

# Tema 4

## Variedades lineales

### 4.1 Ecuaciones de una variedad lineal

Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $K$  y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $V$ . Sean  $H = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$  y  $L = L(H)$ .

**Proposición 4.1.1.**— Sea  $\mathbf{v} \in V$  y  $(x_1, \dots, x_n)$  sus coordenadas respecto de  $\mathcal{B}$ . Son equivalentes:

- (1)  $\mathbf{v} \in L$ .
- (2) Existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  tales que:

$$(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \cdot H_{\mathcal{B}}$$

donde  $H_{\mathcal{B}}$  es la matriz de las coordenadas de los vectores  $\mathbf{v}_i$  respecto de  $\mathcal{B}$ .

**Definición 4.1.2.**— El sistema de ecuaciones que aparece en 4.1.1 se dice que es un sistema de ecuaciones paramétricas de  $L$  respecto de  $\mathcal{B}$ .

**Nota 4.1.3.**— Un sistema de ecuaciones paramétricas de una variedad  $L$  depende de la base de  $V$  y del sistema de generadores de  $L$  elegidos.

**Proposición 4.1.4.**— Existe un sistema de ecuaciones lineales homogéneo  $S$  tal que para todo  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{v} \in L \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\mathcal{B}}$  es solución de  $S$ .

**Definición 4.1.5.**— El sistema  $S$  obtenido en 4.1.4 se dice que es un sistema de ecuaciones implícitas de  $L$  respecto de  $\mathcal{B}$ .

**Nota 4.1.6.**— Un sistema de ecuaciones implícitas de una variedad  $L$  depende de la base de  $V$  y del sistema de generadores de  $L$  elegidos.

**Definición 4.1.7.**—

- (1) Dos sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.
- (2) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo se dice linealmente independiente si no es equivalente a otro con un número menor de ecuaciones.

**Proposición 4.1.8.**—

- (1) El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

es linealmente independiente si y sólo si

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = m$$

- (2) Todo sistema es equivalente a uno linealmente independiente.

**Corolario 4.1.9.**— Toda variedad tiene un sistema de ecuaciones implícitas linealmente independientes.

## 4.2 Operaciones con variedades

**Proposición 4.2.1.**— Sea  $\mathcal{F} = \{L_i : i \in I\}$  una familia de variedades lineales de  $V$ . Entonces la intersección de  $\mathcal{F}$ ,  $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} L_i$ , es una variedad lineal de  $V$ .

**Nota 4.2.2.**— La unión de variedades no es necesariamente una variedad.

**Definición 4.2.3.**— Sea  $\mathcal{F} = \{L_i : i \in I\}$  una familia de variedades lineales de  $V$ . Definimos la suma de  $\mathcal{F}$  como,

$$\sum_{i \in I} L_i = L\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right)$$

**Nota 4.2.4.**— Si  $I = \{1, \dots, r\}$ , notaremos

$$\sum_{i \in I} L_i = L_1 + \dots + L_r$$

**Proposición 4.2.5.**— Sea  $\{L_i : i \in I\}$  una familia de variedades de  $V$ . Si  $I = \{1, \dots, r\}$ , entonces:

$$L_1 + \dots + L_r = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_i \in L_i\}$$

**Definición 4.2.6.**— Sean  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$  variedades de  $V$ . Diremos que  $L$  es suma directa de  $L_1$  y  $L_2$ , y se notará  $L = L_1 \oplus L_2$ , si se verifican las condiciones siguientes:

- (1)  $L = L_1 + L_2$ .
- (2)  $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$ .

**Proposición 4.2.7.**— Sea  $L = L_1 + L_2$ . Las condiciones siguientes son equivalentes:

- (1)  $L = L_1 \oplus L_2$
- (2) Para todo  $\mathbf{v} \in L$ , existen  $\mathbf{v}_1 \in L_1$  y  $\mathbf{v}_2 \in L_2$  únicos tales que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ .

**Definición 4.2.8.**— Sean  $L$ ,  $L_1, L_2, \dots, L_r$  variedades de  $V$ . Diremos que  $L$  es suma directa de  $L_1, L_2, \dots, L_r$ , y se notará  $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_r$ , si se verifican las condiciones siguientes:

- (1)  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_r$ .
- (2)  $L_i \cap \left(\sum_{j \neq i} L_j\right) = \{\mathbf{0}\}$  ,  $i, j = 1, 2, \dots, r$ .

**Teorema 4.2.9.**— (Fórmula de la dimensión) Sean  $L_1$  y  $L_2$  variedades de  $V$ . Se verifica:

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$$

**Proposición 4.2.10.– (Espacios producto)** Sean  $V_1, \dots, V_n$  espacios vectoriales sobre  $K$ . En el conjunto  $V_1 \times \dots \times V_n$  definimos las operaciones:

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n)$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = (\alpha \cdot \mathbf{x}_1, \dots, \alpha \cdot \mathbf{x}_n)$$

Se tiene que:

- (1)  $V_1 \times \dots \times V_n$  es un espacio vectorial sobre  $K$ .
- (2)  $\dim(V_1 \times \dots \times V_n) = \dim(V_1) + \dots + \dim(V_n)$ .