Curso preliminar de Matemáticas: técnicas y herramientas

1 Herramientas para la demostración

1.1

1. Sea el enunciado “Si n es un número entero par, entonces n^2 es par”. Enunciar el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco. Probar la certeza o falsedad de cada uno de ellos.
2. Sea ahora el enunciado “Si a y b son números reales tales que $a + b > 10$, entonces $a > 5$ y $b > 5$ ”. Enunciar el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco. Probar la certeza o falsedad de cada uno de ellos.

El siguiente esquema nos muestra la relación entre los distintos enunciados que pueden obtenerse a partir de un teorema, negando la hipótesis (H) y la tesis (T) o intercambiando su posición. Considerando el enunciado (directo) como $H \implies T$, resulta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Recíproco} & \\
 H \implies T & \longleftrightarrow & T \implies H \\
 \text{Contrario} \updownarrow & * & \updownarrow \text{Contrario} \\
 \text{no}H \implies \text{no}T & \longleftrightarrow & \text{no}T \implies \text{no}H \\
 & \text{Recíproco} &
 \end{array}$$

* *Contrarrecíproco*

La lógica proposicional nos dice que dos enunciados contrarrecíprocos entre sí son equivalentes, esto es, ambos son verdaderos o falsos a la vez. El recíproco y el contrario de un enunciado son contrarrecíprocos entre sí, por lo que también son equivalentes. Sin embargo no se puede afirmar que exista una relación de veracidad o falsedad entre un enunciado y su recíproco o su contrario.

Si se tiene el enunciado $H \implies T$, suele decirse con frecuencia que “ H es condición suficiente para que se verifique T ” y también que “ T es condición necesaria para que se verifique H ”.

Si se tiene $H \iff T$, se dirá que “ H (respectivamente T) es condición necesaria y suficiente para que se verifique T (respectivamente H)”.

La demostración de un enunciado en su forma directa consiste en suponer que la hipótesis es cierta y, utilizando las reglas de inferencia lógicas, probar que la tesis es cierta. Pero, según lo dicho anteriormente, también se puede demostrar un teorema demostrando su contrarrecíproco (lo que suele hacerse si éste resulta más fácil).

Otra forma de demostrar teoremas es *por reducción al absurdo*. Este método consiste en suponer que la tesis es falsa y obtener, a partir de esta suposición, una contradicción, lo que nos lleva a afirmar que la tesis es cierta.

Veremos más adelante otras formas de demostración.

Ejercicios:

- 1.1 Probar por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ no es un número racional. El teorema podría enunciarse así: “Si r es un número real tal que $r^2 = 2$, entonces r es un número irracional”.
- 1.2 “Si en un trapecio isósceles las diagonales se cortan perpendicularmente, la altura es igual a la semisuma de las bases”. ¿Cuál es el enunciado recíproco? ¿Y el contrario? ¿Son todos verdaderos?

1.2 El Teorema de Inducción.

La suma de los n -primeros números se calcula con la fórmula

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

y que podemos denominar $Suma(n)$.

Hay un método llamado de *inducción* que permite **demostrar** la fórmula $Suma(n)$.

El método es bastante intuitivo. Se procede de la siguiente manera:

1. Comprobamos la fórmula para el primer valor de n :

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

2. Bajo la suposición (*Hipótesis de inducción*) de que para un valor de n la fórmula es cierta, se prueba que lo es para el valor siguiente, $n + 1$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1 + 2 + \dots + n + (n + 1)} \\ = & \quad \frac{\mathbf{n(n + 1)}}{\mathbf{2}} + (\mathbf{n + 1}) \quad [\text{Por Hipótesis de inducción}] \\ = & \quad \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \end{aligned}$$

- Tras verificar los pasos 1) y 2) podemos concluir que la fórmula es cierta, es decir, que: $\text{Suma}(n) \equiv 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se verifica para todo n .

De manera más abreviada podemos expresar el teorema de inducción así:

Si $\phi(n)$ es una fórmula sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ tal que:

a) *Se verifica $\phi(1)$ (**Caso base**)*

b) $\forall n(\phi(n) \longrightarrow \phi(n + 1))$ (**Paso inductivo**)

- *Entonces, $\forall n \phi(n)$.*

Ejercicios

- 1.3 Consideremos la suma de los números impares consecutivos:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1)$$

- Ensayar distintos casos: 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7,... hasta que obtengáis una conjetura sobre el valor de la suma de números impares consecutivos.
- Demostrar dicha conjetura por el método de inducción.

- 1.4 Probar por inducción la siguiente fórmula:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

- 1.5 a) ¿Cuántas cerillas se necesitan para construir N cuadrados en línea, de forma que el lado de cada cuadrado sea común al del cuadrado siguiente?
b) ¿Cuántas cerillas se necesitarán para construir un cuadrado conteniendo $N \times N$ cuadraditos?
- 1.6 División euclídea en $\mathbb{Z}$: para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, existen unos enteros q, r , con $a = bq + r$ y $0 \leq r < b$. Primero probar por inducción sobre a , para el caso de $a \geq 0$. Después hacer el caso $a < 0$ usando lo anterior con $-a$.
- 1.7 Todos los niños tienen el mismo color de pelo. Demostración: si $n = 1$ es evidente. Supongamos que cualquier conjunto de n niños verifica el aserto. Consideremos un conjunto de $n + 1$ niños, y de él dos subconjuntos de n niños. Ambos subconjuntos están formados por niños con el mismo color de pelo. Como ambos tendrán un niño en común, resulta que todos los niños tienen el mismo color. ¿Dónde está el error?
- 1.8 Para cada $n \geq 0$ probar que:
- $3^{2n} - 1$ es divisible por 8.
 - $n^3 - n$ es divisible por 3.
 - $n^5 - n$ es divisible por 5.
 - $n^7 - n$ es divisible por 7.
 - $n^p - n$ es divisible por p , para cada primo p .

2 Noción de conjunto. Pertenencia e inclusión

2.1

Dar diferentes ejemplos de conjuntos de uso común en Matemáticas, tanto finitos como infinitos.

- ¿Qué es para ti un conjunto?

Los objetos que forman un conjunto se llaman sus **elementos** y la relación entre un elemento y un conjunto es la de **pertenencia**. Se escribe $x \in A$ y se lee “(el objeto) x pertenece a (el conjunto) A ”. Un conjunto puede describirse, o bien exhaustivamente (es decir, nombrando a todos sus elementos), o bien especificando la propiedad que caracteriza a tales elementos. Además, un conjunto puede ser finito o infinito, dependiendo de la cantidad de objetos que tenga.

2.2

1. Dados dos conjuntos A y B , ¿cuándo se dirá que A es un subconjunto de B ? (en tal caso, se escribe $A \subseteq B$ y se lee “(el conjunto) A está contenido en (el conjunto) B ”). ¿Qué propiedades verifica esta relación de inclusión? Si por $\emptyset$ se denota al conjunto que no tiene ningún elemento (**conjunto vacío**), ¿es $\emptyset$ subconjunto de algún conjunto?
2. Dados dos conjuntos A y B , ¿cuándo se dirá que son iguales? ¿Cuáles son las propiedades de esta relación de igualdad? ¿Son iguales el conjunto A de los puntos del plano que están sobre la circunferencia de centro el origen y radio 1 y el conjunto B de los puntos del plano con coordenadas $(\cos t, \sin t)$, siendo t cualquier número real? (es muy conveniente convencerse que dichos conjuntos se escriben de la siguiente forma:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \cos t \text{ e } y = \sin t\}.$$

3. Un ejemplo muy utilizado lo constituyen los conjuntos cuyos elementos son, a la vez, otros conjuntos. Así, se denota por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de las **partes** del conjunto A , formado por todos los subconjuntos de A , incluyendo el conjunto vacío y el propio A .

¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$? Dados un conjunto A y un elemento $x \in A$, ¿qué relaciones de pertenencia, inclusión o igualdad se dan entre x , $\{x\}$, $\{\{x\}\}$, A y $\mathcal{P}(A)$?

3 Funciones

Definición Una aplicación f de un conjunto A (origen) en otro B (final), $f : A \rightarrow B$, es una correspondencia de A en B tal que a todo elemento de $x \in A$ le corresponde un único elemento $y \in B$.

Escribiremos: $f(x)=y$ para indicar que a x le corresponde y por la aplicación f .

Por ejemplo: la correspondencia que asigna a cada palabra del castellano su longitud es un aplicación. Sin embargo aquella que relaciona cada palabra con sus letras no lo es.

Las aplicaciones entre conjuntos numéricos suelen denominarse funciones. Hay casos como el del siguiente ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$$

que no está definida para los valores 5 y -5 .

En general suele hablarse de **funciones parciales** para indicar que hay elementos sobre los que la función puede no estar definida. Cuando está definida en todos los elementos se dice que la función es total.

El conjunto de valores en que está definida una función f se denomina su dominio, $dom(f)$ y el conjunto de valores que toma la misma se denomina recorrido o rango, $rang(f)$.

Definición Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ diremos que es:

sobreyectiva si $rang(f) = B$.

inyectiva si: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Definición Designamos por f^{-1} a la correspondencia de B en A que es recíproca de f ; es decir: $\forall y \in B (z \in f^{-1}(y) \leftrightarrow f(z) = y)$. Si f^{-1} es una aplicación, diremos que es la **inversa** de f .

Ejercicios

3.1 Probar que la aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida así:

$$f(n) = 5n + 4$$

es inyectiva pero no sobreyectiva. Probar, además, que f^{-1} es la inversa de f y calcularla explícitamente. ¿Es total f^{-1} ?

3.2 Probar la siguiente afirmación: f^{-1} es aplicación si y sólo si f es inyectiva.

3.3 La siguiente función, está definida recurrentemente:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(n) = f(n-1) & \text{si } f(n-1) \neq f(n-2) \\ f(n) = f(n-1) + 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{array} \right.$$

- Estudiar intuitivamente dicha función (por ejemplo, ensayando valores) hasta llegar al convencimiento de que dicha función es sobreyectiva y no inyectiva.
- Probar por inducción que f es sobreyectiva. Más en concreto, probar: $\forall y \in \mathbb{N} \exists x (f(x) = y)$ utilizando inducción sobre la variable y .

4 Operaciones de conjuntos. Cardinalidad

4.1

Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$, si $A \subseteq X$ se puede construir un subconjunto $f(A) \subseteq Y$, llamado **conjunto imagen (por f) de A** mediante

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}$$

y, dado un subconjunto $B \subseteq Y$, se puede construir un subconjunto $f^{-1}(B) \subseteq X$, llamado **conjunto imagen inversa** o **conjunto anti-imagen (por f) de B** por:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X/f(x) \in B\}.$$

1. ¿Es $f(X) = Y$? Si la respuesta es negativa, ¿bajo qué condiciones lo es? Dado $A \subseteq X$, ¿cuándo es $f(A) = \emptyset$? ¿Es $f^{-1}(Y) = X$? Dado $B \subseteq Y$, ¿puede ser $f^{-1}(B) = \emptyset$? Dado $y \in Y$, ¿tienen sentido $f^{-1}(y)$ y/o $f^{-1}(\{y\})$? ¿Por qué?
2. Dado un subconjunto $A \subseteq X$, ¿qué relación de inclusión existe entre A y $f^{-1}f(A)$? Probar que son iguales si y sólo si f es inyectiva. Dados un subconjunto $B \subseteq Y$, ¿qué relación de inclusión existe entre B y $ff^{-1}(B)$? ¿Cuándo son iguales?

4.2

Dos conjuntos X e Y se dice que tienen el mismo **cardinal** (o que tienen el mismo número de elementos) si existe una aplicación biyectiva $f : X \rightarrow Y$. Un conjunto infinito se dice que es **numerable** si tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y se dice que es **no numerable** si tiene un cardinal mayor.¹

Justificar las definiciones anteriores. Probar que el conjunto de los números naturales pares $A = \{2n/n \in \mathbb{N}\}$ es numerable. ¿Quiere esto decir que A y $\mathbb{N}$ tienen el mismo número de elementos? ¿Qué ocurre con el conjunto de los números naturales impares? ¿Y con el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros?

4.3

Se pasa a continuación a estudiar las operaciones entre conjuntos. Dados dos conjuntos A y B , se pueden considerar entre ellos tres operaciones: la **unión** $A \cup B$, la **intersección** $A \cap B$ y la **diferencia** $A - B$.

¹Es conocido, aunque no es objeto de este problema, que $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no tienen el mismo cardinal; de hecho, se sabe que el cardinal de $\mathbb{N}$ es estrictamente menor que el cardinal de $\mathbb{R}$. Por tanto, $\mathbb{R}$ es un ejemplo de conjunto no numerable.

1. Definir estas tres operaciones y enunciar las propiedades que verifican cada una y entre ellas, demostrando algunas de las mismas. Definir la **diferencia simétrica** de dos conjuntos.

Principio General de Adición

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son conjuntos finitos y dos a dos disjuntos, entonces $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$

Dados $A, B \subseteq X$ y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación, ¿bajo qué condiciones es $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$? ¿Bajo qué condiciones es $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? Responder las mismas preguntas con las anti-ímagenes.

Dado un conjunto X y $A \subseteq X$, se llama **complementario** de A al subconjunto $B \subseteq X$ definido por $B = \{x \in X / x \notin A\}$.

2. Probar que el complementario de A es realmente $X - A$. ¿Cuál es el complementario de X ? ¿Y el de $\emptyset$? Probar que el complementario de la intersección de dos subconjuntos de X es la unión de sus complementarios (es decir, que si $A, B \subseteq X$, entonces $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$) y que el complementario de la unión de dos subconjuntos de X es la intersección de sus complementarios (es decir, $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$). Estos dos últimos resultados se conocen con el nombre de **Leyes de De Morgan**. Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$ y dados $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, ¿se da alguna inclusión entre $f(X - A)$ y $f(X) - f(A)$? ¿Bajo qué condiciones son iguales? Probar que $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

5 Combinatoria

Principio General de Multiplicación

Si una experiencia E_1 arroja m resultados distintos y por cada uno de éstos otra experiencia E_2 arroja n resultados distintos, entonces la realización conjunta de E_1 y E_2 arroja $m \cdot n$ resultados distintos.

En particular, se quiere hacer una lista ordenada de longitud r . Para el primer lugar de la lista se puede elegir entre n_1 objetos, para el segundo lugar de la lista, entre n_2 objetos y así sucesivamente hasta el r -ésimo lugar de la lista, para el que se puede elegir entre n_r objetos. Entonces, el número total de listas de r objetos ordenados es $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$.

Definición Una variación de p elementos en un conjunto de m elementos $M = \{a_1, \dots, a_m\}$ (con $m \geq p$) es una p -tupla $a_{i_1} \dots a_{i_p}$ de elementos de M . Si se admiten elementos repetidos la variación se denomina **variación con**

repetición; caso contrario, se denomina **variación** o, también, **variación simple**. En este último caso, cuando $p = m$ la variación se denomina **permutación**.

Ejercicios

5.1 Trabajando con conjuntos de un número reducido de elementos, intenta obtener una ley de formación para las variaciones con repetición y para las variaciones simples.

A continuación, prueba por inducción en la variable p las siguientes fórmulas que nos dan el número de variaciones:

a) Con repetición: $VR_{m,p} = m^p$

b) Sin repetición: $V_{m,p} = m \cdot (m - 1) \cdots (m - p + 1)$

Nota: en particular, para las permutaciones de m elementos obtendremos:

$$V_{m,m} = m! = m \cdot (m - 1) \cdots 1$$

5.2 Con las cifras del conjunto $\{13278\}$ a) ¿cuántos números de cuatro cifras pueden obtenerse?; b) de estos, ¿cuántos empezarán por 3?; c) ¿y cuántos no contendrán el 7?; d) ¿cuántos números de cuatro cifras no tendrán ninguna repetida?

5.3 Obsérvese que una variación con repetición de p elementos en un conjunto M de m elementos es, en realidad, una aplicación total $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow M$.

Con el lenguaje conjuntista de aplicaciones, define las variaciones simples. A continuación, y utilizando esa definición, vuelve a demostrar por inducción sobre p la fórmula $V_{m,p}$ que calcula el número total de variaciones simples.

Definición Sea M un conjunto de m elementos; se denomina **combinación** de p elementos (o de orden p) a un subconjunto de M con p elementos.

El número de subconjuntos de orden p de M lo notaremos:

$$\binom{m}{p}$$

y lo denominaremos **número combinatorio**.

Ejercicios

5.4 Partiendo de la definición calcula, justifica o prueba:

- $\binom{m}{p}$ cuando $p = 0, 1, m - 1, m$

- Para todo $p \leq m$, $\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$
- ¿Qué valor sería razonable asignar a $\binom{m}{n}$ si $n > m$?

5.5 Teniendo en cuenta que una combinación es una variación simple en la que se ha prescindido del orden (por ejemplo, $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ son distintas variaciones pero representan a la misma combinación), probar la fórmula:

$$\binom{m}{p} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-p+1)}{p!} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad \text{si } m \geq p$$

- 5.6 Sea M un conjunto de m elementos ($m \neq 0$). Sea $\underline{a} \in M$. Expresar, mediante un número combinatorio, el número de subconjuntos de orden p :
- a) que contienen al elemento $\underline{a}$.
 - b) que no contienen al elemento $\underline{a}$.

Teniendo en cuenta que a) y b) proporcionan todos los subconjuntos de M con p elementos, ¿qué fórmula combinatoria podríamos escribir? ¿Qué relación hay entre esa fórmula y el triángulo de Pascal (o de Tartaglia)?:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
...	...	...	...	...	...	...

- 5.7 Se dispone de cuatro urnas distintas y veinte bolas numeradas del 1 al 20. ¿De cuantas formas podrán distribuirse las veinte bolas en las urnas, de tal manera que en la primera haya 5 bolas, 9 en la segunda, 3 en la tercera y 3 en la cuarta?

6 Experimentos aleatorios. Probabilidad

6.1 Experimentos aleatorios

Muchos de los acontecimientos de la vida diaria tienen una naturaleza impredecible. Por ejemplo en juegos de azar tales como el lanzamiento de monedas

o dados, lotería, etc. el resultado de los mismos es totalmente desconocido de antemano. Ejemplos menos lúdicos de la incertidumbre de los resultados de un experimento pueden encontrarse en la mayoría de las ciencias experimentales como en la Medicina, Biología, Química, Física, Meteorología, etc, o incluso en las Ciencias Sociales y la Economía, por citar algunos ejemplos.

De forma amplia, llamaremos *experimento* a cualquier cadena de circunstancias que al final producen un *resultado*. Un *experimento aleatorio*, será aquel en el que resulta imposible determinar el resultado final del mismo, aún en el caso en que se conocieran perfectamente las circunstancias que lo desencadenan. Por contra, un experimento se dice *determinístico* si la asociación de las mismas causas producen siempre el mismo resultado, como por ejemplo ocurre en las leyes físicas clásicas. La frontera entre experimentos determinísticos y aleatorios no es clara, de tal forma que en algunos experimentos determinísticos son tantas las causas que influyen en la posible respuesta (o posiblemente no se conozcan todas las causas) que resulta más sencillo su estudio bajo una modelización aleatoria.

La probabilidad es una cuantificación sobre el grado de posibilidad que se tiene sobre un resultado aleatorio.

En un principio podría parecer que por la propia naturaleza de los experimentos aleatorios, éstos no son susceptibles de estudio. Sin embargo no es así, el azar y la medición del mismo está regido por leyes matemáticas cuyo estudio son el objeto de la Teoría de la Probabilidad.

6.2 Espacio muestral

Aunque el resultado de un experimento aleatorio es desconocido, sí es posible conocer el conjunto de todos los resultados posibles. Éste conjunto se denomina *espacio muestral* y se denotará por Ω . Dicho conjunto se supondrá no vacío.

Lanzamiento de una moneda. Existen dos posibles resultados : cara (c) y cruz (+). El espacio muestral será:

$$\Omega = \{c, +\}.$$

Lanzamiento de un dado. El espacio muestral será:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Tiempo de vida de un dispositivo. En un control de calidad se desea investigar la duración de un dispositivo. Para ello se le pone a funcionar de manera continua hasta que deja de funcionar. Se observa entonces el tiempo durante el cuál el dispositivo ha estado funcionando (tiempo de vida). En este caso

$$\Omega = [0, \infty).$$

Otros ejemplos: lanzamiento de 2 ó de tres monedas, la máquina de Galton, etc.

6.3 Sucesos:

Los sucesos serán conjuntos de resultados; en el caso de que los sucesos tengan un único resultado los llamaremos sucesos elementales. Se suelen representar por letras mayúsculas $A, B, \dots$ mientras que los resultados los representaremos por letras minúsculas. Diremos que un suceso ocurre en una realización del experimento si el resultado de dicha realización pertenece a dicho suceso.

Ejemplos: en el caso del lanzamiento de un dado identificar los sucesos:

- Sacar un cinco.
- Salir par.
- Sacar un número menor o igual que tres.
- Sacar un número mayor que cero.
- Sacar un número menor que diez.

Podemos ver que ante una realización del experimento hay sucesos que intuitivamente tienen más o menos posibilidad de que ocurran.

Sucesos incompatibles: aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente. En caso contrario diremos que son compatibles.

Sucesos complementarios: ante una realización del experimento siempre ocurre uno y sólo uno de los dos.

Suceso imposible y suceso seguro.

6.4 Uso de los diagramas de árboles y de las tablas de doble entrada para describir los resultados posibles de un experimento

Consideremos el experimento que consiste en lanzar dos veces una moneda y representar sus resultados usando diagramas de árbol y tablas. Por ejemplo, en una tabla de doble entrada

	c	+
c	cc	c+
+	+c	++

o bien mediante un diagrama de árbol.

Extender el caso de los árboles a otros experimentos.

6.5 Una situación especial: experimentos con un número finito de resultados equiprobables

Una situación especial que admite un estudio simple es aquella en la que el experimento tiene un número finito de resultados y que, debido a la homogeneidad experimental, los podemos considerar equiprobables. Es decir:

$$P(x_i) = \frac{1}{n}$$

para cada uno de los n resultados posibles x_i .

La probabilidad de un suceso cualquiera A vendría dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Ejemplos: lanzar un dado, una o dos monedas etc.

6.6 ¿Qué hacer en otras situaciones?

1. Nos dicen previamente las probabilidades de los posibles resultados.
2. Las deducimos nosotros a partir del experimento: p.e. número de caras en el lanzamiento de tres monedas.
3. Las inferimos:
 - (a) Partir de una bolsa cuya composición es desconocida y plantear la posibilidad de intentar deducir su composición a partir del experimento que consiste en que un alumno saque una bola observe su color y la devuelva a la urna. Hacer ver cómo repitiendo este experimento podemos aproximarnos a dicha composición.
 - (b) Poner de manifiesto la analogía con la mayoría de las encuestas.
 - (c) Aplicación a la estimación del número de peces en un lago.

Otro posible tratamiento de las probabilidades de los sucesos sería como límite de frecuencias relativas de su ocurrencia cuando se repite el experimento.

6.7 ¿Qué hacer cuando el número de resultados no es finito?

Veamos algunas situaciones en la que el número de resultados no es finito y, por lo tanto, exigen otro tipo de tratamiento.

Ejemplo 1.-Consideremos el experimento que consiste en lanzar una moneda al aire hasta que salga la primera cara. Escribir algunos resultados posibles. ¿Cuántos resultados distintos podrían obtenerse? Piensa otros ejemplos en los que el número de resultados no sea finito.

Ejemplo 2:- Si elegimos un punto al azar en el segmento $(0,1)$, ¿cuántos resultados posibles podemos obtener? ¿Cuál sería la probabilidad de que el número obtenido sea menor que 0.5? ¿Y mayor que 0.4?

Ejemplo 3.- Si elegimos un punto al azar en el cuadrado de lado unidad, ¿cuál es la probabilidad de que caiga dentro del círculo inscrito?

6.8 Ejercicios

1. Al realizar una rifa con papeletas numeradas del 1 al 100, podemos considerar sucesos como los que siguen; indica dos de ellos que sean compatibles y dos que sean complementarios:
 - (a) Comprar los números que acaben en cero.
 - (b) No comprar ninguna papeleta.
 - (c) Comprar los números que son múltiplos de cinco.
 - (d) Comprar todas las papeletas.
 - (e) Comprar la número 17.
2. Ordena los siguientes sucesos según su probabilidad de menor a mayor:
 - (a) Obtener un número par al lanzar un dado.
 - (b) Obtener el 6 al lanzar un dado.
 - (c) Sacar una figura al extraer una carta al azar de una baraja española.
 - (d) Sacar un oro en una baraja española.
 - (e) Obtener dos cruces al lanzar dos veces una moneda.
3. Una caja fuerte dispone de tres discos numerados del 0 al 9 y sólo se abre si colocamos hacia arriba los tres dígitos que coincidan con la clave secreta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que si giramos al azar los tres discos y los detenemos en cualquier posición acertemos con la clave?
4. El pasasiete: dos jugadores A y B juegan de la siguiente manera, lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenida es mayor que 7, gana A; si es menor que 7 gana B; si la suma es siete vuelven a tirar. ¿Se trata de un juego equilibrado?
5. Lanzamos una moneda desequilibrada tal que la probabilidad de cara es el doble que la de cruz; si sale cara lanzamos otra vez la moneda, y si sale cruz lanzamos un dado. Escribir los posibles resultados y deducir sus probabilidades. Hallar la probabilidad del suceso (cara,par).
6. En la figura se observa un artilugio que consta de canales por los que caen bolas. Un artilugio de este tipo recibe el nombre de Máquina probabilística. Si se deja caer una bola y en cada ramificación puede caer indistintamente por cualquiera de los dos lados:
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola acabe en A? ¿Y en B?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que acabe en A o en B?
 - (c) Idea otro experimento equivalente a la máquina de la figura.

7 Estudio de la frontera de una figura

7.1

1. ¿En qué se diferencian las dos figuras siguientes?

Dos círculos: uno incluye la circunferencia y el otro no
--

Observación muy importante: las dos figuras tiene el mismo borde.

Determinación del borde de diversas figuras.

¿Está claro lo que entendemos por borde de una figura?

PROBLEMA 1: ¿Cuál es el borde de una recta? ¿Cuál es el borde de un punto?

Propuesta de definición: El borde separa los puntos de “dentro” de la figura de los puntos de “fuera”.

PROBLEMA 2: Probar (en el sentido de hacer pruebas) si la definición es correcta.

2. Borde y manipulación de figuras.

Consideremos dos figuras y la nueva figura formada por la unión (conjuntista) de las dos figuras iniciales.

Ejercicio 1: ¿El borde de la unión de dos figuras es la unión de los bordes de cada una?

La respuesta puede ser SÍ o NO, pero también puede ocurrir que haya casos en que sí y otros en que no.

Ejercicio 2: Hallar una situación en la que se cumpla que el borde de la unión de dos figuras es la unión de los bordes.

Ejercicio 3: Estudio análogo para la intersección de figuras.

Ejercicio 4: ¿Qué ocurre con el borde de una figura cuando la “movemos” (desplazamos y/o rotamos)?

Ejercicio 5: ¿Qué ocurre con el borde cuando “pegamos” figuras?

3. Clasificación de las figuras según su borde.

Si miramos que ocurre entre una figura y su borde vemos que hay tres tipos de figuras:

- (a) Figuras que incluyen todo su borde (figuras con borde).
- (b) Figuras que no contienen nada de su borde (figuras sin borde).
- (c) Las demás.

Nomenclatura usual: la **frontera** es el borde; si la figura es A , su frontera se escribe ∂A . Una figura con borde la llamamos **cerrada** y una figura sin borde la llamamos **abierta**.

PROBLEMA 3: Estamos suponiendo que todas las figuras tienen borde ¿Es cierto?

PROBLEMA 4: La figura es TODO EL PLANO ¿Tiene borde? ¿Cuál es? ¿Incluye el borde, o no?

7.2

1. La definición de punto de la frontera.

El siguiente ejemplo muestra que la definición inicial que dimos de borde/frontera no se corresponde con nuestra idea intuitiva de borde/frontera.

Ejemplo: círculo menos un radio

La solución está en definir, no la frontera como un todo, sino cuándo un punto es de la frontera de una figura.

DEFINICIÓN: Un punto P es de la frontera de una figura A si en cualquier (en todo) círculo centrado en P hay puntos de la figura A y del complemento de A .

Ejercicio 6: Revisar los ejercicios 1 a 5 y los problemas 1, 3 y 4 a la vista de la definición de punto frontera.

2. Operaciones con figuras abiertas y cerradas.

La manipulación con la frontera de las figuras no resulta fácil de estudiar por la dificultad de hallar reglas generales. Lo intentamos ahora con las figuras abiertas y las cerradas.

Puesto que toda figura tiene frontera (aunque sea vacía, recordar el PROBLEMA 3), podemos siempre considerar el **interior** de una figura: la figura sin su borde. De esta definición se sigue que una figura es abierta cuando coincide con su interior.

De la misma forma que hicimos con los puntos frontera, queremos saber cuándo un punto está en el interior de una figura.

DEFINICIÓN: Un punto P es del interior de una figura A si hay un círculo centrado en P donde sólo hay puntos de A .

Observaciones: El radio de ese círculo puede ser “muy pequeño”. Basta con que haya un círculo, aunque entonces habrá muchos.

Ejercicio 7: ¿Es abierta la unión de dos figuras abiertas?

Ejercicio 8: ¿Es abierta la intersección de dos figuras abiertas?

Ejercicio 9: ¿Qué ocurre si consideramos tres figuras? ¿Y cuatro?

Intentamos ahora responder a las mismas preguntas que antes sobre figuras abiertas, pero para figuras cerradas. Para ello es muy útil el siguiente resultado. Hay que probarlo, y para ello es útil el siguiente resultado auxiliar (que también hay que probar).

RESULTADO AUXILIAR (pero importante): La frontera de una figura es la misma que la frontera de la figura complementaria.

RESULTADO: Una figura es cerrada si y sólo si su complementaria es abierta.

Con este resultado y los ejercicios 8, 9 y 10 se puede resolver el siguiente ejercicio.

Ejercicio 10: ¿Es cerrada la unión de dos figuras cerradas? ¿Es cerrada la intersección de dos figuras cerradas? ¿Qué ocurre si consideramos más de dos figuras?

7.3

1. Consideremos la figura formada por los siguientes puntos del plano:

$$\mathcal{K} = \left\{ (1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right), \dots \right\}.$$

¿Los puntos de $\mathcal{K}$ son puntos frontera?

¿Tiene $\mathcal{K}$ puntos interiores?

¿Hay otros puntos que sean frontera de $\mathcal{K}$, aparte de los de $\mathcal{K}$?

2. Hagamos una pequeña variación sobre la figura anterior. Llamamos $\mathcal{C}[(a, b), R]$ al círculo de centro el punto (a, b) del plano y radio R . El conjunto $\mathbf{K}$ está formado por los siguientes círculos –en lugar de puntos como antes–

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathcal{C} \left[\left(1, 0\right), \frac{1}{4} \right], \mathcal{C} \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{8} \right], \mathcal{C} \left[\left(\frac{1}{4}, 0\right), \frac{1}{16} \right], \mathcal{C} \left[\left(\frac{1}{8}, 0\right), \frac{1}{32} \right], \dots \right\}.$$

¿Cuáles son los puntos frontera de $\mathbf{K}$?

¿Cuáles son los puntos interiores de $\mathbf{K}$?

¿Hay otros puntos que sean frontera de $\mathbf{K}$, aparte de los de $\mathbf{K}$?

Es interesante preguntarnos: ¿en qué varían las respuestas anteriores si los círculos que forman $\mathbf{K}$ son cerrados o son abiertos?