Capítulo 5

Cónicas

5.1 Definiciones y ecuaciones reducidas

Nota En todo lo que sigue trabajaremos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ y en él supondremos que los sistemas de referencia que se utilicen son métricos.

5.1.1 Elipse

Definición 5.1.1 Llamamos elipse al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante ($2a > 0$).

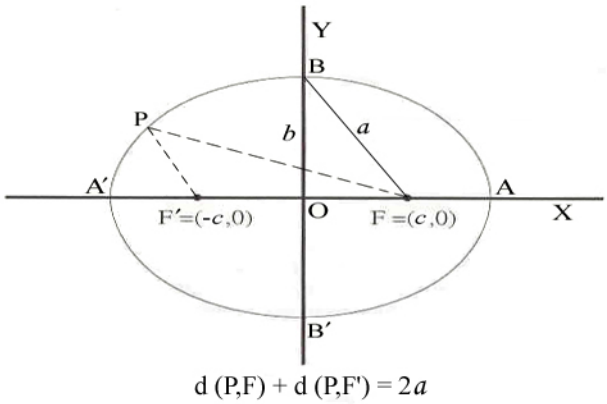

Figura 5.1: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Ecuación reducida Sean F y F' los focos y $\mathrm{d}(F, F') = 2c$ y sea O el punto medio del segmento $\overline{FF'}$. Para calcular la ecuación reducida de la elipse tomaremos el siguiente sistema de referencia:

- Tomaremos el punto O como origen de coordenadas.
- El eje $X'X$ será la recta FF' (si $F = F'$, tomaremos como eje $X'X$ cualquier recta que pase por O).
- Como eje $Y'Y$ la perpendicular a XX' pasando por O.
- $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base métrica cuyos vectores se han tomado, respectivamente, en las direcciones de los ejes.

De este modo, podemos asignar las siguientes coordenadas

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$

Sea pues, $P = (x, y)$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Con esta asignación, se tiene:

$$\mathrm{d}(P, F) + \mathrm{d}(P, F') = 2a$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + c^2 - 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 + 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$\Downarrow$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 + 2a^2cx$$

$$\Downarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $2a > 2c$, haciendo $b^2 = a^2 - c^2$, obtenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

y dividiendo por el producto a^2b^2, resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación reducida de la elipse.

Elementos geométricos

- El punto O, centro de simetría de la elipse, recibe el nombre de *centro* de la misma.
- los números reales positivos a, b y c se denominan, respectivamente, *semieje mayor, semieje menor y semidistancia focal.*
- Reciben el nombre de ejes de la elipse, sus ejes de simetría ($y = 0$, $x = 0$, respectivamente, *eje mayor y eje menor*).
- A los puntos $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ y $B' = (0, -b)$ –intersección de la elipse con sus ejes– se les llama *vértices* de la elipse.
- Los lados del triángulo rectángulo FOB, verifican la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$.
- En el caso particular en que $F = F'$ ($c = 0$), se verifica que $a^2 = b^2$ con lo que se obtiene la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ que es una circunferencia de centro O y radio $r = a$.
- Excentricidad de la elipse es el número real $0 \leq e < 1$ definido por $e = \dfrac{c}{a}$.

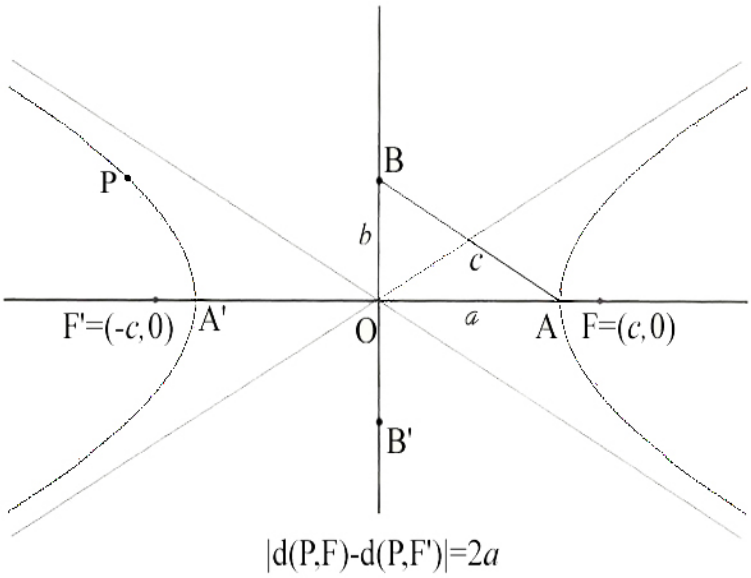

Figura 5.2: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

5.1.2 Hipérbola

Definición 5.1.2 Llamamos hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante ($2a > 0$).

Ecuación reducida Procediendo a tomar un sistema de referencia similar al caso de la elipse, podemos asignar a los focos las siguientes coordenadas

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$

Sea pues, $P = (x, y)$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Con esta asignación, se tiene:

$$|\mathrm{d}(P, F) - \mathrm{d}(P, F')| = 2a$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + c^2 - 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 + 2cx + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$\Downarrow$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 + 2a^2cx$$

$$\Downarrow$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Como $2a < 2c$, haciendo $b^2 = c^2 - a^2$, obtenemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

y dividiendo por el producto a^2b^2, resulta

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación reducida de la hipérbola.

Elementos geométricos

- El punto O, centro de simetría de la hipérbola, recibe el nombre de *centro* de la misma.
- los números reales positivos a, b y c se denominan, respectivamente, *semieje real, semieje imaginario y semidistancia focal.*
- Reciben el nombre de ejes de la hipérbola, sus ejes de simetría ($y = 0$, $x = 0$, llamados, respectivamente, *eje real y eje imaginario*). La razón de este último nombre es que las soluciones de la intersección del eje $x = 0$ con la hipérbola son los números complejos (*imaginarios puros*) $\pm bi$.
- A los puntos $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ y $B' = (0, -b)$ se les llama, respectivamente, *vértices reales y vértices imaginarios* de la hipérbola.
- Los lados del triángulo rectángulo AOB, verifican la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$.
- En el caso particular en que $a^2 = b^2$, la hipérbola recibe el nombre de *equilátera* y su ecuación es $x^2 - y^2 = a^2$.
- Las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son las *asíntotas* de la hipérbola.
- Llamamos excentricidad de una hipérbola al número real $1 < e < +\infty$ definido por $e = \frac{c}{a}$.

5.1.3 Parábola

Definición 5.1.3 Llamamos parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado *foco* y de una recta fija r, llamada *directriz.*

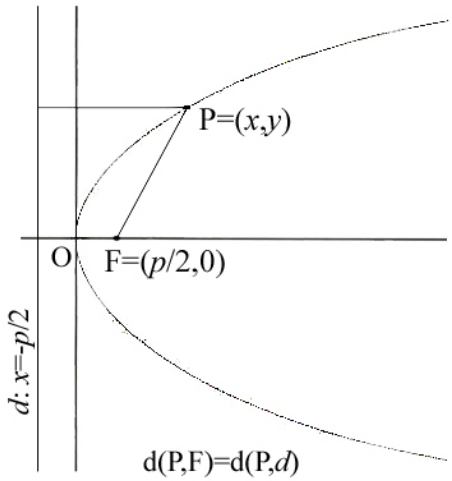

Figura 5.3: $y^2 = 2\,p\,x$

Ecuación reducida Tomaremos, en este caso como ejes de coordenadas

- $X'X$ la perpendicular a r (directriz) que pase por el foco F.
- Si $R = X'X \cap r$, tomaremos como eje $Y'Y$ la mediatriz del segmento $\overline{RF}$.
- De lo anterior se deduce que el origen O de coordenadas es el punto medio del segmento $\overline{RF}$.

Por tanto, si $\mathrm{d}(r, F) = p$,

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad r \equiv x + \frac{p}{2} = 0$$

y para que el punto $P = (x, y)$ pertenezca a la parábola se ha de verificar que

$$\mathrm{d}(P, r) = \mathrm{d}(P, F) \Longrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

de donde, elevando al cuadrado,

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

de donde obtenemos la ecuación reducida de la parábola,

$$y^2 = 2\,p\,x.$$

Elementos geométricos

- La recta $y = 0$ (eje de simetría de la parábola), es el *eje* de la misma.
- El punto $O = (0, 0)$, intersección de la parábola con su eje, recibe el nombre de *vértice*.
- Al número real positivo $p = \mathrm{d}(F, r)$, se le suele llamar parámetro de la parábola.

5.2 Cónicas generales: clasificación

Definición 5.2.1 Llamaremos cónica al conjunto de puntos del plano que satisfagan la ecuación general de segundo grado

$$\mathcal{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

ecuación, que puede ser expresada matricialmente del siguiente modo:

$$\mathcal{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

- La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

  recibe el nombre de matriz de la cónica $\mathcal{C}$.
- Si $\det(A) \neq 0$, se dice que $\mathcal{C}$ es *no degenerada*.
- Si $\det(A) = 0$, se dice que $\mathcal{C}$ es una cónica *degenerada*.

Es nuestro objetivo demostrar que toda ecuación general de segundo grado $\mathcal{C}$ tal que $\det(A) \neq 0$ es una elipse, una hipérbola o una parábola pero para llegar a este resultado necesitamos una serie de lemas previos, fundamentalmente relacionados con las matrices simétricas.

Lema 5.2.1 Sea

$$\mathcal{C} \equiv \mathbf{x}A\mathbf{x}^t = 0, \quad \mathbf{x} = (1, x, y)$$

la ecuación general de una cónica y sea $f \in \mathrm{MO}(\mathcal{E})$ de ecuación matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f), \quad \mathbf{x} = (1, x, y)\,,\ \mathbf{x}' = \big(1, x', y'\big)$$

y sea $M = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f)^{-1}$. Se verifica que

$$f(\mathcal{C}) \equiv \mathbf{x}'MAM^t\mathbf{x}'^t = 0.$$

Demostración De $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f)$ se deduce que $\mathbf{x} = \mathbf{x}'^t\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(f)^{-1} = \mathbf{x}'^tM$, de donde sustituyendo este valor en la ecuación de la cónica se tiene que

$$f(\mathcal{C}) \equiv \mathbf{x}'MAM^t\mathbf{x}'^t = 0.$$

Lema 5.2.2 Si

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se verifica que

$$\det(\lambda I - A_0) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A_0)\lambda + \det(A_0).$$

Demostración En efecto,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_0) &= \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \\ &= \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A_0)\lambda + \det(A_0). \end{aligned}$$

Lema 5.2.3 (INVARIANTES MÉTRICOS) Sea $\mathcal{C} \equiv \mathbf{x}A\mathbf{x}^t = 0$ una cónica y $f(\mathcal{C}) \equiv \mathbf{x}'A'\mathbf{x}'^t = 0$ la cónica obtenida aplicando a $\mathcal{C}$ el movimiento f de matriz inversa M. Se verifica que

i.1) $\det(A') = \det(A)$.

i.2) $\det(A'_0) = \det(A_0)$.

i.3) $\mathrm{Tr}(A'_0) = \mathrm{Tr}(A_0)$.

Los números $\det(A)$, $\det(A_0)$ y $\mathrm{Tr}(A_0)$ reciben el nombre de *invariantes métricos* de la cónica $\mathcal{C}$.

Demostración Sean

$$M = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & a'_{11} & a'_{12} \\ 0 & a'_{21} & a'_{22} \end{array}\right) \quad \text{y} \quad M_0 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix},$$

donde M es la inversa de la matriz de un movimiento (se recuerda que M_0 es ortogonal y que, por tanto, ${M_0}^t = M_0^{-1}$ y que, además, $\det(M_0) = \pm 1$). Del resultado del lema 5.2.1 se deduce que

$$A' = MAM^t = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & a'_{11} & a'_{12} \\ 0 & a'_{21} & a'_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & a'_{11} & a'_{21} \\ \beta & a'_{12} & a'_{22} \end{array}\right), \tag{5.1}$$

de donde

$$A'_0 = M_0A_0{M_0}^t = M_0A_0M_0^{-1} \Longrightarrow A'_0 \sim A_0. \tag{5.2}$$

De estos resultados se deducen inmediatamente los tres apartados. En efecto,

1. De la igualdad 5.1 se deduce que

$$\det(A') = \det(M)\det(A)\det(M^t) = (\pm 1)\det(A)(\pm 1) = \det(A),$$

lo que demuestra el apartado i.1) del lema.

2. Como por 5.2, A_0' es semejante a A_0, ambas matrices tienen el mismo polinomio característico. Aplicando pues el resultado del lema 5.2.2, se tiene que

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A_0)\lambda + \det(A_0) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A_0')\lambda + \det(A_0')$$

y, por tanto,

$$\mathrm{Tr}(A_0) = \mathrm{Tr}(A_0'), \quad \det(A_0) = \det(A_0).$$

Con lo que quedan demostrados los apartados i.2) e i.3).

Lema 5.2.4 Sea A_0 la matriz simétrica

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Se verifica que:

1. Los autovalores de A_0 son reales.
2. Si A_0 tiene dos autovalores distintos $\lambda \neq \mu$ y $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son autovectores asociados, respectivamente a λ y μ, entonces $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
3. A_0 es diagonalizable mediante una matriz de paso ortogonal.

Demostración

1. De acuerdo con el lema 5.2.2, la ecuación característica de A_0 es

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A_0)\lambda + \det(A_0) = 0.$$

Es decir una ecuación de segundo grado cuyo discriminante $\Delta \geq 0$. En efecto,

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12})^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

Caben pues dos casos:

(a) $\Delta > 0$. En este caso la ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas, luego A_0 tiene dos autovalores λ y μ reales y distintos.

(b) $\Delta = 0$. Entonces $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, de donde

$$a_{11} - a_{22} = 0, \; a_{12} = 0,$$

luego A_0 es de la forma

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$

y, por tanto, es diagonal y sus autovalores son $\lambda = a_{11} = \mu$.

2. En efecto,

$$\lambda \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}_{\mathcal{B}})^t = \mathbf{a}_{\mathcal{B}} A_0 (\mathbf{b}_{\mathcal{B}})^t = \mathbf{a}_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}_{\mathcal{B}} A_0)^t = \mathbf{a}_{\mathcal{B}}(\mu \mathbf{b}_{\mathcal{B}})^t = \mu \mathbf{a} \bullet \mathbf{b},$$

de donde

$$\lambda \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mu \mathbf{a} \bullet b \Longrightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \Longrightarrow \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \Longrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

3. Sean λ y μ los autovalores de A_0. Caben dos casos:

   - $\lambda = \mu$. Entonces A_0 es –según lo demostrado anteriormente– diagonal, luego una matriz de paso es la matriz unidad que es ortogonal.
   - $\lambda \neq \mu$. En este caso, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son autovectores asociados, respectivamente, a λ y μ se tiene que $\mathcal{B}_0 = \left\{ \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right\}$ es una base ortonormal de que diagonaliza A_0. La matriz de paso sería pues $P = \mathcal{M}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})$, que es ortogonal.

Proposición 5.2.1 Si

$$\mathcal{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

es una cónica no degenerada ($\det(A) \neq 0$), entonces $\mathcal{C}$ es irreducible. En otras palabras $\mathcal{C}$ no contiene rectas.

Demostración Procedamos al absurdo. Supongamos que

$$\mathcal{C} \equiv (ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0.$$

Si esto fuese así, se tendría que

$$\mathcal{C} \equiv aa'x^2 + bb'y^2 + (ab' + ba')xy + (ac' + ca')x + (bc' + ca')y + cc' = 0,$$

de donde la matriz de la cónica sería

$$A = \begin{pmatrix} cc' & \frac{1}{2}(ac' + ca') & \frac{1}{2}(bc' + ca') \\ \frac{1}{2}(ac' + ca') & aa' & \frac{1}{2}(ab' + ba') \\ \frac{1}{2}(bc' + ca') & \frac{1}{2}(ab' + ba') & bb' \end{pmatrix}$$

o, lo que es lo mismo,

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} cc' + cc' & ac' + ca' & bc' + ca' \\ ac' + ca' & aa' + aa' & \underline{ba' + ab'} \\ bc' + ca' & ab' + ba' & bb' + bb' \end{pmatrix}.$$

De donde deducimos que $\det(A) = 0$, en contra de la hipótesis, por ser la suma de ocho determinantes nulos (cada uno de ellos tiene, al menos, dos columnas iguales).

Teorema 5.2.1 (CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS) Toda cónica no degenerada es una elipse, una hipérbola o una parábola.

Demostración La prueba del teorema consistirá en aplicar uno o más movimientos a la cónica dada de modo que obtengamos la ecuación de la misma referida a sus ejes (ecuación reducida), lo que nos permitirá averiguar fácilmente qué tipo de cónica es.
Sea $\mathcal{C} \equiv \mathbf{x}A\mathbf{x}^t = 0$ una cónica no degenerada ($\det(A) \neq 0$) y $\mathcal{B}_0$ la base de V calculada en el apartado 3 del lema 5.2.4. Consideremos el movimiento f cuya matriz inversa es

$$M = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{M}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{M_0} \end{array} \right)$$

Por el lema 5.2.1, sabemos que la matriz de $f(\mathcal{C})$ es

$$A' = MAM^t$$

o sea,

$$A' = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & M_0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & & \\ a_{02} & & A_0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & {M_0}^t \end{array}\right).$$

Es decir, A' es de la forma

$$A' = \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ \hline a'_{01} & \lambda_1 & \\ a'_{02} & & \lambda_2 \end{array}\right),$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de A_0.

Caben, ahora, dos posibilidades.

Caso 1 $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$. Consideremos en este caso la traslación T cuya matriz es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & \dfrac{a'_{01}}{\lambda_1} & \dfrac{a'_{02}}{\lambda_2} \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{array}\right)$$

La matriz M', inversa, de la anterior es

$$M' = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -\dfrac{a'_{01}}{\lambda_1} & -\dfrac{a'_{02}}{\lambda_2} \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{array}\right) \qquad \left({T_{\mathbf{u}}}^{-1} = T_{-\mathbf{u}}\right),$$

de donde la matriz de $T(f(\mathcal{C}))$ será de la forma

$$A'' = M'A'M'^t = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -\dfrac{a'_{01}}{\lambda_1} & -\dfrac{a'_{02}}{\lambda_2} \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ \hline a'_{01} & \lambda_1 & \\ a'_{02} & & \lambda_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\dfrac{a'_{01}}{\lambda_1} & 1 & \\ -\dfrac{a'_{02}}{\lambda_2} & & 1 \end{array}\right).$$

Es decir,

$$A'' = \left(\begin{array}{c|cc} a'_{00} & & \\ \hline & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{array}\right),$$

de donde

$$(g \circ f)(\mathcal{C}) \equiv \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a'_{00} = 0. \tag{5.3}$$

Recordando que en todo el proceso (ver lema 5.2.3 sobre invariantes métricos de las cónicas),

i.1) $\det(A'') = \det(A') = \det(A)$,

i.2) $\det(A''_0) = \det(A'_0) = \det(A_0)$,

i.3) $\mathrm{Tr}(A''_0) = \mathrm{Tr}(A'_0) = \mathrm{Tr}(A_0)$,

se tiene que

$$a'_{00} = \frac{|A|}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{|A|}{A_{00}}. \tag{5.4}$$

Por otra parte, la ecuación 5.3, es la ecuación reducida de una elipse o una hipérbola, según los signos de λ_1, λ_2 y a'_{00} y, que podemos resumir en la siguientes tablas.[1]

ELIPSES ($\mathrm{sig}(\lambda_1) = \mathrm{sig}(\lambda_2)$)						
λ_1	λ_2	a'_{00}	$\lvert A \rvert$	A_{00}	$\mathrm{Tr}(A_0)$	TIPO
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	E.I.
$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	E.R.
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	E.R.
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	E.I.

HIPÉRBOLAS ($\mathrm{sig}(\lambda_1) \neq \mathrm{sig}(\lambda_2)$)		
λ_1	λ_2	A_{00}
$+$	$-$	$-$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$+$	$-$

Caso 2 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0.$
En este caso,

$$A' = \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ \hline a'_{01} & 0 & \\ a'_{02} & & \lambda_2 \end{array}\right).$$

Apliquemos a $f(\mathcal{C})$ la traslación T cuya matriz es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & a & \dfrac{a'_{02}}{\lambda_2} \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{array}\right)$$

Si M' es su matriz inversa, la matriz de $(T \circ f)(\mathcal{C})$, será

$$A'' = M'A'M'^t = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -a & -\dfrac{a'_{02}}{\lambda_2} \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ \hline a'_{01} & 0 & \\ a'_{02} & & \lambda_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -a & 1 & \\ -\dfrac{a'_{02}}{\lambda_2} & & 1 \end{array}\right),$$

o sea

$$A'' = \left(\begin{array}{c|cc} a'_{00} & a'_{01} & 0 \\ \hline a'_{01} & 0 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{array}\right)$$

donde

$$a'_{00} = a_{00} + 2\,a\,a'_{01} - \frac{{a'_{02}}^2}{\lambda_2}.$$

Como $a'_{01} \neq 0$ (ya que si fuese igual a cero $\det(A') = \det(A) = 0$, en contra de la hipótesis), es posible calcular a con la condición de que $a'_{00} = 0$ y se tendría que

$$A'' = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & a'_{01} & 0 \\ \hline a'_{01} & 0 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{array}\right).$$

Luego

$$T(f(\mathcal{C})) \equiv \lambda_2 y^2 + 2\,a'_{01}\,x = 0$$

que es la ecuación reducida de una parábola.[2]

[1] Se recuerda que las ecuaciones reducidas de la elipse real e hipérbola son, respectivamente,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,\ b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

[2] Al suponer $\lambda_2 \neq 0$, se intenta llegar a la forma reducida $y^2 = 2\,p\,x$

Como $\det(A_0'') = 0$ y $\det(A_0) = \det(A_0'')$, se de duce que la condición necesaria y suficiente para que una cónica no degenerada sea una parábola es que $\det(A_0) = 0$.
Por otra parte, como

$$\det(A'') = -\lambda_2\, {a'_{01}}^2 = \det(A),$$

se tiene que

$$a'_{01} = \pm\sqrt{\frac{-|A\,|}{\lambda_2}}\,.$$

Ahora bien, como $\mathrm{Tr}(A_0'') = \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A_0)$, sustituyendo se tiene:

$$a'_{01} = \pm\sqrt{\frac{-|A\,|}{\mathrm{Tr}(A_0)}}.$$

Todos los resultados anteriores se recogen en la siguiente tabla.

CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS

$$\begin{array}{c} |A| \neq 0 \\ \text{Cónica} \\ \text{Irreducible} \end{array} \begin{cases} \begin{array}{c} A_{00} \neq 0 \\ \text{Cónica} \\ \text{con centro} \end{array} \begin{cases} \begin{array}{c} A_{00} > 0 \\ \text{Elipse} \end{array} \begin{cases} \mathrm{sig}(|A|) = \mathrm{sig}(\mathrm{Tr}(A_0)) \text{ E.I.} \\ \mathrm{sig}(|A|) \neq \mathrm{sig}(\mathrm{Tr}(A_0)) \text{ E.R.} \end{cases} \\ \\ \begin{array}{c} A_{00} < 0 \\ \text{Hipérbola} \end{array} \end{cases} \\ \\ \begin{array}{c} A_{00} = 0 \\ \text{Parábola} \end{array} \end{cases}$$

Ecuaciones reducidas

- **Elipses e hipérbolas**: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_{00} = 0$
  Donde: $b_{00} = \dfrac{|A|}{A_{00}}$ y ($\lambda_1,\ \lambda_2$ son los autovalores de autovalores de A_0).
- **Parábolas**: $\lambda_2 y^2 + 2b_{01}x = 0$
  Donde: $b_{01} = \pm\sqrt{\dfrac{-|A|}{\mathrm{Tr}(A_0)}}$ y $\lambda_2 = \mathrm{Tr}(A_0)$, es el autovalor no nulo de A_0.

5.3 Elementos de las cónicas. Resumen

1. **Tangentes t a una cónica $\mathcal{C}$**
   - $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C} \Longrightarrow r_t \equiv (1, x_0, y_0)\, A\, (1, x, y)^t = 0.$
   - $P \equiv (a, b) \notin \mathcal{C}$.
     Sea $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. De este modo, $D(t) = \langle \overrightarrow{P_0P} \rangle$.
     (a) Calculamos el punto P_0 resolviendo el sistema:

     $$\begin{cases} (1, x_0, y_0)\, A\, (1, x_0, y_0)^t = 0 \\ (1, x_0, y_0)\, A\, (1, a, b)^t = 0 \end{cases}$$

     donde, en la segunda ecuación se ha impuesto la condición de que $P = (a, b)$ pertenezca a la recta tangente por P_0.

(b) Calculamos la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ por P_0 por el método del apartado anterior o bien, teniendo en cuenta que $t = P + \langle \overrightarrow{P_0P} \rangle$.

2. **Centro C de una cónica**. (Centro de simetría)
Basta resolver el sistema,

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{01} & + & a_{11}x & + & a_{12}y & = & 0 \\ a_{02} & + & a_{12}x & + & a_{22}y & = & 0 \end{array} \right.$$

donde, como puede observarse, los coeficientes del sistema son, respectivamente, la segunda y tercera filas de A.

3. **Ejes (e) de las cónicas**. (Ejes de simetría)

- **Elipses e hipérbolas**
  (a) Dirección de los ejes.
  Se calcula resolviendo la ecuación:

$$(\alpha, \beta)\, A_0\, (-\beta, \alpha)^t = 0$$

  (b) Se calcula el centro C de la cónica
  (c) Para cada dirección, se calcula la ecuación del eje e teniendo en cuenta que dicho eje pasa por el centro de la cónica. Es decir:

$$e \equiv \mathbf{x} = \mathbf{c} + \lambda(\alpha, \beta)$$

- **Parábolas** La ecuación del eje viene dada por:

$$(0, a_{11}, a_{12})\, A\, (1, x, y)^t = 0 \quad \equiv \quad (0, a_{12}, a_{22})\, A\, (1, x, y)^t = 0$$

  Aunque alguna de ellas pudiera dar la identidad $0 = 0$.
  Siempre es válida la fórmula:

$$(0, -A_{02}, A_{01})\, A\, (1, x, y)^t = 0$$

4. **Asíntotas de la hipérbola**

(a) Direcciones Asintóticas.
Se calculan resolviendo la ecuación:

$$(\alpha, \beta)\, A_0\, (\alpha, \beta)^t = 0$$

(b) Ecuaciones de las asíntotas (a).
Vienen dadas por:

$$a \equiv (0, \alpha, \beta) A (1, x, y) t = 0.$$

Nota Cuando se conocen las coordenadas del centro C de la hipérbola, se tiene que

$$a \equiv= C + \langle (\alpha, \beta) \rangle,$$

ya que las asíntotas pasan por el centro de la hipérbola.

5. **Focos de las cónicas**.

- **Elipse (Hipérbola)**
  (a) Se calculan: su ecuación reducida, semidistancia focal (c), centro y ejes de la elipse (hipérbola).

(b) Se decide cuál es el eje mayor (eje real).
En el caso de la elipse, un procedimiento para determinar el eje mayor es calcular la intersección de uno de los ejes con la elipse con lo cual se calcularán dos vértices opuestos, V y V', de la misma. Si $\mathrm{d}(V, V') = 2a$ el eje elegido es el eje mayor.
En el caso de la hipérbola, se calcula la intersección de un eje con dicha hipérbola y si la intersección es real, el eje elegido es el eje real. En caso contrario, hemos elegido el eje imaginario.

(c) Los focos son los puntos sobre el eje mayor (eje real) cuya distancia al centro es igual a c.

- **Parábola** ($\mathcal{P}$).

(a) Se calculan: su ecuación reducida, parámetro p de la parábola, eje y vértice V ($V = e \cap \mathcal{P}$).

(b) El foco (F) es un punto sobre el eje tal que la distancia al vértice es igual a $\dfrac{p}{2}$.

(c) Se calcula la perpendicular r_p, al eje e pasando por F.
Caso 1.– $r_p \cap \mathcal{P} = \emptyset \Longrightarrow r_p$ es la directriz.
Caso 2.– $r_p \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \Longrightarrow F$ es el foco de $\mathcal{P}$.

5.4 Ejemplos

Ejemplo 1 Dada la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 3x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 4y - 5 = 0.$$

Se pide:

1. Clasificarla y hallar su ecuación reducida.
2. La tangente en el punto de ella, $P_0 = (1, 0)$.
3. Las tangentes a la cónica desde el origen de coordenadas.

Solución De los datos obtenemos que

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Como $\det(A) = 5$ y $A_{00} = \det(A_0) = -4$, se tiene que $\mathcal{C}$ es una hipérbola.
2. La ecuación reducida de las hipérbolas es de la forma,

$$\lambda_1\, x^2 - \lambda_2 y^2 + \frac{|A|}{A_{00}} = 0,$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de A_0.

$$|\lambda I - A_0| = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0,$$

de donde

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{5}.$$

Por consiguiente la ecuación reducida de $\mathcal{C}$ es

$$(1 + \sqrt{5})\, x^2 + (1 - \sqrt{5})\, y^2 - \frac{5}{4} = 0.$$

3. Se tiene que $P_0 \in \mathcal{C}$ y $O \notin \mathcal{C}$

   - Como $P_0 \in \mathcal{C}$, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ por P_0 viene dada por la fórmula

     $$(1,1,0)\,A\,(1,x,y)^t = 0.$$

     Es decir, la ecuación buscada es

     $$4x - y - 4 = 0\,.$$

   - Como $O \notin \mathcal{C}$ tratemos de calcular un punto $P = (\alpha, \beta) \in \mathcal{C}$ tal que la recta P_0P sea tangente a $\mathcal{C}$.
     Se han de cumplir dos condiciones:

     – $P \in \mathcal{C} \Longrightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 + 2\alpha - 4\beta - 5 = 0.$

     – El punto O debe pertenecer a la tangente a $\mathcal{C}$ por el punto P. Dicha tangente tiene por ecuación

     $$t_0 \equiv (1,\alpha,\beta)\,A\,(1,x,y)^t = 0$$

     y, por tanto, se ha de verificar la condición

     $$(1,\alpha,\beta)\,A\,(1,0,0)^t = 0.$$

     Condición, que es equivalente a

     $$-5 + \alpha - 2\,\beta = 0.$$

     Se trata pues de resolver el sistema formado por ambas ecuaciones.

     $$\left\{\begin{array}{rcl} 3\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 + 2\alpha - 4\beta - 5 & = & 0 \\ \alpha - 2\,\beta - 5 & = & 0 \end{array}\right.$$

     cuyas soluciones son

     $$\left\{\alpha = -\frac{1}{3},\ \beta = -\frac{8}{3}\right\}, \quad \{\alpha = 1,\ \beta = -2\}\,.$$

     Calculando las ecuaciones de las rectas OP para las dos soluciones de P, se tiene que las tangentes buscadas son

     $$y = 8\,x, \quad y = -2\,x.$$

Ejemplo 2 Dada la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 7x^2 + 8xy + y^2 + 12x - 6y + 3 = 0$$

Se pide:

1. Clasificarla.
2. Calcular se ecuación reducida, semiejes y semidistancia focal.
3. Coordenadas de su centro.
4. Ecuaciones de sus ejes.
5. id. de sus asíntotas.
6. Coordenadas de los focos.

Solución

1. Sean A y A_0 las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 6 & 7 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   - Como $\det(A) = -270,\ A_{00} = \det(A_0) = -9$, se deduce que $\mathcal{C}$ es una hipérbola.
   - Su ecuación reducida viene dada por

$$\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 + \frac{|A|}{A_{00}} = 0,$$

     donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de A_0. Calculemos pues dichos autovalores.

$$|\lambda I - A_0| \Longrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 9.$$

     Por tanto, la ecuación reducida de $\mathcal{C}$ es

$$x^2 - 9y^2 = 30 \equiv \frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{\frac{10}{3}} = 1 \Longrightarrow a^2 = 30,\ b^2 = \frac{10}{3},\ c^2 = \frac{100}{3}.$$

2. El centro de la hipérbola se obtiene resolviendo el sistema

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 6 + 7x + 4y & = & 0 \\ -3 + 4x + y & = & 0 \end{array} \right.$$

   cuya solución es

$$C = (2,\ -5).$$

3. Las direcciones de los ejes $(e_1,\ e_2)$ vienen dadas por la ecuación

$$(\alpha,\ \beta) A_0 (-\beta,\ \alpha)^t = 0,$$

   de donde obtenemos

$$-6\,\beta\,\alpha - 4\,\beta^2 + 4\,\alpha^2 = 0 \equiv 2\,\alpha^2 - 3\,\alpha\,\beta - 2\,\beta^2 = 0,$$

   ecuación de segundo grado que resuelta en la incógnita α tiene como soluciones

$$\alpha = \beta,\ \alpha = -\frac{1}{2}\beta.$$

   Dando a β, respectivamente, los valores 1 y -2, obtenemos que

$$D(e_1) = \langle (2,1) \rangle,\ D(e_2) = \langle (1,-2) \rangle.$$

   Luego las ecuaciones de los ejes son:

$$e_1 = (2,-5) + \langle (2,1) \rangle, \quad e_2 = (2,-5) + \langle (1,-2) \rangle.$$

4. Sean a_1 y a_2 las asíntotas de la hipérbola. Las direcciones asintóticas vienen dadas por la ecuación

$$(\alpha,\ \beta) A_0 (\alpha,\ \beta)^t = 0,$$

   de donde obtenemos

$$7\,\alpha^2 + 8\,\beta\,\alpha + \beta^2 = 0,$$

ecuación, que resuelta en la incógnita α, tiene como soluciones

$$\alpha = -\beta, \quad \alpha = -\frac{\beta}{7},$$

de donde

$$D(a_1) = \langle (1,-1) \rangle, \; D(a_2) = \langle (1,-7) \rangle$$

y, por tanto,

$$a_1 = (2,-5) + \langle (1,-1) \rangle, \quad a_2 = (2,-5) + \langle (1,-7) \rangle.$$

5. Para calcular los focos hay que decidir, en primer lugar, cuál es el eje real (eje que corta a la hipérbola). Tomemos, por ejemplo, el eje

$$e_2 = (2,-5) + \langle (1,-2) \rangle \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & -5-2t \end{array} \right.$$

Para averiguar si corta a la hipérbola hay que comprobar que el siguiente sistema tiene soluciones reales.

$$\mathcal{C} \cap e_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 7x^2 + 8xy + y^2 + 12x - 6y + 3 & = & 0 \\ x & = & 2+t \\ y & = & -5-2t \end{array} \right.$$

Sustituyendo los valores de x e y, dados por las ecuaciones segunda y tercera, en la primera ecuación. se tiene que

$$30 - 5t^2 = 0 \Longrightarrow t = \pm\sqrt{6},$$

lo que nos indica que $\mathcal{C} \cap e_2 \neq \emptyset$, luego e_2 es el eje real.
Nótese que con este resultado podríamos calcular fácilmente los vértices reales de la hipérbola.
Hay que hallar, ahora, un punto sobre e_2 tal que su distancia al centro C sea igual a c (semidistancia focal). O, lo que es lo mismo:

$$(2+t-2)^2 + (-5-2t+5)^2 = \frac{100}{3} \Longrightarrow t = \pm\frac{2}{3}\sqrt{15},$$

de donde

$$x = 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{15}, \quad y = -5 \mp \frac{4}{3}\sqrt{15}.$$

Ejemplo 3 Dada la cónica

$$\mathcal{P} \equiv x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 = 0,$$

se pide:

1. Probar que es una parábola y calcular su ecuación reducida.
2. La ecuación de su eje.
3. Las coordenadas del vértice.
4. Las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de dicha parábola.

Solución

1. De la ecuación de $\mathcal{P}$ deducimos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   - Como $\det(A) = -1,\ \det(A_0) = 0$, se deduce que $\mathcal{P}$ es una parábola.
   - La ecuación reducida de una parábola es

$$\lambda_2\, y^2 = 2\sqrt{\frac{-|A|}{\mathrm{Tr}(A_0)}}\, x,\ (\lambda_2 = \mathrm{Tr}(A_0)).$$

     Por tanto, sustituyendo los valores calculados, se tiene la ecuación reducida

$$2\, y^2 = 2\sqrt{\frac{1}{2}}\, x \Longrightarrow y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x.$$

     Ahora bien, si p es el parámetro de la parábola,

$$2p = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{5.5}$$

     Este último dato lo utilizaremos más adelante.

2. Calculemos el eje y el vértice de $\mathcal{P}$.

   - La ecuación del eje e de una parábola viene dada por

$$(0, a_{11}, a_{12})A(1,\, x,\, y)^t = 0.$$

     sustituyendo, se tiene que

$$e \equiv 1 + 2\,x - 2\,y = 0.$$

   - El vértice V se obtiene resolviendo el sistema

$$V = \mathcal{P} \cap e \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 & = & 0 \\ 1 + 2\,x - 2\,y & = & 0 \end{array} \right.$$

     de donde $V = \left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right)$.

3. El foco es un punto sobre el eje e de la parábola tal que su distancia al vértice V es igual a $\frac{p}{2}$. Es decir, si F es el foco se ha de verificar que

$$\mathrm{d}(F, V)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

   Como un punto de e es de la forma $\left(t,\, \frac{1}{2} + t\right)$, se tiene que

$$\left(t + \frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + t + \frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2,$$

   de donde

$$2\left(t + \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{1}{32} \Longrightarrow t = -\frac{3}{4}, \quad t = -\frac{1}{2}.$$

Ahora bien,

$$t = -\frac{3}{4} \Longrightarrow F_1 = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right),$$

$$t = -\frac{1}{2} \Longrightarrow F_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Para decidir cuál de los puntos F_1 o F_2 es el foco, calculamos:

- la recta r_p perpendicular el eje por uno de los puntos. Elijamos, por ejemplo, F_2.

$$r_p \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right) + y = 0.$$

- Si $r_p \cap \mathcal{P} = \emptyset$, r_p es la directriz. Si, por el contrario, $r_p \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, F_2 sería el foco.

$$r_p \cap \mathcal{P} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1 & = & 0 \\ y & = & -x - \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

  de donde

$$16\,x^2 + 16\,x + 5 = 0.$$

  Como esta ecuación carece de solución real, podemos afirmar que r_p es la directriz y F_1 el foco de la parábola.

Ejemplo 4 Dada la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 6\,x^2 + 4\,x\,y + 6\,y^2 - 16\,x - 16\,y = 0,$$

calcular los focos de la misma.

Solución
Las matrices de la cónica son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 \\ -8 & 6 & 2 \\ -8 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Para resolver el problema, daremos los siguientes pasos:

1. **Clasificación** Como

$$\det(A) = -512,\ A_{00} = \det(A_0) = 32,\ \operatorname{sig}(|A|) \neq \operatorname{sig}\big(\operatorname{Tr}(A_0)\big),$$

   se deduce que $\mathcal{C}$ es una *elipse real*.

2. **Ecuación reducida**

$$|\lambda I - A_0| = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 12\,\lambda + 32 = 0 \Longrightarrow \lambda = 8,\ \lambda = 4.$$

   Luego la ecuación reducida es

$$4\,x^2 + 8\,y^2 - 16 = 0,$$

   de donde obtenemos

$$a^2 = 4, b^2 = 2 \Longrightarrow c^2 = 2.$$

3. **Centro** Obtenemos las coordenadas del centro resolviendo el sistema

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} -8 + 6x + 2y & = & 0 \\ -8 + 2x + 6y & = & 0 \end{array} \right.$$

   cuya solución es $C = (1, 1)$.

4. **Ejes** $(e_1,\, e_2)$ De
$$(\alpha,\, \beta)A_0(-\beta,\, \alpha)^t = 0 \Longrightarrow -2\,\beta^2 + 2\,\alpha^2 = 0,$$
Ecuación, que resuelta en la incógnita α tiene como soluciones
$$\alpha = \pm\beta \Longrightarrow D(e_1) = \langle(1,\, 1)\rangle,\ D(e_2) = \langle(1,\, -1)\rangle.$$
Por tanto,
$$e_1 = (1,\, 1) + \langle(1,\, 1)\rangle, \quad e_2 = (1,\, 1) + \langle(1,\, -1)\rangle.$$

5. **Eje mayor** . Para determinar cuál es el eje mayor, podemos aplicar lo expuesto en el apartado 5 (Elipse) de la sección 5.3. Sin embargo es bueno recordar que *la dirección del eje mayor es un autovector asociado al menor autovalor (en valor absoluto) de* A_0. Esto simplifica mucho los cálculos. En efecto,
$$(1,1)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = (8,8) = 8(1,1),$$
de donde deducimos que e_1 **no** es el eje mayor.
Pero
$$(1,-1)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = (4,-4) = 4(1,-1),$$
luego el eje mayor es
$$e_2 = (1,\, 1) + \langle(1,\, -1)\rangle.$$

6. **Focos** Recordemos que los focos son dos puntos sobre el eje mayor tal que la distancia de cada uno de ellos al centro de la elipse es igual a c (semidistancia focal). De acuerdo con esto, si F es un foco, tenemos que
   - $F \in e_2 \Longrightarrow F = (1+t, 1-t)$.
   - $\mathrm{d}(F,C)^2 = c^2 \Longrightarrow (1+t-1)^2 + (1-t-1)^2 = 2 \Longrightarrow t = \pm 1$.

   Luego,los focos de la elipse son
$$F_1 = (2,0), \quad F_2 = (0,2).$$

Ejemplo 5 Dados un punto F, una recta r y el número real $e > 0$, se pide:

1. Probar que el lugar geométrico de los puntos del plano tales que
$$\frac{\mathrm{d}(P,F)}{\mathrm{d}(P,r)} = e$$
es una cónica no degenerada.
2. Clasificarla según los valores de e.
3. Calcular la ecuación en la forma polar de dicha cónica.

Solución

Para mayor sencillez, tomemos la siguiente referencia:

- Origen de coordenadas: el punto $O = F$.
- Eje OX: la perpendicular a r desde el punto F. Sea $r \cap OX = D$ asignemos a D las coordenadas $D = (d,0)$ con lo cual $r \equiv x = d$,
- Como es obvio, el eje OY queda determinado trazando la perpendicular a OX por O.

1. Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera del plano, teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que

$$\mathrm{d}(P, F) = \mathrm{d}(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{d}(P, r) = |x - d|.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\mathrm{d}(P, F)}{\mathrm{d}(P, r)} = e \Longrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(x - d)^2} = e^2,$$

de donde se obtiene la ecuación

$$\mathcal{C} \equiv (1 - e^2)x^2 + t^2 + 2e^2dx - e^2d^2 = 0 \tag{5.6}$$

que, evidentemente, es la ecuación de una cónica.
Para ver que no es degenerada construyamos la matriz de dicha cónica:

$$A = \begin{pmatrix} -e^2d^2 & e^2d & 0 \\ e^2d & 1 - e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_0 = \begin{pmatrix} 1 - e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = -e^2d^2 < 0$, la cónica $\mathcal{C}$ es no degenerada.

2. Para clasificar la cónica, tengamos en cuenta que

$$A_{00} = \det(A_0) = 1 - e^2, \ (e > 0),$$

por consiguiente,

$$\begin{array}{ccccc} 0 < e < 1 & \Longrightarrow & A_{00} > 0, \ \mathrm{Tr}(A_0) > 0 & \Longrightarrow & \mathcal{C} \text{ es una E.R.} \\ e = 1 & \Longrightarrow & A_{00} = 0 & \Longrightarrow & \mathcal{C} \text{ es una P.} \\ 1 < e & \Longrightarrow & A_{00} < 0 & \Longrightarrow & \mathcal{C} \text{ es una H.} \end{array}$$

El número $e > 0$ recibe el nombre de excentricidad de la cónica.

3. Haciendo

$$x = \rho\cos\theta, \ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \Longrightarrow \rho^2 = x^2 + y^2$$

y sustituyendo en 5.6, se tiene

$$\rho = \frac{e\,d}{e\cos\theta - 1}$$

que es la ecuación en la forma polar de $\mathcal{C}$.

Nota No es difícil comprobar que en los casos en que $e \neq 1$ (elipses e hipérbolas), $e = \dfrac{c}{a}$. En efecto, calculemos la ecuación reducida de $\mathcal{C}$. En el caso elipse se tiene que

$$a = \frac{e\,|d|}{1 - e^2}, \ c = \frac{e^2|d|}{1 - e^2}$$

y, en el caso hipérbola,

$$a = \frac{e\,|d|}{e^2 - 1}, \ c = \frac{e^2|d|}{e^2 - 1}$$

y, ambos casos, es

$$e = \frac{c}{a}.$$