

PREPUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Résolution de certaines équations algébriques

Manuel J. Soto & José L. Vicente

Prepublicación nº 24 (Diciembre-2003)



Departamento de Álgebra. Universidad de Sevilla

1 Introduction

Dans cet article on va résoudre les équations $P(x, y, z) = 0$ où

$$P(x, y, z) = z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x, y)z + a_n(x, y) \in k[[x, y]][z],$$

$n > 1$ est un polynôme de Weierstraß irréductible (donc $a_n(x, y) \neq 0$).

Dans sa thèse, le premier auteur introduit certaines cônes convexes dans $\mathbb{R}^n$, qu'il appelle pyramides. Les pyramides intéressantes sont celles qu'on peut mener dans le premier cadran par une suite finie d'éclatements monomiaux. Dans cet article on étudie l'utilité de ces pyramides pour $n = 2$.

Les pyramides sont appelées ici secteurs privilégiés du plan en raison d'être en dimension 2. Le noyau de l'article sont les trois sections dernières ; les autres ne contiennent que les techniques qu'on utilise dans celles-là. Dans les trois sections dernières on démontre :

1. Les solutions de $P(x, y, z) = 0$, en prenant $k((y))$ comme corps de base, ont ses diagrammes de Newton contenus dans un secteur privilégié du plan. On utilise le théorème de Jung-Abhyankar pour cette démonstration.
2. On donne une démonstration directe du même fait, c'est-à-dire, sans utiliser le théorème de Jung-Abhyankar et se basant uniquement dans le calcul de Newton pour les équations en deux variables.
3. On donne une démonstration du théorème de Jung-Abhyankar en se basant sur le théorème précédent.

Tout cela prouve que, dans un certain sens, le théorème de Jung-Abhyankar est équivalent au fait d'introduire les diagrammes de Newton des racines dans un secteur privilégié du plan.

2 Rappel d'arithmétique

Dans cette section nous allons décrire les groupes abéliens finis que nous traiterons dans cet article. On va partir de $\mathbb{Z}^2$ et, pour toute collection de vecteurs $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$ on va dénoter par $H = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par ces vecteurs. Soit $q > 1$ un entier et soit $\Delta_q = \langle (q, 0), (0, q) \rangle$ le sous-groupe diagonal. Notre but est d'étudier les groupes finis de la forme H/Δ_q , où H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ contenant Δ_q . Un tel H est engendré par les colonnes d'une matrice

$$M = \begin{pmatrix} q & 0 & u_1 & \cdots & u_m \\ 0 & q & v_1 & \cdots & v_m \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice N d'entiers on va dénoter par $\delta_i(N)$ le plus grand commun diviseur de ses mineurs d'ordre i . Il est bien connu que, étant donnée une matrice M comme avant, il  existent deux matrices P, Q inversibles sur $\mathbb{Z}$ telles que

$$PMQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < d_1, d_2 \leq q$$

et $d_1|d_2$. La matrice du membre de droite est unique car $d_1 = \delta_1(M)$, $d_2 = \delta_2(M)/d_1$; elle s'appelle *la forme canonique* de M (voir [3, théorème 3.8, page 176], par exemple). La matrice P définit un automorphisme $\varphi : (x, y)^t \rightarrow P(x, y)^t$ de $\mathbb{Z}^2$, et il est clair que $\varphi(H) = \langle (d_1, 0), (0, d_2) \rangle$. En outre, il est clair que $\varphi(\Delta_q) = \Delta_q$.

Proposition 2.1.— Soit (u_{m+1}, v_{m+1}) un vecteur d'entiers,

$$M' = \begin{pmatrix} q & 0 & u_1 & \cdots & u_m & u_{m+1} \\ 0 & q & v_1 & \cdots & v_m & v_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Alors $(u_{m+1}, v_{m+1}) \in H$ si et seulement si $\delta_2(M) = \delta_2(M')$.

Démonstration: Si $(u'_{m+1}, v'_{m+1}) = \varphi(u_{m+1}, v_{m+1})$ on a

$$PM' \left(\frac{Q}{0} \middle| \frac{0}{1} \right) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u'_{m+1} \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & v'_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$(u_{m+1}, v_{m+1}) \in H \Leftrightarrow \varphi(u'_{m+1}, v'_{m+1}) \in \varphi(H) \Leftrightarrow d_1|u'_{m+1}, d_2|v'_{m+1}$$

et, comme les mineurs d'ordre 2 de la matrice du membre de droite sont d_1d_2 , $d_1v'_{m+1}$, $d_2u'_{m+1}$, on a clairement le résultat. $\square$

Remarque 2.2.— Les possibilités pour les éléments $(x', y') \in \varphi(H)/\Delta_q$ (modulo q) sont

$$x' = d_1, 2d_1, \dots, \left(\frac{d}{d_1}\right) d_1, \quad y' = d_2, 2d_2, \dots, \left(\frac{d}{d_2}\right) d_2$$

donc $\varphi(H)/\Delta_q$ a $q^2/(d_1d_2) = q^2/\delta_2(M)$  l ments.

Remarque 2.3.— Changeons le point de vue : on peut vouloir résoudre dans $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q)^2$ le système linéaire $(x, y)M = 0$ sur $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q$. Il est clair que l'ensemble

S des solutions est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q)^2$. Pour savoir combien il y en a on remarque que le rapport entre S et le groupe de solutions S' du système

$$(x', y') \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = 0$$

est $(x', y') = (x, y)P^{-1}$. On va compter les éléments de S' . Les possibilités sont

$$x' = \frac{d}{d_1}, 2\frac{d}{d_1}, \dots, d_1\frac{d}{d_1}, \quad y' = \frac{d}{d_2}, 2\frac{d}{d_2}, \dots, d_2\frac{d}{d_2},$$

donc il y en a $d_1 d_2 = \delta_2(M)$ éléments dans S' et dans S .

3 Séries de Puiseux

On va étudier dans cette section les séries de Puiseux générales en x, y . Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, x, y variables, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Remarque 3.1.— Les éléments de $k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, $q \in \mathbb{Z}_+$, s'appellent les *séries de Puiseux entières*. Le corps de fractions $k((x^{1/q}, y^{1/q})) = k((x, y))(x^{1/q}, y^{1/q})$ est une extension galoisienne de $k((x, y))$ avec groupe de Galois $G = G_q \times G_q$, où G_q est le groupe des racines q -ièmes de l'unité dans k . Le groupe G agit de la façon suivante : si $(\alpha, \beta) \in G_q \times G_q$ alors l'automorphisme correspondant mène $x^{1/q}$ sur $\alpha x^{1/q}$ et $y^{1/q}$ sur $\beta y^{1/q}$.

On peut décrire G et son action sur $k((x^{1/q}, y^{1/q}))$ d'une façon différente. On fixe, d'une fois pour toujours, une racine primitive q -ième de l'unité η ; alors G_q est isomorphe à $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q$ par un isomorphisme qui mène η^a , $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < q$, sur a . On peut, donc, considérer que $G = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q)^2$, agissant de la façon suivante : si $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$, $0 \leq c, d < q$, alors l'automorphisme correspondant mène $x^{1/q}$ sur $\eta^c x^{1/q}$ et $y^{1/q}$ sur $\eta^d y^{1/q}$.

Remarque 3.2.— Nous choisirons une des variables, soit y , pour les *dénominateurs*. Cela signifie qu'on va fixer le corps $K = k((y))((x))$ et on va opérer avec $k((y^{1/q}))((x^{1/q}))$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Les éléments de ce corps sont les séries de la forme

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}, i \geq r} f_i(y^{1/q})x^{i/q}, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad f_i(y^{1/q}) \in k((y^{1/q}));$$

f a donc dénominateurs dans x *bornés inférieurement* (c'est à dire, les exposants de x forment un sous-ensemble de $(1/q) \cdot \mathbb{Z}$ avec une borne inférieure, r/q). Les exposants de y forment aussi un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, pas nécessairement borné. Un tel élément sera appelé une *série de Puiseux générale*.

Remarque 3.3.— Soit $0 \neq f \in k((y^{1/q}))((x^{1/q}))$; on peut écrire f de la façon suivante :

$$f = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}, i \geq r, j/q \geq \nu_y(f_i(y^{1/q}))} f_{i,j} x^{i/q} y^{j/q}, f_{i,j} \in k,$$

où ν est l'ordre d'une série formelle. On appelle le *diagramme de Newton* de f l'ensemble

$$\mathcal{E}(f) = \{(i/q, j/q) \in (1/q) \cdot \mathbb{Z}^2 \mid f_{i,j} \neq 0\}.$$

Pour opérer avec les diagrammes de Newton on les représentera par des points du plan à coordonnées (u, v) . Tous les points de $\mathcal{E}(f)$ sont à droite de la ligne verticale $u = r/q$ et, pour chaque ligne $u = i/q$, $i \geq r$, les points de $\mathcal{E}(f)$ sur cette ligne (s'il y en a) descendent jusqu'une profondeur limitée. La forme de $\mathcal{E}(f)$ fait qu'il soit lexicographiquement bien ordonné.

Remarque 3.4.— Soit $x^{a_1/q} y^{b_1/q}$ un monôme qui apparaît dans f et soit $a_1 = a_2 q + a$, $b_1 = b_2 q + b$, où $0 \leq a, b < q$; alors $x^{a_1/q} y^{b_1/q} = (x^{a_2} y^{b_2})(x^{a/q} y^{b/q})$. La somme de tous les termes de f qui contiennent un monôme du type $(x^{a_2} y^{b_2})(x^{a/q} y^{b/q})$, pour (a, b) fixé, est un élément $\omega(x, y) x^{a/q} y^{b/q}$ où $\omega(x, y) \in k((y))((x))$ par la forme du diagramme de Newton de f . Cela prouve que

$$k((y^{1/q}))((x^{1/q})) \subset K(x^{1/q}, y^{1/q}).$$

Comme la réciproque est évidente, on a $k((y^{1/q}))((x^{1/q})) = K(x^{1/q}, y^{1/q})$, qui est une extension galoisienne de K dont le groupe de Galois est $G = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q)^2$, agissant de façon analogue à la décrite plus haut.

Définition 3.5.— Soit $0 \neq f \in K(x^{1/q}, y^{1/q})$ et soit

$$M = \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_t \\ 0 & q & b_1 & \cdots & b_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$$

la matrice dont les colonnes vérifient les propriétés suivantes :

1. Si $\mathcal{E}(f) \subset \mathbb{Z}^2$, alors $t = 0$ y il n'y a plus rien à dire. Autrement, (a_1, b_1) est le minimum-lex des $(a, b) \in \mathcal{E}(f)$ tels que

$$q^2 = \delta_2 \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} > \delta_2 \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 \\ 0 & q & b_1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit i un indice, $1 \leq i$. Si tout $(a/q, b/q) \in \mathcal{E}(f)$ est tel que (a, b) appartient au sous-groupe

$$\langle (q, 0), (0, q), (a_1, b_1), \dots, (a_i, b_i) \rangle,$$

alors $t = i$; autrement (a_{i+1}, b_{i+1}) est le minimum-lex des $(a, b) \in \mathcal{E}(f)$ tels que

$$\delta_2 \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_i \\ 0 & q & b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} > \delta_2 \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1} \\ 0 & q & b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} \end{pmatrix}.$$

On appelle M la matrice des exposants caractéristiques de f . Les paires $(a_i/q, b_i/q)$ s'appellent les exposants caractéristiques de f .

Observation 3.6.— On ne doit pas oublier que, par la proposition 2.1,

$$(a, b) \in \langle (q, 0), (0, q), (a_1, b_1), \dots, (a_i, b_i) \rangle = H$$

si et seulement si

$$\delta_2 \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_i \\ 0 & q & b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} = \delta_2 \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_i & a \\ 0 & q & b_1 & \cdots & b_i & b \end{pmatrix}.$$

En plus, cela équivaut à $x^{a/q}y^{b/q} \in K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_i/q}y^{b_i/q})$. En effet, si $(a, b) \in H$, alors

$$(a, b) = \alpha(q, 0) + \beta(0, q) + \sum_{j=1}^i \alpha_j(a_j, b_j).$$

On en conclut que

$$x^{a/q}y^{b/q} = x^\alpha y^\beta \prod_{j=1}^i (x^{a_j/q}y^{b_j/q})^{\alpha_j} \in K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_i/q}y^{b_i/q}).$$

Réciproquement, si $x^{a/q}y^{b/q} \in K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_i/q}y^{b_i/q})$, alors il est de la forme

$$x^{a/q}y^{b/q} = x^\alpha y^\beta \prod_{j=1}^i (x^{a_j/q}y^{b_j/q})^{\alpha_j}$$

donc

$$(a, b) = \alpha(q, 0) + \beta(0, q) + \sum_{j=1}^i \alpha_j(a_j, b_j) \in H.$$

Proposition 3.7.— On a

$$K(f) = K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_t/q}y^{b_t/q})$$

et le degré de l'extension $K \subset K(f)$ est égal à $q^2/\delta_2(M)$ (voir [2]).

Démonstration: L'observation 3.6 dit que tout monôme qui apparaît dans f appartient à

$$K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_t/q}y^{b_t/q}),$$

ce qui implique que

$$K(f) \subset K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_t/q}y^{b_t/q}).$$

En plus, un automorphisme du groupe de Galois de $K(x^{1/q}, y^{1/q})$ fixe f si et seulement si fixe tous ses monômes. Par la même observation, cela équivaut à fixer $\{x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_t/q}y^{b_t/q}\}$; donc on a

$$K(f) = K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_t/q}y^{b_t/q}).$$

Les automorphismes qui fixent les t monômes sont les $(x, y) \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q)^2$ tels que $(x, y)M = 0$. Il y en a $q_1q_2 = \delta_2(M)$ par 2.3, donc

$$[K(f) : K] = \frac{q^2}{\delta_2(M)}.$$

□

Proposition 3.8.— *Supposons que $t \geq 1$ et soit G le groupe de Galois de $K(f)$ sur K . Alors, pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq \text{id}$, il existe un seul i , $1 \leq i \leq t$, tel que le minimum pour l'ordre lexicographique de $\mathcal{E}(\sigma(f) - f)$ est $(a_i/q, b_i/q)$.*

Démonstration: On a une suite croissante d'extensions

$$K \subsetneq K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}) \subsetneq \dots \subsetneq K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_t/q}y^{b_t/q})$$

qui, par la correspondance galoisienne, donne lieu à une suite décroissante de groupes

$$G = G_0 \supsetneq G_1 \supsetneq \dots \supsetneq G_t = \{\text{id}\}.$$

Pour tout $\text{id} \neq \sigma \in G$, il existe i , $1 \leq i \leq t$, tel que $\sigma \in G_{i-1} \setminus G_i$. Cela veut dire que σ fixe $x^{a_0/q}y^{b_0/q}, \dots, x^{a_{i-1}/q}y^{b_{i-1}/q}$ mais il ne fixe pas $x^{a_i/q}y^{b_i/q}$. Alors, en prenant la différence $\sigma(f) - f$, tous les monômes $x^{a/q}y^{b/q}$, $(a/q, b/q) \in \mathcal{E}(f)$, tels que

$$(a, b) \in \langle (q, 0), (0, q), \dots, (a_{i-1}, b_{i-1}) \rangle$$

disparaissent (et les autres ne disparaissent pas), d'où la conclusion. □

Corolaire 3.9.— *Pour toute paire de conjuguées $g \neq h$ de f , le minimum-lex de $\mathcal{E}(g - h)$ est un certain $(a_i/q, b_i/q)$.*

Démonstration: Soit $g = \sigma(f)$, $h = \tau(f)$; alors $\mathcal{E}(\tau^{-1}\sigma(f) - f)$ a un minimum-lex $(a_i/q, b_i/q)$. Alors

$$\mathcal{E}(\tau^{-1}\sigma(f) - f) = \mathcal{E}(\tau(\tau^{-1}\sigma(f) - f)) = \mathcal{E}(\sigma(f) - \tau(f)),$$

d'où la conclusion. □

Proposition 3.10.— Soit $f = f_0 + f_1$ avec $0 \neq f_0$, $0 \neq f_1$, c'est-à-dire, on décompose f en somme de deux blocs de termes. Soit G le groupe de Galois de $K(f)$ sur K ; alors

$$\{\sigma(f_0) \mid \sigma \in G\}$$

est égal à l'ensemble de toutes les conjuguées de f_0 .

Démonstration: Soient H, H_0 , respectivement, les sous-groupes de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q^2$ formés par les automorphismes qui laissent fixes f, f_0 ; on a $H \subset H_0$. Soit $\varphi : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}q^2/H \rightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}q^2/H_0$ l'homomorphisme canonique, qui est surjectif. Alors, pour tout $\sigma_0 \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}q^2/H_0$ il existe $\sigma \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}q^2/H$ tel que $\varphi(\sigma) = \sigma_0$. Cela implique que $\sigma(f) = \sigma(f_0) + \sigma(f_1) = \sigma_0(f_0) + \sigma(f_1)$, donc le résultat. $\square$

4 Quelques techniques

Dans cette section on va réunir un ensemble de résultats techniques, dont on fera un usage continu dans la suite. On va introduire les secteurs privilégiés du plan, dans lesquels vont se placer les diagrammes de Newton des racines des équations $P(x, y, z) = 0$ qu'on a défini à l'introduction. Après on traitera les éclatements monomiaux et les inverses d'éclatements monomiaux, et on verra ses effets sur les secteurs privilégiés du plan et sur les séries de Puiseux générales. Finalement on parlera un peu de troncation de séries.

Définition 4.1.— Un secteur privilégié dans le plan est la projection, depuis l'origine O , d'un segment PQ , $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$, $P \neq Q$, où :

1. La droite support PQ ne passe pas par O .
2. $0 \leq a \leq c$ et $b > 0$ si $a = 0$.

Remarque 4.2.— On doit remarquer que, si $a = 0$, alors $c > 0$ car P et Q ne peuvent pas être alignés avec l'origine. Si $a > 0$, à fortiori, $c > 0$. En somme, Q n'est jamais sur l'axe vertical.

Remarque 4.3.— Soit Γ un secteur privilégié du plan, et soient g, h séries de Puiseux générales telles que $\mathcal{E}(g), \mathcal{E}(h) \subset \Gamma$. Alors :

1. $\mathcal{E}(g \pm h) \subset \Gamma$ et $\mathcal{E}(gh) \subset \Gamma$.
2. Si $(0, 0) \in \mathcal{E}(g)$, alors il existe $g^{-1} \in K(x^{1/q}, y^{1/q})$ telle que $\mathcal{E}(g^{-1}) \subset \Gamma$ et $gg^{-1} = 1$,

comme on voit facilement (voir [4], par exemple).

Définition 4.4.— On appelle éclatements monomiaux les deux changements de variables $\{x \rightarrow xy, y \rightarrow y\}$ et $\{x \rightarrow x, y \rightarrow xy\}$. Ils agissent sur les

monômes de la forme $x^a y^b \rightarrow x^a y^{a+b}$ et $x^a y^b \rightarrow x^{a+b} y^b$, donc sur le plan des diagrammes de Newton comme $(a, b) \rightarrow (a, a+b)$ et $(a, b) \rightarrow (a+b, b)$. On appelle inverses d'éclatements monomiaux les deux changements de variables $\{x \rightarrow x/y, y \rightarrow y\}$ et $\{x \rightarrow x, y \rightarrow y/x\}$. Il agissent sur les monômes de la forme $x^a y^b \rightarrow x^a y^{b-a}$ et $x^a y^b \rightarrow x^{a-b} y^b$, donc sur le plan des diagrammes de Newton comme $(a, b) \rightarrow (a, b-a)$ et $(a, b) \rightarrow (a-b, b)$. Dans le reste de l'article on n'utilisera que le premier type.

Proposition 4.5.— Soit Γ un secteur privilégié du plan, qui est la projection d'un segment $\overline{PQ}$, où $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$ sont deux points différents du plan satisfaisant les conditions de la définition 4.1. Alors :

1.

$$\Gamma = \{\lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_0\}.$$

2. Le transformé de Γ par le éclatement monomial $x \rightarrow xy$ (resp. le inverse d'éclatement monomial $x \rightarrow x/y$) est encore un secteur privilégié du plan.

3. Il existe une suite finie d'éclatements monomiaux $x \rightarrow xy$ (c'est à dire, un changement de variables de la forme $x \rightarrow xy^m$) tel que le transformé de Γ soit contenu dans $\mathbb{Z}_0^2$.

Démonstration: Soit R un point du plan; alors $R \in \Gamma$ si et seulement si la demi-droite $\overrightarrow{OR}$ coupe le segment $\overline{PQ}$ à un point R_0 . Puisque $\overrightarrow{OR_0} = \lambda_0 \overrightarrow{OP} + \mu_0 \overrightarrow{OQ}$, $\lambda_0, \mu_0 \geq 0$, $\lambda_0 + \mu_0 = 1$, et $\overrightarrow{OR}$ est formée par les points S tels que $\overrightarrow{OS}$ est un multiple positif de $\overrightarrow{OR_0}$ la première conclusion est claire.

Pour démontrer la deuxième propriété de l'énoncé on observe que les transformés $P' = (a, a+b)$, $Q' = (c, c+d)$ (resp. $P'' = (a, b-a)$, $Q'' = (c, d-c)$) sont différents, qu'ils ne sont pas alignés avec l'origine, que $0 \leq a \leq c$ et que $a+b > 0$ (resp. $b-a > 0$ si $a = 0$). Ceci dit, la conclusion est évidente, car les éclatements monomiaux et les inverses d'éclatements monomiaux induisent des transformations linéaires du plan vectoriel.

Quand à la troisième propriété on voit que la composition de m éclatements monomiaux $x \rightarrow xy$ équivaut au changement de variables $x \rightarrow xy^m$, donc le point (u, v) du plan va sur $(u, mu+v)$. Si $a > 0$, à fortiori, $c > 0$ et on peut prendre $m \in \mathbb{Z}_+$ tel que $ma+b > 0$ et $mc+d > 0$. Si $a = 0$ on doit avoir $c > 0$ car P, Q ne sont pas alignés avec l'origine. Dans ce cas, on prend $m \in \mathbb{Z}_+$ tel que $mc+d > 0$ et, bien sûr, $ma+b = b > 0$. Cela prouve la proposition. $\square$

Corolaire 4.6.—

$$\Gamma \cap \{(0, v) \mid v < 0\} = \emptyset, .$$

Démonstration: En effet,

$$\{\lambda(a, b) \mid \lambda \geq 0\} \cap \{(0, v) \mid v < 0\} = \emptyset,$$

$$\{\mu(c, d) \mid \lambda \geq 0\} \cap \{(0, v) \mid v < 0\} = \emptyset$$

et, pour tout $(0, 0) \neq (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$, $\lambda a + \mu c > 0$ □

Corolaire 4.7.— Γ est toujours contenu dans un secteur privilégié Γ' du plan, projection d'un segment $P' = (0, 1)$, $Q' = (c', d')$ où $c' > 0$.

Démonstration: Si $a = 0$, alors on peut prendre $\Gamma' = \Gamma$ car, si $(0, b)$, (c, d) , $b, c > 0$ ne sont pas alignés avec l'origine, alors $(0, 1)$, (c, d) ne le sont non plus. Supposons, donc, que $a > 0$ (et, bien sûr, $c > 0$). Par définition de secteur privilégié du plan, les deux demi-droites $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ ont des pentes $b/a, d/c$ différentes ; par exemple $d/c < b/a$. On prend $P' = (0, 1)$, $Q' = Q = (c, d)$ et on va prouver que $\Gamma \subset \Gamma'$.

On fixe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_0$ et on résoud le système linéaire (en λ_1, μ_1)

$$\begin{aligned} c\mu_1 &= \lambda a + \mu c \\ \lambda_1 + d\mu_1 &= \lambda b + \mu d. \end{aligned}$$

On a

$$\lambda_1 = \frac{\lambda(bc - ad)}{c}, \quad \mu_1 = \frac{\lambda a + \mu c}{c}.$$

Clairement $\mu_1 \geq 0$ et, puisque $a > 0$,

$$\frac{1}{a} \frac{(bc - ad)}{c} = \left(\frac{b}{a} - \frac{c}{d} \right) > 0$$

donc $\lambda_1 \geq 0$. Ceci prouve le corollaire. □

Remarque 4.8.— DE LA PLUS GRANDE IMPORTANCE : À partir de maintenant on va réserver l'expression *série de Puiseux générale* pour les éléments $0 \neq f \in k((y^{1/q}))((x^{1/q}))$ tels que $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f) \subset \Gamma$, où Γ est un secteur privilégié du plan. Ceci a comme conséquence que $f \in k((y^{1/q}))[[x^{1/q}]]$ et, si $\nu_x(f) = 0$, alors, $\nu_y(f(0, y^q)) > 0$.

Notations 4.9.— On va fixer $q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$, un secteur privilégié Γ du plan et une série de Puiseux générale $0 \neq f \in k((y^{1/q}))[[x^{1/q}]]$, $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f)$, telle que $\mathcal{E}(f) \subset \Gamma$, qu'on écrira sous la forme

$$f = \sum_{i \geq 0} \alpha_i (y^{1/q}) x^{i/q}$$

Soient $\{f_1 = f, \dots, f_n\}$ les conjuguées de f et

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \prod_{i=1}^n (z - f_i) \\ &= z^n + h_1(x, y) z^{n-1} + \dots + h_{n-1}(x, y) z + h_n(x, y) \end{aligned}$$

son polynôme minimal. Soit G le groupe de Galois de $K(f)$ sur K et

$$M = \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_t \\ 0 & q & b_1 & \cdots & b_t \end{pmatrix}, t \geq 1$$

la matrice des exposants caractéristiques de f ; on a $n = q^2/\delta_2(M)$.

Proposition 4.10.— *Soit f comme dans les notations 4.9. Alors :*

1. *Le diagramme de Newton en (x, z) de P n'a qu'un segment admissible dont l'extrémité gauche (ou plus élevée) est $(0, n)$.*
2. *Le diagramme de Newton en (y, α) de l'équation caractéristique pour calculer $\alpha_0(y^{1/q})$ n'a qu'un segment admissible. dont l'extrémité gauche est $(0, n)$.*

Démonstration: Les racines de $P(x, y, z)$ forment un ensemble de conjuguées, donc toutes ont le même diagramme de Newton. Certainement, le diagramme de Newton en (x, z) de P a un segment admissible s_1 qui commence à $(0, n)$. S'il finit à $(0, 0)$, la première propriété est déjà démontré. Si s_1 finit en $(0, e)$, $e > 0$, alors on doit avoir un segment admissible s_2 de pente $m_2 < 0$. Celui-ci donne lieu à une puissance x^{-1/m_2} de la racine, qui est positive. En poursuivant le calcul de la racine dont l'étape initiale es s_2 on n'aurait jamais le terme en x^0 qui correnspond à s_1 , car les exposant successifs de x augmentent uniformément. Supposons, en fin, que s_1 finit à un point qui n'est pas sur l'axe vertical, donc il a une pente negative. S'il avait un deuxième s_2 (c'est à dire si s_1 ne finissait pas sur l'axe horizontal) les pentes respectives m_1, m_2 , seraient telles que $m_2 < m_1 < 0$. Alors, les puissances initiales de x seraient x^{-1/m_1} et x^{-1/m_2} et, bien sûr, $-1/m_2 > -1/m_1$. Donc, en poursuivant le calcul de la racine dont l'étape initiale est s_2 on n'aurait jamais le terme en x^{-1/m_1} car les exposant successifs de x augmentent uniformément. Ceci démontre la première propriété. Le raisonnement pour la deuxième est tout à fait semblable. □

On va faire maintenant quelques observations élémentaires sur le comportement des séries de Puiseux par éclatements monomiaux.

Remarque 4.11.— Si on applique à f l'éclatement monomial $x \rightarrow xy$, la transformée de f est égale à

$$f' = \sum_{i \geq 0, j/q \geq \nu_y(\alpha_i)} \alpha_{ij} x^{i/q} y^{(i+j)/q}, \alpha_{ij} \in k.$$

La matrice des exposants caractéristiques de f' est

$$M' = \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_t \\ 0 & q & a_1 + b_1 & \cdots & a_t + b_t \end{pmatrix}$$

puisque, pour tout $i = 1, \dots, t$, les matrices

$$\begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_i \\ 0 & q & b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q & 0 & a_1 & \cdots & a_i \\ 0 & q & a_1 + b_1 & \cdots & a_i + b_i \end{pmatrix}$$

ont la même forme canonique, car on passe de l'une à l'autre par des transformations élémentaires sur $\mathbb{Z}$. Cela implique que le polynôme minimal de f' a le même degré que celui de f .

Soit $P'(x, y, z) = P(xy, y, z)$; il est clair qu'il s'annule pour toutes les transformées $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ des f_i , donc $P'(x, y, z)$ est le polynôme minimal de f' et celles-là forment un ensemble complet de séries de Puiseux générales conjuguées.

Si on applique à f l'inverse d'éclatement monomial $x \rightarrow x/y$, la transformée f'' de f est égale à

$$f'' = \sum_{i \geq 0, j \geq \nu_y} \alpha_{ij} x^{i/q} y^{(j-i)/q}, \alpha_{ij} \in k.$$

Si on raisonne comme tout-à-l'heure on voit que le transformé $P''(x, y, z) = P(x/y, y, z)$ de P est le polynôme minimal de f'' et les transformées des f_i forment un ensemble complet de séries de Puiseux générales conjuguées.

Corolaire 4.12.— *Il existe une suite finie d'éclatements monomiaux tels que la transformée de f appartient à $k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$. Comme conséquence, le polynôme minimal de la transformée appartient à $k[[x, y]][z]$.*

Le preuve est évidente à partir de la proposition 4.5.

Finalement on va dire quelque mots sur la troncation des séries de Puiseux générales.

Définition 4.13.— *Soit $q \geq 1$ un entier fixé et Γ un secteur privilégié du plan. Pour chaque série de Puiseux générale*

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (y^{1/q}) x^{i/q}$$

telle que $\mathcal{E}(a) \subset \Gamma$ et chaque entier positif p , on appelle troncation de a jusque le degré p le polynôme de Puiseux

$$T_p(a) = \sum_{i=0, i/q \leq p} a_i(y^{1/q})x^{i/q}.$$

Proposition 4.14.— *Les propriétés basiques de la troncation sont les suivantes : si*

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(y^{1/q})x^{i/q}, \quad b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(y^{1/q})x^{i/q}$$

sont des séries de Puiseux générales telles que $\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(b) \subset \Gamma$ et $p \in \mathbb{Z}_+$, alors

1. $T_p(a + b) = T_p(a) + T_p(b)$
2. $T_p(ab) = T_p(a)T_p(b)$

Démonstration: La première propriété est évidente et la deuxième, presque. Néanmoins, on va faire quelques observations sur celle-ci. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}_0$, $m \leq p$, le coefficient de $x^{m/q}$ dans ab est égal à

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}_0, i+j=m} a_i(y^{1/q})b_j(y^{1/q}).$$

Puisque les indices dans cette somme ne dépassent pas p , ce coefficient est égal au coefficient de $x^{m/q}$ dans $T_p(a)T_p(b)$. Ceci démontre la deuxième propriété. $\square$

Corolaire 4.15.— *Si $P(x_1, \dots, x_r) \in k((y^{1/q}))[x_1, \dots, x_r]$ et $(a^{(1)}, \dots, a^{(r)}) \in k((y^{1/q}))[[x]]^r$ sont des séries de Puiseux générales avec diagrammes de Newton contenus dans Γ , alors*

$$T_p(P(a^{(1)}, \dots, a^{(r)})) = P(T_p(a^{(1)}), \dots, T_p(a^{(r)})).$$

Corolaire 4.16.— *Si on revient à la série de Puiseux générale f des notations 4.9, ses conjuguées et son polynôme minimal, et si $p > 0$ est un entier suffisamment grand pour que, pour tout exposant caractéristique (a_i, b_i) , on ait $a_i/q < p$, alors on a*

1.

$$P_p(x, y, z) = z^n + T_p(h_1(x, y))z^{n-1} + \dots + T_p(h_{n-1}(x, y))z + T_p(h_n(x, y))$$

est le polynôme minimal de $T_p(f)$.

2. Le discriminant de $P_p(x, y, z)$ est égal à $T_p(D)$, où D est le discriminant du polynôme minimal $P(x, y, z)$ de f .

Démonstration: Puisque $a_i/q < p$, pour tout $i = 1, \dots, t$, alors les conjuguées de $T_p(f)$ sont $\{T_p(f_1), \dots, T_p(f_n)\}$. Comme, par les formules de Cardan, les coefficients d'un polynôme sont des polynômes en les racines, l'application du corollaire 4.15 nous donne directement la première propriété. La deuxième propriété est une conséquence immédiate du même corollaire et du fait que le discriminant est un polynôme en les coefficients de l'équation. $\square$

5 Séries de Puiseux quasi-ordinaires

Dans cette section nous rappellerons le concept de série de Puiseux quasi-ordinaire et en donnerons les propriétés dont on aura besoin. Nous continuons avec les notations 4.9.

Définition 5.1.— On dit que f est quasi-ordinaire si $f \notin k[[x, y]]$ et :

1. $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f)$ (et bien sûr, $\mathcal{E}(f)$ est contenu dans le secteur privilégié γ du plan).
2. Pour tout $\sigma \in G \setminus \{\text{id}\}$ on a $\sigma(f) - f = x^{a_\sigma/q} y^{b_\sigma/q} U_\sigma(x^{1/q}, y^{1/q})$ où $U_\sigma(x^{1/q}, y^{1/q}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ est une unité. Nécessairement $a_\sigma \geq 0$ et, si $a_\sigma = 0$, alors $b_\sigma > 0$.

Remarque 5.2.— Soit f quasi-ordinaire et $\sigma \in G \setminus \{\text{id}\}$. On a d'un côté $\sigma(f) - f = x^{a_\sigma/q} y^{b_\sigma/q} U_\sigma(x^{1/q}, y^{1/q})$, où U_σ est une unité, et de l'autre la proposition 3.8 nous dit qu'il existe un i tel $(a_i/q, b_i/q)$ est le minimum-lex de $\mathcal{E}(\sigma(f) - f)$. On en conclut que $(a_\sigma/q, b_\sigma/q) = (a_i/q, b_i/q)$. Il ne faut pas oublier que $\mathcal{E}(\sigma(f) - f) \cap \mathbb{Z}^2 = \emptyset$ car tous les monômes d'exposants entiers sont invariants par tout automorphisme de G .

En plus, pour toute paire de conjuguées différentes g, h de f on a $g - h = x^{a_i/q} y^{b_i/q} U'(x^{1/q}, y^{1/q})$ où $U'(x^{1/q}, y^{1/q}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ est une unité, par le corollaire 3.9.

Proposition 5.3.— Supposons que $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est quasi-ordinaire.
2. Pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq \{\text{id}\}$ il existe i , $1 \leq i \leq t$ tel que $\sigma(f) - f = x^{a_i/q} y^{b_i/q} U_\sigma(x^{1/q}, y^{1/q})$ où $U_\sigma(x^{1/q}, y^{1/q}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ est une unité.
3. Pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq \{\text{id}\}$ $\mathcal{E}(\sigma(f) - f) = (a_i/q, b_i/q) + (1/q)\mathbb{Z}_0^2$.

Il y a rien à démontrer : tout est une conséquence triviale de la définition de série quasi-ordinaire et de la remarque 5.2.

Remarque 5.4.— Supposons que $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f)$. Par la proposition 3.8 on a une suite croissante d'extensions

$$K \subsetneq K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}) \subsetneq \dots \subsetneq K(x^{a_1/q}y^{b_1/q}, \dots, x^{a_t/q}y^{b_t/q})$$

qui, par la correspondance galoisienne, donne lieu à une suite décroissante de groupes

$$G = G_0 \supsetneq G_1 \supsetneq \dots \supsetneq G_t = \{\text{id}\}.$$

Pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq \text{id}$, il existe un seul $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq t$, tel que $\sigma \in G_{i-1} \setminus G_i$; alors $(a_i/q, b_i/q)$ est le minimum-lex de $\mathcal{E}(\sigma(f) - f)$.

En utilisant cela, on peut partager $\mathcal{E}(f)$ en blocs $B_0, B_1, \dots, B_t$ de la façon suivante : si

$$L_i = \langle (q, 0), (0, q), \dots, (a_i, b_i) \rangle, \quad 1 \leq i \leq t$$

alors :

1. $B_0 = \mathcal{E}(f) \cap \mathbb{Z}_0^2$.
2. B_1 est défini par

$$B_1 = \{(a/q, b/q) \in \mathcal{E}(f) \mid (a, b) \in L_1\}.$$

3. Supposons qu'on a défini $B_1, \dots, B_i$ et que $i < t$. Alors,

$$B_{i+1} = \{(a/q, b/q) \in \mathcal{E}(f) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_i) \mid (a, b) \in L_{i+1}\}.$$

On doit remarquer que $(a_i/q, b_i/q) \in B_i$, pour tout $i = 1, \dots, t$.

Proposition 5.5.— Soit f comme dans la remarque 5.4; les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est quasi-ordinaire.
2. Les exposants caractéristiques forment une suite croissante

$$\left(\frac{a_1}{q}, \frac{b_1}{q}\right) < \dots < \left(\frac{a_t}{q}, \frac{b_t}{q}\right)$$

pour l'ordre produit, $((u, v) \leq (u', v') \iff u \leq u' \text{ et } v \leq v')$ et, pour tout $i = 1, \dots, t$, on a $B_i \subset (a_i/q, b_i/q) + \mathbb{Z}_0^2$.

Démonstration: Soient $1 \leq i < j \leq t$ deux entiers (si cela est possible) et soit G'_j le sous-groupe de G_{i-1} qui fixe $x^{a_j/q}y^{b_j/q}$. Puisque $G_i \cup G'_j \subsetneq G_{i-1}$, il existe $\sigma \in G_{i-1} \setminus (G_i \cup G'_j)$. Alors, $\sigma(f) - f = x^{a_i/q}y^{b_i/q}U_i(x^{1/q}, y^{1/q})$, $U_i(x^{1/q}, y^{1/q}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, $U_i(0, 0) \neq 0$ et $(a_j/q, b_j/q) \in \mathcal{E}(\sigma(f) - f)$. On en conclut que la suite d'exposants caractéristiques est totalement ordonnée pour l'ordre produit.

Soit $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq t$ et soit $\sigma \in G_{i-1} \setminus G_i$; alors σ fixe tous les monômes $x^{a/q}y^{b/q}$ tels que $(a/q, b/q) \in B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}$ (s'il y en a) et ne fixe pas aucun monôme $x^{a/q}y^{b/q}$ tel que $(a/q, b/q) \in B_i \cup \dots \cup B_t$. Puisque f est quasi-ordinaire, $\sigma(f) - f = x^{a_j/q}y^{b_j/q}U(x, y)$, $U(x, y) \in k[[x, y]]$, $U(0, 0) \neq 0$, $j \geq i$ et, comme $(a_i/q, b_i/q)$ est le minimum-lex de $\mathcal{E}(\sigma(f) - f)$, il doit être $j = i$. En plus,

$$B_i \subset \mathcal{E}(\sigma(f) - f) \subset (a_i/q, b_i/q) + \mathbb{Z}_0^2.$$

Cela prouve que la première condition implique la deuxième.

Réciproquement, supposons que la deuxième condition soit satisfaite. Soit $\sigma \in G \setminus \{\text{id}\}$; il existe un (seul) $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq t$ tel que $\sigma \in G_{i-1} \setminus G_i$. Alors σ fixe tous les monômes $x^{a/q}y^{b/q}$ tels que $(a/q, b/q) \in B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}$ (s'il y en a) et ne fixe pas aucun monôme de $B_i \cup \dots \cup B_t$. Cela signifie que

$$\mathcal{E}(\sigma(f) - f) = B_i \cup \dots \cup B_t \subset (a_i/q, b_i/q) + \mathbb{Z}_0^2$$

par l'ordre total des exposants caractéristiques, donc

$$\sigma(f) - f = x^{a_i/q}y^{b_i/q}U_i(x, y), \quad U_i(x, y) \in k[[x, y]], \quad U_i(0, 0) \neq 0.$$

Ceci prouve la proposition. □

6 Séries quasi-ordinaires et diviseurs à croisements normaux

On introduit dans cette section, les résultats finaux dont on aura besoin pour démontrer les théorèmes qui forment le noyau de ce travail.

Définition 6.1.— *Un diviseur à croisements normaux est une série de Puiseux de la forme $g = x^{a/q}y^{b/q}U(x^{1/q}, y^{1/q})$ où $(a, b) \neq (0, 0)$, et $U(x^{1/q}, y^{1/q}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, $U(0, 0) \neq 0$. Cela équivaut aux deux conditions suivantes :*

1. $(0, 0) \neq (a/q, b/q) \in \mathcal{E}(g)$.
2. $\mathcal{E}(g) \subset (a/q, b/q) + (1/q) \cdot \mathbb{Z}_0^2$.

On dit qu'une série $0 \neq g' \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ admet un inverse d'éclatement monomial s'il existe $g \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ telle que g' soit la transformée de g par l'éclatement monomial $x \rightarrow xy$. Ceci équivaut au fait que, pour tout $(a, b) \in \mathcal{E}(g')$ on ait $a \leq b$, donc au fait que $\mathcal{E}(g')$ soit contenu dans le demi-plan supérieur de bord $u = v$.

Corolaire 6.2.— Supposons que $f \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ est quasi-ordinaire ; alors f est un diviseur à croisements normaux.

Démonstration: Le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 5.5. $\square$

Proposition 6.3.— Supposons que $f \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ est quasi-ordinaire, soit $P(x, y, z)$, comme d'habitude, son polynôme minimal et D le discriminant de P par rapport à z . Alors, D est un diviseur à croisements normaux.

Démonstration: La preuve est immédiate à partir de la remarque 5.2 car f est quasi-ordinaire et le fait que, sauf signe, D est égal au produit de toutes les différences non nulles possibles des conjuguées de f . $\square$

Proposition 6.4.— Supposons que $f \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ et le discriminant D est un diviseur à croisements normaux. Alors, f est quasi-ordinaire.

Démonstration: Supposons que f ne soit pas quasi-ordinaire ; il existe une conjuguée g de f telle que $g - f$ n'est pas un diviseur à croisements normaux. En mettant en facteur tout ce qu'il est possible, on a

$$g - f = x^{c/q} y^{d/q} h(x^{1/q}, y^{1/q}),$$

où h n'est pas une unité qui n'est pas divisible ni par $x^{1/q}$ ni par $y^{1/q}$. Ceci implique que $g - f$ ne peut pas diviser un diviseur à croisements normaux. $\square$

Proposition 6.5.— Supposons que f n'appartient pas nécessairement à $k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, que Γ est la projection du segment $\overline{PQ}$, où $P = (0, 1)$ et $Q = (c', d')$, avec $c' > 0$ (ce qui est toujours possible par le corollaire 4.7), que $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f)$ et f n'est pas un diviseur à croisements normaux. Il existent deux entiers $p' \geq 0$, $p > 0$ tels que $\mathcal{E}(y^{p'} f) \subset \Gamma$, $T_p(y^{p'} f) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, les conjuguées différentes de $T_p(y^{p'} f)$ sont $\{T_p(y^{p'} f_1), \dots, T_p(y^{p'} f_n)\}$ et $T_p(y^{p'} f)$ n'est pas un diviseur à croisements normaux.

Démonstration: On remarque que, pour tout $p' \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{E}(y^{p'} f) \subset \Gamma$, grâce à la forme de celui-ci. Les faits que $\mathcal{E}(f)$ soit contenu dans un secteur privilégié du plan et $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f)$ impliquent qu'il a un minimum-lex $(a/q, b/q) \neq (0, 0)$. Puisque f n'est pas un diviseur à croisements normaux,

$\mathcal{E}(f) \not\subseteq (a/q, b/q) + (1/q) \cdot \mathbb{Z}_0^2$. Cela veut dire qu'il existe un $(c/q, d/q) \in \mathcal{E}(f)$ tel que $c > a$ et $d < b$. On choisit p de telle façon qu'il soit $\geq$ que le maximum des parties entières de c/q et tous les a_i/q , où (a_i, b_i) , $1 \leq i \leq t$ sont, comme d'habitude, les exposants caractéristiques. On prend un entier p' tel que $y^{p'} T_p(f) = T_p(y^{p'} f) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$. Par construction, le polynôme minimal de $T_p(y^{p'} f)$ a degré n , donc $\{T_p(y^{p'} f_1), \dots, T_p(y^{p'} f_n)\}$ sont les conjuguées différentes de $T_p(y^{p'} f)$. Finalement, il est clair que f n'est pas un diviseur à croisements normaux car $c > a$ et $p' + d < p' + b$.

On doit remarquer qu'on peut agrandir p, p' tant qu'on veut avec les mêmes propriétés. $\square$

Définition 6.6.— Soit f comme dans les notations 4.9 telle que $(0, 0) \notin \mathcal{E}(f)$. On dit que son polynôme minimal $P(x, y, z)$ est absolument irréductible si $P(x, y, z) \in k[[x, y]][z]$ (donc il est, à fortiori, un polynôme de Weierstraß).

Il peut très bien arriver que $f \notin k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ et $P(x, y, z) \in k[[x, y]][z]$. Par exemple, si $f = \sqrt{y} \sqrt{1 - \frac{x}{y}}$, alors, $P(x, y, z) = z^2 - y + x$. Nous finissons cette section avec un résultat qui n'est pas du tout trivial, à savoir

Théorème 6.7.— Supposons que $P(x, y, z)$ soit absolument irréductible et son discriminant D soit un diviseur à croisements normaux. Alors $f \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, donc elle est quasi-ordinaire par la proposition 6.4.

Démonstration: On va supposer que $f \notin k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ et on va chercher une contradiction. Par le corollaire 4.7 on peut supposer que Γ est la projection du segment $\overline{PQ}$, où $P = (0, 1)$ et $Q = (c', d')$, avec $c' > 0$.

On va d'abord démontrer que f n'est pas un diviseur à croisements normaux. Comme d'habitude, on écrit f sous la forme

$$f = \sum_{i \geq 0} \alpha_i(y^{1/q}) x^{i/q}, \alpha_i(y^{1/q}) \in k((y^{1/q})), \alpha_0(y^{1/q}) \neq 0.$$

On a une des deux possibilités suivantes :

1. ou bien $i_0 = 0$; dans ce cas, $\nu_y(\alpha_0(y^{1/q})) > 0$ par la remarque 4.8.
2. ou bien $i_0 > 0$; dans ce cas la proposition 4.10 nous dit qu'il n'y a qu'un segment admissible dans $\mathcal{E}(P)$ par rapport à (x, z) , dont l'extrémité gauche est $(0, n)$ et l'extrémité droite est sur l'axe horizontal. En plus, l'équation caractéristique (pour calculer $\alpha_0(y^{1/q})$) n'a qu'un segment admissible qui commence à $(0, n)$. Cela signifie que $\nu_y(\alpha_0(y^{1/q})) \geq 0$

En tout cas, le minimum-lex de $\mathcal{E}(f)$ est $(i_0, q\nu_y(\alpha_0(y^{1/q})))$, avec la deuxième composante non-négative. Puisque $f \notin k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, elle ne peut pas être un diviseur à croisements normaux.

Par la proposition 6.5, il existent deux entiers $p' \geq 0$, $p > 0$ tels que $\mathcal{E}(y^{p'}f) \subset \Gamma$, $T_p(y^{p'}f) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, les conjuguées différentes de $T_p(y^{p'}f)$ sont $\{T_p(y^{p'}f_1), \dots, T_p(y^{p'}f_n)\}$ et $T_p(y^{p'}f)$ n'est pas un diviseur à croisements normaux. Si, comme d'habitude,

$$P(x, y, z) = z^n + h_1(x, y)z^{n-1} + \dots + h_{n-1}(x, y)z + h_n(x, y)$$

est le polynôme minimal de f , celui de $y^{p'}f$ est

$$P_{p'}(x, y, z) = z_1^n + h_1(x, y)y^{p'}z_1^{n-1} + \dots + h_{n-1}(x, y)y^{p'(n-1)}z_1 + h_n(x, y)y^{p'n}.$$

En plus, si $D = x^a y^b U(x, y)$ est le discriminant de P , le discriminant $D_{p'}$ de $P_{p'}$ est égal à

$$D_{p'} = x^a y^{p+(p')^2 n(n-1)} U(x, y),$$

qui est encore un diviseur à croisements normaux.

Le discriminant du polynôme minimal de $T_p(y^{p'}f)$ n'est pas un diviseur à croisements normaux par la proposition 6.4. Mais sa troncation jusque le degré p coïncide avec la troncation jusque le degré p de $D_{p'}$, donc $D_{p'}$ ne peut pas être un diviseur à croisements normaux, ce qui représente une contradiction. Cela prouve le théorème. $\square$

7 Les théorème de Jung-Abhyankar et les solutions d'une équation

Par le théorème de Jung-Abhyankar nous entendons l'énoncé suivant (voir [1]) :

Théorème 7.1.— *Soit*

$$P(x, y, z) = z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)z + a_n(x, y) \in k[[x, y]][z]$$

un polynôme de Weierstraß irréductible tel que son discriminant D par rapport à z est un diviseur à croisements normaux. Alors, toutes les racines de l'équation $P(x, y, z) = 0$ forment justement l'ensemble des conjuguées d'une certaine série de Puiseux $\varrho(x^{1/q}, y^{1/q}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, d'ordre nécessairement positif.

Dans cette section on va utiliser le théorème de Jung-Abhyankar pour démontrer le suivant :

Théorème 7.2.— *Soit*

$$P(x, y, z) = z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)z + a_n(x, y) \in k[[x, y]][z]$$

un polynôme de Weierstraß sans facteurs multiples. Alors, toutes les racines de l'équation $P(x, y, z) = 0$ sont des séries de Puiseux générales telles que ses diagrammes de Newton sont contenus dans un secteur privilégié fixé Γ du plan.

Lemme 7.3.— Soit $(a, b) + \mathbb{Z}_0^2$, $(a, b) \in \mathbb{Z}$ un cadran entier du plan. Alors, pour chacun des éclatements monomiaux $x \rightarrow xy$, $y \rightarrow xy$, le transformé du cadran est contenu dans le cadran à sommet le transformé du sommet.

Démonstration: Il est presque évident. On va le démontrer pour le premier éclatement monomial. Soit $(a', b') \in \mathbb{Z}_0^2$; alors le changement de variables $x \rightarrow xy$ agit sur $(a, b) + (a', b')$ de la façon suivante :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \rightarrow (a + a', a + a' + b + b') = (a, a + b) + (a', a' + b'),$$

ce qui prouve que le transformé du cadran est contenu dans le cadran $(a, a + b) + \mathbb{Q}_0^2$.

On doit remarquer que la réciproque n'est pas vraie. En fait, nul point de $(a, b) + \mathbb{Z}_0^2$ va sur $(a + 1, a + b)$. $\square$

Lemme 7.4.— Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}_0^2$; alors il existe une suite finie d'éclatements monomiaux $x \rightarrow xy$ et un point P' du transformé Λ' de Λ tels que $\Lambda' \subset P' + \mathbb{Z}_0^2$.

Démonstration: On suppose $\Lambda \neq \emptyset$, et on doit toujours avoir présent le fait démontré dans le lemme 7.3 : que, si un point entre dans un cadran, il n'y sort jamais par des éclatements monomiaux.

Soit $P = (a, b) \in \Lambda$ le minimum-lex de Λ ; si $\Lambda \subset P + \mathbb{Z}_0^0$, il y a rien à dire. On suppose, donc, que $\Lambda \setminus (P + \mathbb{Z}_0^2) \neq \emptyset$. Ceci signifie qu'il existe un point $Q = (c, d) \in \Lambda$ tel que $c > a$ and $d < b$, donc b doit être positif.

La suite de b éclatements monomiaux $x \rightarrow xy$ transforme (u, v) dans $(u, bu + v)$. Alors, le transformé de P est $P' = (a, ba + b)$. En plus :

1. Le transformé de tout point de $P + \mathbb{Z}_0^2$ appartient à $P' + \mathbb{Z}_0^2$ par le lemme 7.3.
2. Le transformé de tout $Q = (c, d) \in \Lambda \setminus (P + \mathbb{Z}_0^2)$ est $Q' = (c, bc + d)$. Comme $c > a$, alors $b(c - a) \geq b \geq b - d$, donc $bc + d \geq ba + b$ et cela implique que $Q' \in (P' + \mathbb{Z}_0^2)$.

$\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.2 : Soit D le discriminant de $P(x, y, z)$ par rapport à z et soit $\Lambda = \mathcal{E}(D) \subset \mathbb{Z}_0^2 \setminus \{(0, 0)\}$; on a $D \neq 0$, donc $\Lambda \neq \emptyset$ car $P(x, y, z)$ n'a pas de facteurs multiples. Par le lemme 7.4 il existe une suite de m inverses d'éclatements monomiaux $x \rightarrow xy$ et un point (a, b)

du transformé Λ' de Λ tels que $\Lambda' \subset (a, b) + \mathbb{Z}_0^2$. Un raisonnement tout à fait pareil à celui de la remarque ?? nous dit que le discriminant D' du transformé $P'(x, y, z) = P(xy^m, y, z)$ par la suite, est égal au transformé de D . Cela implique que $\mathcal{E}(D') = \Lambda'$ est un diviseur à croisements normaux.

Si on décompose P' en produit de ses facteurs,

$$P'(x, y, z) = P'_1(x, y, z) \cdots P'_r(x, y, z)$$

il est évident que, pour tout $i = 1, \dots, r$, le discriminant D'_i de P'_i divise D' , donc D'_i est un diviseur à croisements normaux. Par le théorème de Jung-Abhyankar (théorème 7.1), les racines de chaque P'_i sont des séries de Puiseux entières, donc ses diagrammes de Newton sont contenus dans le premier cadran du plan, qui est un secteur privilégié. Si on marche en arrière par la suite, on voit que P , D et les racines de P sont les transformés de P' , D' et les racines de P' par la suite d'inverses d'éclatements monomiaux correspondante donc, par la remarque 4.5, les racines sont contenues dans un secteur privilégié du plan, ce qui termine notre démonstration.

8 La démonstration directe

Le but de cette section est démontrer le théorème 7.2 directement, c'est à dire, par des raisonnements avec les diagrammes de Newton, sans avoir ressource au théorème de Jung-Abhyankar. On utilisera la preuve classique du théorème de Newton-Puiseux pour une variable, qui résoud de manière constructive les équations du type

$$\begin{aligned} 0 &= Q(x, y) \\ &= b_0(x)y^m + b_1(x)y^{m-1} + \cdots + b_{m-1}(x)y + b_m(x), \end{aligned}$$

où $Q(x, y) \in k[[x]][y]$. La référence classique est le livre de Walker ([5]), mais on peut trouver de développements plus détaillés¹.

Le point de départ est toujours l'équation $P(x, y, z) = 0$ où

$$P(x, y, z) = z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x, y) + a_n(x, y) \in k[[x, y]][z]$$

est un polynôme de Weierstraß sans facteurs multiples. Nous allons construire un procédé (possiblement infini) qui va résoudre $P(x, y, z) = 0$ comme équation en z , à coefficients dans $k((y))[[x]]$, où $k((y))$ est le corps des constantes. Cela signifie qu'on va prendre $k((y))$ comme corps de base, et certaines de

¹Voir, par exemple, les notes du cours sur les *Courbes algébriques et analytiques* dans www.us.es/da

ses extensions algébriques finies succesives dont on aura besoin. Le procédé va nous permettre de calculer tous les termes que nous voulons de chaque racine de P . On doit remarquer que P n'a pas de facteurs multiples dans $k((y))[[x]][z]$ car son discriminant D , par rapport à z , n'est pas zéro, et il ne dépend pas de si on le prend sur $k[[x, y]]$ ou sur $k((y))[[x]]$.

Le procédé consiste simplement à résoudre $P(x, y, z) = 0$ comme équation en z avec $k((y))$ comme corps de constantes. On prendra les diagrammes de Newton avec abscisses x et ordonnées z . Pour commencer on a toujours le point $(0, n)$ et, P étant un polynôme de Weierstraß, tous les segments admissibles ont une pente négative, sauf peut-être un seul qui est vertical. On va donc obtenir toutes les racines les racines $\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ sous la forme :

$$\varrho_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varrho_{ij} (y^{1/q}) x^{j/q},$$

où $q > 0$ est un entier fixé.

S'il y a un $a_l(x, y)$ qui n'est pas divisible par x , alors il y aura au moins une racine ϱ_i telle que $\nu_x(\varrho_i) = 0$. Dans ce cas, les racines de l'équation $P(0, y, \alpha) = 0$ en α sont justement les ϱ_{i0} des ϱ_i dont l'ordre en x est zéro. Si on dessine le diagramme de Newton de $P(0, y, \alpha)$, avec abscisses y et ordonnées α , on voit immédiatement que tout segment admissible a une pente positive, car $(0, n) \in \mathcal{E}(P(0, y, \alpha))$ et, P étant un polynôme de Weierstraß, toutes les abscisses des points de ce diagramme de Newton sont positives. Ceci signifie que, quand $\nu_x(\varrho_i) = 0$, alors $\nu_y(\varrho_{i0}(y^{1/q})) > 0$.

Si $\nu_y(\varrho_{ij}(y^{1/q})) \geq 0$, pour tout i, j , alors le diagramme de Newton de chaque racine est contenu dans le premier cadran, et le théorème 7.2 est déjà démontré. Donc on va supposer, dans tout ce qui suit, qu'il y a un ϱ_{ij} d'ordre négatif, ce qui s'exprime en disant que ϱ_i a des dénominateurs. En plus, on va fixer une racine $\varrho \in \{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ avec dénominateurs et on va décrire le procédé pour calculer ϱ .

Remarque 8.1.— Il faut remarquer que, chaque fois qu'on avance un pas dans la résolution classique de $P(x, y, z) = 0$ pour obtenir ϱ on a :

1. On obtient une puissance $x^{\gamma_1 + \dots + \gamma_i}$, où $\gamma_1 \in \mathbb{Q}_0$ et $\gamma_j \in \mathbb{Q}_+$ pour tout $2 \leq j \leq i$ (s'il y en a).
2. Les coefficients des puissances successives $x^{\gamma_1}, x^{\gamma_1 + \gamma_2}$, etc, sont des séries de Puiseux en y . Ceci implique que le corps de base augmente par des extensions algébriques finies succesives de $k((y))$. Rappelons que, si $\gamma_1 = 0$, alors le coefficient initial a un ordre positif en y .
3. Il arrive un point de stabilisation, caractérisé par le fait que, à partir de lui, les seuls segments admissibles ont des extrémités $(0, 1)$ et $(s, 0)$

(où $s \in \mathbb{Q}_+$ peut changer avec les pas). En plus, l'équation à résoudre pour calculer les coefficients a toujours degré égal à 1, donc tous les coefficients de ϱ appartiennent à une extension algébrique finie de $k((y))$.

Remarque 8.2.— Il y aura possiblement un certain nombre de pas sans dénominateurs. Néanmoins il doit avoir toujours un pas tel que, avant lui, il n'y a pas de dénominateurs, mais le premier dénominateur va paraître juste à ce point. Soit

$$0 = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n ,$$

l'équation à ce point, où $b_i \in k[[x^{1/q_1}, x^{1/q_1}]]$, avec $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $i = 0, 1, \dots, n$.

À ce point, la substitution doit avoir un dénominateur, c'est-à-dire, elle est de la forme

$$z = x^{\gamma_1} \left(\frac{u_1}{y^{p_1}} + z_1 \right) ,$$

où $u_1 \in k[[y^{1/q_2}]]$ est une unité, $p_1 \in (1/q_2) \cdot \mathbb{Z}_+$ pour un entier fixé $q_2 > 1$, et le nouveau polynôme appartient à $k((y^{1/q_2}))[[x^{1/q_2}]] [z_1]$. La nouvelle équation prend la forme

$$0 = b_0 x^{\gamma_1} \left(\frac{u_1}{y^{p_1}} + z_1 \right)^n + b_1 x^{\gamma_1} \left(\frac{u_1}{y^{p_1}} + z_1 \right)^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x^{\gamma_1} \left(\frac{u_1}{y^{p_1}} + z_1 \right) + b_n ,$$

donc l'ordre des coefficients des puissances de x dans les b_i est borné inférieurement par $-np_1$.

On peut raisonner de la même forme pour les pas successives. On fait m pas de telle façon qu'on arrive au point de stabilisation. À ce point là on aura une équation

$$0 = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n ,$$

où :

1. $c_i \in k((y^{1/q}))[[x^{1/q}]]$, $q \in \mathbb{Q}_+$.
2. Il y a une borne inférieure $d \in \mathbb{Q}_-$ pour les ordres des coefficients des puissances x qui apparaissent dans tous les c_i , ainsi que pour les ordres des coefficients des puissances de x dans la racine. Cela veut dire que tout monôme $x^\alpha y^\beta$ qui apparaît dans n'importe quel c_i (ou dans la racine) est tel que $\beta \geq d$.

Remarque 8.3.— Par les propriétés du point de stabilisation, $\nu_x(c_{n-1}) = 0$. Si $c_{n-1,0} \in k((y^{1/q}))$ est le coefficient du terme indépendant de x dans c_{n-1} ,

alors toute nouvelle substitution (c'est-à-dire, à partir de ce point), sera de la forme

$$z = x^{\gamma'} \left(\frac{u}{c_{n-1,0}} + z_1 \right)$$

où $u \in k((y^{1/q}))$ est le coefficient de la plus petite puissance de x du terme indépendant de z dans l'équation. La propriété plus importante du point de stabilisation est que $c_{n-1,0}$ est le même pour toutes les substitutions à partir de ce point là. En particulier q n'augmente pas dans les pas successifs.

Si $\nu_y(c_{n-1,0}) \leq 0$, il n'y aura pas de nouveaux denominateurs, ni dans les coefficients de l'équation ni dans les coefficients de la racine. Le problème se pose quand $\nu_y(c_{n-1,0}) = r > 0$. Dans ce cas :

1. Après la première substitution, les ordres des coefficients des puissances de x dans l'équation sont bornés inférieurement par $d - nr$.
2. L'ordre du coefficient de x dans le terme nouveau de la racine, correspondant à cette substitution, est borné inférieurement par $d - r$, donc par $d - nr$.
3. Après m substitutions, les ordres des coefficients des puissances de x dans l'équation sont bornés inférieurement par $d - nrm$.
4. Après m substitutions, les ordres des coefficients des puissances de x dans la racine sont bornés inférieurement par $d - nrm$.

On en conclut que tout monôme $x^\alpha y^\beta$ qui apparaît dans la racine après ces m substitutions est tel que :

1. $\alpha \geq m/q$.
2. $\beta \geq d - nrm$.

En conséquence, jusqu'à ce pas, tous les points du diagramme de Newton de la racine qu'on obtient à partir du point de stabilisation sont contenus dans la région du plan limitée par les demi-droites suivantes :

1. La partie positive de l'axe vertical.
2. La demi-droite avec origine $(0, 0)$ qui contient le point

$$(m/q, d - nrm).$$

Les pentes

$$\frac{d - nrm}{m/q} = \frac{qd - qnrm}{m} = \frac{qd}{m} - qnr$$

des demi-droites inférieures forment une suite monotone croissante, car

$$\frac{qd}{m+1} - \frac{qd}{m} = -\frac{qd}{(m+1)m} > 0.$$

Cela démontre le théorème 7.2.

9 Le théorème de Jung-Abhyankar : démonstration directe

Le but de cette section est démontrer le théorème 7.1 en s'appuyant sur le théorème 7.2, dont nous avons une preuve directe dans la section 8. Par convenance, on écrit ici, à nouveau, l'énoncé du théorème 7.1.

Théorème 9.1.— (THÉORÈME DE JUNG-ABHYANKAR) *Soit*

$$P(x, y, z) = z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x, y)z + a_n(x, y) \in k[[x, y]][z],$$

$n > 1$ un polynôme de Weierstraß irréductible (donc $a_n(x, y) \neq 0$), tel que son discriminant D par rapport à z est un diviseur à croisements normaux. Alors, toutes les racines de l'équation $P(x, y, z) = 0$ forment justement l'ensemble des conjuguées d'une certaine série de Puiseux $\varrho(x^{1/q}, y^{1/q}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, d'ordre nécessairement positif, qui est nécessairement quasi-ordinaire par la proposition 6.4.

Bien sûr, on suppose que P n'est pas un polynôme à coefficients dans une seule variable, puisque ce cas est déjà traité dans le théorème de Newton-Puiseux classique.

Remarque 9.2.— Par le théorème 7.2 il existe un secteur privilégié Γ du plan tel que toutes les racines de $P(x, y, z) = 0$ ont les diagrammes de Newton contenus dans Γ . On peut supposer que Γ est la projection du segment $\overline{AB}$, où $A = (0, 1)$, $B = (c, d)$, $c > 0$.

Si $\Gamma \subset \mathbb{Z}_0^2$ alors toutes les racines appartiennent à $k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, pour un certain $q \in \mathbb{Z}_+$, et elles ne sont pas des unités. Si on prend un ensemble de conjuguées, cette ensemble a un polynôme minimal qui doit diviser à $P(x, y, z)$, donc il doit être égal à $P(x, y, z)$ par irréductibilité. Dans ce cas là, le théorème est démontré. On va donc supposer que quelque racines n'appartiennent pas à $k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, donc Γ n'est pas contenu dans $\mathbb{Z}_0^2$.

Remarque 9.3.— Il existe un entier positif m tel que le changement de variables $x \rightarrow x y^m$, $y \rightarrow y$ mène Γ dans $\mathbb{Z}_0^2$. Un tel changement de variables n'est que la composition d'une chaîne de m éclatements monomiaux du type $x \rightarrow xy$, $y \rightarrow y$. Soit $P'(x, y, z) = P(x y^m, y, z)$; alors P' a toutes ses racines dans un certain $k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$. Si $D = x^a y^b U(x, y)$, $U(x, y) \in k[[x, y]]$, $U(0, 0) \neq 0$, alors le discriminant D' de P' est égal à $D' = x^a y^{b+ma} U(x y^m, y)$, qui est encore un diviseur à croisements normaux.

Le polynôme P' n'est pas nécessairement irréductible, car les racines de P' peuvent former plusieurs ensembles de conjuguées. Par exemple, si $P =$

$z^2 - 2zy + x^2$, ses racines sont

$$f_1 = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\right), \quad f_2 = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}\right)$$

donc P est irréductible sur $\mathbb{C}[[x, y]][z]$. Le transformé P' de P par un éclatement monomial est égal à $P' = z^2 - 2zy + y^2x^2$, dont les racines sont $f_1 = (1 + \sqrt{1 - x^2})y$, $(1 - \sqrt{1 - x^2})y$ ce qui prouve que P' est réductible. On peut objecter que celui-ci n'est pas un vrai exemple, car le discriminant de P est $D = 4(y^2 - x^2)$, qui n'est pas un diviseur à croisements normaux tandis que le discriminant $-4y^2(x - 1)(x + 1)$. Mais nous verrons que l'essence de notre raisonnement est de montrer qu'on ne peut pas trouver un vrai exemple.

Remarque 9.4.— Pour chaque ensemble de conjuguées on formera son polynôme minimal et on écrira $P' = P'_1 \cdots P'_r$, où les P'_i sont des polynômes de Weierstraß irréductibles, les polynômes minimaux des ensembles de conjuguées. Puisque la factorization d'un polynôme de Weierstraß est un produit de polynômes de Weierstraß, les racines de $P'_1, \dots, P'_r$ ne sont pas des unités. Il s'agit maintenant de parcourir, à l'inverse, la totalité de la chaîne d'éclatements monomiaux, c'est à dire, de partir de $P' = P'_1 \cdots P'_r$ et appliquer les inverses d'éclatements monomiaux correspondants.

Il y a deux sorties possibles de ce processus :

1. Les transformés des facteurs P'_i appartiennent à $k[[x, y]][z]$. Par irréductibilité, $r = 1$ et on retrouve P .
2. Si P_i est le transformé de P'_i par toute la chaîne d'inverses d'éclatements monomiaux alors $P = P_1 \cdots P_r$ et il y a quelques P_i qui n'appartiennent pas à $k[[x, y]][z]$.

On doit résoudre ces deux cas.

Dans le premier cas, on a un polynôme de Weierstraß P absolument irréductible. Alors, le théorème 6.7 nous dit que toutes les racines de P sont des séries de Puiseux, appartenant à $k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ et quasi-ordinaire. On a donc le théorème de Jung-Abhyankar dans ce cas.

Remarque 9.5.— Il ne peut pas arriver que tous les P_i , $i = 1, \dots, r$ aient les exposants des dénominateurs bornés. En effet, s'il était ainsi, il existerait un entier $m > 0$ tel que $y^m P = (y^{m_1} P_1) \cdots (y^{m_r} P_r)$, $m = m_1 + \cdots + m_r$ et les $(y^{m_i} P_i) \in k[[x, y]][z]$ ne seraient pas divisibles par y . Cela n'est pas possible. On en déduit qu'il y a quelques P_i dont les exposants des dénominateurs ne sont pas bornés, donc les exposants des dénominateurs de ses racines ne sont pas bornés, non plus. Supposons que c'est le cas de P_1 .

Soient $\{f = f_{11} \dots, f_{1,s_1}\}$ les racines de P_1 ; le fait que les exposants des dénominateurs de f ne sont pas bornés implique que f n'est pas un diviseur à croisements normaux. Par la proposition 6.5, il existent deux entiers $p' \geq 0$, $p > 0$ tels que $\mathcal{E}(y^{p'} f) \subset \Gamma$, $T_p(y^{p'} f) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$, les conjuguées différentes de $T_p(y^{p'} f)$ sont $\{T_p(y^{p'} f_{11}), \dots, T_p(y^{p'} f_{1,s_1})\}$ et $T_p(y^{p'} f)$ n'est pas un diviseur à croisements normaux.

Soient $\{f = f_{i1} \dots, f_{i,s_i}\}$, $i = 1, \dots, r$ les racines de P_i ; on peut prendre p', p de telle façon que $\mathcal{E}(y^{p'} f_{ij}) \subset \Gamma$, $T_p(y^{p'} f_{ij}) \in k[[x^{1/q}, y^{1/q}]]$ et les conjuguées différentes de $T_p(y^{p'} f_{i,1})$ sont $\{T_p(y^{p'} f_{i,1}), \dots, T_p(y^{p'} f_{i,s_i})\}$. Soient $P_{i,p',p}$ les polynômes minimaux des $f_{i,1}$, $1 \leq i \leq r$.

Soit, comme d'habitude,

$$P(x, y, z) = z^n + h_1(x, y)z^{n-1} + \dots + h_{n-1}(x, y)z + h_n(x, y);$$

alors

$$P_{p'}(x, y, z) = z_1^n + h_1(x, y)y^{p'}z_1^{n-1} + \dots + h_{n-1}(x, y)y^{p'(n-1)}z_1 + h_n(x, y)y^{p'n}$$

est le polynôme qui a pour racines toutes les $y^{p'} f_{ij}$. Le discriminant $D_{p'}$ de $P_{p'}$ est un diviseur à croisements normaux par le même raisonnement dans la démonstration du théorème 6.7. D'autre part, la troncation jusqu'au degré p du discriminant de $\prod_{i=1}^r P_{i,p',p}$ est la troncation de $D_{p'}$ jusqu'au degré p . Tout cela implique que $D_{p'}$ ne peut pas être un diviseur à croisements normaux, donc on est arrivé à une contradiction. Cela prouve le théorème de Jung-Abhyankar.

Références

- [1] S.S. Abhyankar. On the ramification of algebraic functions. *Amer. J. Math.*, 77 :575–592, 1955.
- [2] Francisco Javier Herrera Govantes. *Ramificación de valoraciones de superficies algebroides*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, Sevilla, 1981.
- [3] Nathan Jacobson. *Basic Algebra*, volume I. W. H. Freeman, San Francisco, 1974.
- [4] M.J. Soto. *Álgebra y combinatoria de singularidades*. PhD thesis, Universidad de Sevilla (España), Sevilla, 2001.
- [5] R. J. Walker. *Algebraic curves*. Springer-Verlag, New York, 1978.