viene definida por el sistema

$$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha + x \\ y & = & \beta + ay - bz \\ z & = & \gamma + by + az \end{array} \right.$$

Pueden, pues, presentarse dos casos:

e.1) $\alpha = 0$. En este caso el sistema es compatible. En efecto, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \beta + ay - bz \\ z & = & \gamma + by + az \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta + (a-1)y - bz & = & 0 \\ \gamma + by + (a-1)z & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.4}$$

El determinante de los coeficientes del sistema es

$$\begin{vmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{vmatrix} = 2(1-a) \neq 0,$$

luego tiene solución única

$$y = y_1,\ z = z_1.$$

De aquí, que la restricción de f al plano YZ sea un giro de centro $C = (y_1, z_1)$ y amplitud φ tal que $\cos\varphi = a$, $\operatorname{sen}\varphi = b$.
En general, para cada $z = k$ la restricción de f a dicho plano es el giro descrito en el párrafo anterior y, puesto que la variedad de puntos dobles de f es la recta

$$L_f = r \equiv \{y = y_1,\ z = z_1\},$$

el movimiento f es un giro de eje r y amplitud φ tal que $\cos\varphi = a$, $\operatorname{sen}\varphi = b$. (Notaremos $f = G_{r,\varphi}$)

Elementos dobles

- **Puntos dobles** Es doble todo punto del eje de giro.
- **Rectas dobles** La única recta doble es el eje r de giro.
- **Planos dobles** Es doble todo plano perpendicular al eje de giro.

e.2) $\alpha \neq 0$. En tal caso, se tiene que

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right).$$

Es decir,

$$f = T_{\mathbf{u}} \circ G_{r,\varphi} = G_{r,\varphi} \circ T_{\mathbf{u}},$$

donde, como es fácil ver,

$$\mathbf{u} = (\alpha, 0, 0) \in D(r) = \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Este movimiento recibe el nombre de *movimiento helicoidal*.

Elementos dobles
La única variedad doble es el eje r de giro.

f) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = a + bi,\ \lambda_3 = a - bi$. Las ecuaciones de f son

$$\left(1, x', y', z'\right) = (1, x, y, z) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right),$$

de donde $f \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E})$.
Las ecuaciones explícitas de f son

$$f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha - x \\ y' & = & \beta + ay - bz \\ z' & = & \gamma + by + az \end{array} \right.$$

y, por tanto, la variedad de puntos dobles viene definida por el sistema

$$L_f \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha - x \\ y & = & \beta + ay - bz \\ z & = & \gamma + by + az \end{array} \right.$$

que, es compatible determinado y, por tanto, si $C = (x_1, y_1, z_1)$ es la solución de dicho sistema, se tiene que $L_f = C$.
Vamos a probar que f es la composición de dos movimiento: una simetría especular de plano π que pasa por C por un giro de eje la recta r perpendicular a π y que pasa igualmente por C motivo por el cual a este movimiento se le llama *simetría rotacional*.
En efecto, basta ver que

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si tenemos en cuenta c.1 y e.1 obtenemos que

$$f = G_{r,\varphi} \circ \sigma_\pi = \sigma_\pi \circ G_{r,\varphi},$$

donde

$$\pi \equiv x = \frac{\alpha}{2},\ r \equiv \{y = y_1,\ z = z_1\},\ \varphi \mid \cos\varphi = a,\ \operatorname{sen}\varphi = b$$

siendo r la solución del sistema 4.4.
Como $D(r) = \langle (1,0,0) \rangle$ y $D(\pi) = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ es claro que $r \perp \pi$. Igualmente claro es que $r \cap \pi = C$.

Elementos dobles

- **Puntos dobles** El único punto doble es $C = r \cap \pi$
- **Rectas dobles** La única recta doble es r, el eje de giro.
- **Planos dobles** El único plano doble es π, plano de la simetría especular.

Notas

1. Para el cálculo del ángulo de rotación, en los dos últimos casos, resulta muy útil utilizar la propiedad de que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. De aquí que

$$A_1 \sim M_0 \Longrightarrow \operatorname{Tr}(A_1) = \operatorname{Tr}(M_0) \Longrightarrow \pm 1 + 2\cos\varphi = \operatorname{Tr}(M_0), \tag{4.5}$$

expresión que nos permite calcular el ángulo no orientado φ.

2. Conviene tener en cuenta, igualmente, que

   - Toda simetría axial de eje r es igual a un giro de eje r y amplitud π.
   - Toda simetría axial con deslizamiento $\sigma_r \circ T_{\mathbf{u}}$, equivale al movimiento helicoidal $G_{r,\pi} \circ T_{\mathbf{u}}$.
   - Una simetría central de centro C, es equivalente a una simetría rotacional de eje r y amplitud $\varphi = \pi$ y plano de simetría π, donde r es una recta cualquiera que pase por C y π es una plano perpendicular a r por el punto C.

3. Con L_f notaremos, indistintamente, a la variedad de puntos dobles de f o a sus ecuaciones.

4. Se recuerda que utilizaremos la siguiente notación:

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f), \quad M_0 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}), \quad M_{00} = \det(M_0).$$

Movimientos del espacio
Clasificación

Movimientos directos

$$M_{00} = 1 \begin{cases} L_f = \mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow M = I_4 \Longleftrightarrow f = \mathrm{id}_X \\ L_f = r \begin{cases} \mathrm{Tr}(M_0) = -1 \Longleftrightarrow f = \sigma_r \\ \mathrm{Tr}(M_0) \neq -1 \Longleftrightarrow f = G_{r,\varphi}{}^{\text{(i)}} \end{cases} \\ L_f = \emptyset \begin{cases} M_0 = I_3,\ M \neq I_4 \Longleftrightarrow f = T_{\mathbf{u}}{}^{\text{(ii)}} \\ \mathrm{Tr}(M_0) = -1 \Longleftrightarrow f = \sigma_r \circ T_{\mathbf{u}} = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_r \ {}^{\text{(iii)}} \\ \mathrm{Tr}(M_0) \neq -1 \Longleftrightarrow f = G_{r,\varphi} \circ T_{\mathbf{u}} = T_{\mathbf{u}} \circ G_{r,\varphi} \ {}^{\text{(iv)}} \end{cases} \end{cases}$$

Movimientos inversos

$$M_{00} = -1 \begin{cases} L_f = \emptyset \Longleftrightarrow f = \sigma_\pi \circ T_{\mathbf{u}} = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_\pi \ {}^{\text{(v)}}. \\ L_f = \pi \Longleftrightarrow f = \sigma_\pi \\ L_f = P \begin{cases} M_0 = -I_3 \Longleftrightarrow f = \sigma_P \\ M_0 \neq -I_3 \Longleftrightarrow f = \sigma_\pi \circ G_{r,\varphi} = G_{r,\varphi} \circ \sigma_\pi \ {}^{\text{(vi)}} \end{cases} \end{cases}$$

(i) $1 + 2\cos\varphi = \mathrm{Tr}(M_0)$

(ii) $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$

(iii) $r = M + \left\langle \overrightarrow{Mf(M)} \right\rangle$ y $\mathbf{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$, donde M es el punto medio de $\overline{Of(O)}$.

(iv) $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle$, donde $\mathbf{v}$) es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ de $\overrightarrow{f}$. Calculado $\mathbf{v}$ podemos obtener r sabiendo que $P \in r \Longleftrightarrow f(P) \in r$ y que, por tanto, $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda\mathbf{v}$. Eliminando el parámetro λ en las tres ecuaciones resultantes, se obtienen unas ecuaciones implícitas de r.

(v) $\pi = M + D(\pi)$, donde M es el punto medio del segmento $\overline{Of(O)}$ y $D(\pi) = U_1$ (U_1 es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ de $\overrightarrow{f}$ y $\mathbf{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$

(vi) $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle$ y $-1 + 2\cos\varphi = \mathrm{Tr}(M_0)$, donde $\mathbf{v}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = -1$. $\pi \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{v} = 0$, donde $\mathbf{p}$ es el vector de posición del punto P.

4.6 Ejercicios

Nota El objetivo de los ejercicios que siguen es el cálculo de los elementos geométricos de un movimiento en aquellos casos en que $L_f = \emptyset$.

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿es M la matriz de un movimiento? Si la respuesta es afirmativa, clasificarlo y calcular los elementos geométricos.

Solución

1. Por una parte,

$$M_0 M_0^t = I_3 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}(\mathcal{E}).$$

Por otra,

$$\det(M_0) = -1 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E}).$$

2. Para proceder a la clasificación de f, calculemos la variedad de puntos dobles.

$$L_f \equiv \mathbf{x}(I - M_0) = \mathbf{a} \Longrightarrow (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2, 2, 2)\,,$$

de donde

$$L_f = C = (0, 1, 2)\,.$$

Como $M_0 \neq -I_3$ se deduce que f es una *simetría rotacional* $f = \sigma_\pi \circ G_{r,\varphi} = G_{r,\varphi} \circ \sigma_\pi$.

3. **Elementos**

- La ecuación del eje de giro viene dada por

$$r = C + \langle \mathbf{v} \rangle,$$

donde C es el punto doble y $\mathbf{v}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = -1$ de f. Dicho autovector se obtiene resolviendo el sistema

$$\mathbf{x}(-I - M_0) = \mathbf{0} \Longrightarrow (x, y, z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

o, lo que es equivalente,

$$\begin{cases} -x + z & = & 0 \\ -x - z & = & 0 \end{cases}$$

Es decir, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ y, por consiguiente,

$$r = (0, 1, 2) + \langle (0, 1, 0) \rangle.$$

- La ecuación del plano π es fácil de calcular sabiendo que

$$\pi \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \bullet \mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \pi \equiv y - 1 = 0,$$

donde $\mathbf{c}$ es el vector de posición del punto C.

- La amplitud del ángulo la calcularemos aplicando la fórmula 4.5

$$-1 + 2\cos\varphi = -2 \Longrightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

¿es M la matriz de un movimiento? Si la respuesta es afirmativa, clasificarlo y calcular los elementos geométricos.

Solución

1. Por una parte,

$$M_0 M_0^t = I_3 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}(\mathcal{E}).$$

Por otra,

$$\det(M_0) = 1 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E}).$$

2. Para proceder a la clasificación de f, calculemos la variedad de puntos dobles.

$$L_f \equiv \mathbf{x}(I - M_0) = \mathbf{a} \Longrightarrow (x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (2, 0, 2)$$

o, lo que es equivalente,

$$L_f \equiv \{2\,x = 20,\ y - z = 0,\ -y + z = 2\},$$

de donde $L_f = \emptyset$ y, por tanto, f es una simetría axial con deslizamiento o un movimiento helicoidal (se recuerda que una simetría axial con deslizamiento de eje r equivale a un movimiento helicoidal de eje r y ángulo $\varphi = \pi$).
Como

$$1 + 2\cos\varphi = \mathrm{Tr}(M_0) = -1 \Longrightarrow 2\cos\varphi = -2 \Longrightarrow \varphi = \pi$$

luego f es una em simetría axial con deslizamiento:

$$f = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_r = \sigma_r \circ T_{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u} \in D(r).$$

3. **Elementos**

- **Vector guía de la traslación** Como $M = (1, 0, 1) \in r$, donde M es el punto medio de $\overline{Of(O)}$ y r es doble $f(M) \in r$ y, por tanto,

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{Mf(M)}.$$

Calculemos $f(M)$.

$$(1,\ 1,\ 0,\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,\ 1,\ 1,\ 2),$$

de donde

$$f(M) = (1,\ 1,\ 2)$$

y, por tanto

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{Mf(M)} = (0,\ 1,\ 1).$$

- **Eje de simetría** Se obtiene éste con facilidad si tenemos en cuenta que $M \in r$ y que $D(r) = \langle \mathbf{u} \rangle$. Es decir,

$$r = M + \langle \mathbf{u} \rangle$$

o sea,

$$r = (1, 0, 1) + \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Ejercicio 3. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

¿es M la matriz de un movimiento? Si la respuesta es afirmativa, clasificarlo y calcular los elementos geométricos.

Solución

1. Por una parte,
$$M_0 M_0^t = I_3 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}(\mathcal{E}).$$
Por otra,
$$\det(M_0) = -1 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}_-(\mathcal{E}).$$

2. Para proceder a la clasificación de f, calculemos la variedad de puntos dobles.
$$L_f \equiv \mathbf{x}(I - M_0) = \mathbf{a} \Longrightarrow (x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (2, 2, 0)$$
Claramente, el sistema es incompatible, luego $L_f = \emptyset$. Por tanto, f es una *simetría especular con deslizamiento:*
$$f = T_{\mathbf{u}} \circ \sigma_\pi = \sigma_\pi \circ T_{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u} \in D(\pi).$$

3. **Elementos**

   - **Vector guía de la traslación** Como $M = (1, 1, 0) \in \pi$, donde M es el punto medio de $\overline{Of(O)}$ y π es doble, $f(M) \in \pi$ y, por tanto,
   $$\mathbf{u} = \overrightarrow{Mf(M)}.$$
   Calculemos $f(M)$.
   $$(1,\ 1,\ 1,\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(1,\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{4}{3}\right),$$
   de donde
   $$f(M) = \left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{4}{3}\right),$$
   y, por tanto
   $$\mathbf{u} = \overrightarrow{Mf(M)} = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{3}\right).$$

   - **Plano de simetría** Se obtiene éste con facilidad si tenemos en cuenta que $M \in \pi$ y que
   $$\pi \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{0},$$
   donde $\mathbf{v}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = -1$ de $\overrightarrow{f}$.
   El subespacio propio asociado a dicho autovalor viene definido por el siguiente sistema
   $$(x, y, z) \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

o, lo que es equivalente,

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\,x+y+z & = & 0 \\ x-2\,y+z & = & 0 \\ x+y-2\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

cuya solución general es

$$\{x=z,\ y=z\}.$$

Tomando $z=1$, tenemos que $\mathbf{v}=(1,1,1)$, luego

$$\pi \equiv (x-1)+(y-1)+z=0.$$

También podíamos haber calculado la ecuación de π, teniendo en cuenta que

$$\pi = M + U_1$$

donde U_1 es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda=1$ de M_0.

Ejercicio 4. Dada la matriz

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \frac{32}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix},$$

¿es M la matriz de un movimiento? Si la respuesta es afirmativa, clasificarlo y calcular los elementos geométricos.

Solución

1. Por una parte,

$$M_0 M_0^t = I_3 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}(\mathcal{E}).$$

Por otra,

$$\det(M_0)=1 \Longrightarrow f \in \mathrm{MO}_+(\mathcal{E}).$$

2. Para proceder a la clasificación de f, calculemos la variedad de puntos dobles.

$$L_f \equiv \mathbf{x}(I-M_0)=\mathbf{a} \Longrightarrow (x,y,z)\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix} = \left(\frac{32}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-2}{9}\right)$$

o, lo que es lo mismo,

$$L_f \equiv \{2x+2y-z=8,\ 2x+2y-z=-1,\ x+y+4z=-\frac{1}{2}\},$$

sistema que es incompatible, luego $L_f=\emptyset$. Por tanto, f es una simetría axial con deslizamiento o un movimiento helicoidal.

Como

$$1+\cos\varphi = \mathrm{Tr}(M_0) = \frac{-5}{9} \Longrightarrow \cos\varphi = -\frac{7}{9},$$

deducimos que f es un *movimiento helicoidal:*

$$f = T_{\mathbf{u}} \circ G_{r,\varphi} = G_{r,\varphi} \circ T_{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u} \in D(r).$$

3. **Elementos**

- **Eje de giro** Calculamos r teniendo en cuenta que:
  - $D(r) = \langle \mathbf{v} \rangle$ donde $\mathbf{v}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ de M_0.
  - Como r es doble, $P \in r \Longleftrightarrow f(P) \in r$ luego $P \in r \Longleftrightarrow \overrightarrow{Pf(P)} = \lambda \mathbf{v}$.

  Cálculo de v El autovector $\mathbf{v}$ es una solución no trivial del sistema

$$\mathbf{x}(I - M_0) = \mathbf{0} \Longrightarrow (x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

  cuya solución general es $\{x = -y, z = 0\}$. Tomando $y = 1$, se tiene que

$$\mathbf{v} = (-1, 1, 0)\,.$$

  Cálculo de $\overrightarrow{Pf(P)}$ Sea $P = (x, y, z)$. Calculemos $f(P)$:
  Como $f(P) = (x, y, z)\, M$, se deduce que

$$f(P) = \left(1,\ \frac{32}{9} + \frac{1}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z,\ -\frac{4}{9} - \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z,\ -\frac{2}{9} - \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z\right),$$

  de donde

$$f(P) = \left(\frac{32}{9} + \frac{1}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z,\ -\frac{4}{9} - \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z,\ -\frac{2}{9} - \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z\right)$$

  y, por tanto, las coordenadas de $\overrightarrow{Pf(P)}$ serán

$$\left(\frac{32}{9} - \frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z,\ -\frac{4}{9} - \frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z,\ -\frac{2}{9} - \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{16}{9}z\right). \tag{4.6}$$

  Ecuaciones de r Como $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda \mathbf{v}$, se tendrá que

$$\begin{cases} \frac{32}{9} - \frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z &= -\lambda \\ -\frac{4}{9} - \frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z &= \lambda \\ -\frac{2}{9} - \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{16}{9}z &= 0 \end{cases}$$

  Eliminando el parámetro λ entre las tres ecuaciones (en este caso basta sumar las dos primeras ecuaciones) tendremos que

$$r \equiv \begin{cases} 4x + 4y - 2zy &= 7 \\ 2x + 2y + 8z &= -1 \end{cases}$$

  Haciendo $y = 0$, obtenemos el punto $P = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow f(P) = \left(\frac{7}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$.

- **Vector guía de la traslación** Recordando que $\mathbf{u} = \overrightarrow{Pf(P)}$ donde $P \in r$, se tiene que

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{Pf(P)} = (2, -2, 0)\,.$$

  También se podría haber obtenido $\overrightarrow{Pf(P)}$ sustituyendo en 4.6 las coordenadas de P. Esto ahorraría el cálculo de $f(P)$.