# Álgebras de semigrupos y aplicaciones

Pilar Pisón Casares*

Quiero empezar agradeciendo a la Decana de la Facultad el habernos dado la oportunidad de estar representados en esta Semana de las Matemáticas, y permitirnos contaros en qué trabaja nuestro incipiente grupo.

Trataré de esbozar a grandes rasgos los objetos y problemas que estudiamos, para que se pueda entender cuáles son nuestras aportaciones. Intentaré no entrar en cuestiones técnicas.

Para nosotros $(S,+)$ será un semigrupo conmutativo y con elemento neutro. Exigiremos también que sea finitamente generado, es decir, que exista un conjunto finito $\{n_1,\ldots,n_r\} \subset S$ verificando que cualquier elemento $m \in S$ pueda escribirse $m = \sum_{i=1}^r \alpha_i n_i$, donde $\alpha_i \in \mathbf{N}$.

Consideramos además un cuerpo conmutativo $k$. El álgebra del semigrupo será representada por $k[S]$ y es la suma directa de tantas copias de $k$ como elementos haya en $S$. Es decir, si consideramos el símbolo $\chi^m$ para cada elemento $m \in S$, tenemos que

$$k[S] = \oplus_{m\in S} k\chi^m,$$

donde la suma considerada es la habitual, mientras que el producto viene dado mediante el producto de los símbolos $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$.

Una presentación del álgebra es, elegir un sistema de generadores de $S$ que denotaremos como antes $\{n_1,\ldots,n_r\}$ y definir el homomorfismo de $k$-álgebras

$$\Phi : k[X_1,\ldots,X_r] \to k[S], \quad \Phi(X_i) = \chi^{n_i}.$$

Por ser $\Phi$ sobreyectivo, el ideal $I = \ker(\Phi)$ verifica que $k[S] \simeq A/I$, siendo $A = k[X_1,\ldots,X_r]$. Al ideal $I$ se le suele llamar el ideal del semigrupo aunque depende del sistema de generadores elegido en $S$.

Es un resultado muy conocido (ver [11]) que

$$I = \langle \mathbf{X}^\alpha - \mathbf{X}^\beta \mid \sum_{i=1}^r \alpha_i n_i = \sum_{i=1}^r \beta_i n_i \rangle.$$

*Conferencia de Investigadores Matemáticos de Sevilla. Año Mundial de las Matemáticas, Facultad de Matemáticas de Sevilla, 27 marzo-2 abril de 2000.

En particular tenemos que $I$ es un ideal binomial generado por diferencias puras de binomios. Además, la noetherianidad de $A$ asegura que $I$ está generado por un número finito de estos binomios.

El interés de nuestro grupo por este ideal viene desde mi tesis doctoral ([17]) donde en el último capítulo resolvía el cálculo explícito de estos generadores, pero en un caso muy particular dentro de este esquema, el dado por curvas monomiales en el espacio afín de dimensión 4 que equivale a exigir $S = \langle n_1, \ldots, n_4 \rangle \subset \mathbf{N}$.

El caso que más nos interesa es en el que $S$ es cancelativo, es decir,

$$m + m' = m + m'' \Rightarrow m' = m'', \quad m, m', m'' \in S.$$

En este caso, $S$ puede considerarse como un subsemigrupo de un grupo abeliano y finitamente generado $G(S)$, por lo que podremos pensar

$$S \subset \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}/a_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/a_s\mathbf{Z}.$$

La propiedad de cancelación permite describir el ideal mediante el retículo de las relaciones del semigrupo. Concretamente, si llamamos

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{Z}^r \mid \sum_{i=1}^{r} u_i n_i = 0\},$$

tenemos que

$$I = \langle \mathbf{X}^\alpha - \mathbf{X}^\beta \mid \alpha - \beta \in \mathcal{L} \rangle.$$

De esta manera, se consigue dar métodos de cálculo efectivo del ideal sin necesidad de usar teoría de eliminación, sino empleando bases del retículo $\mathcal{L}$. Esto mejora sensiblemente la rapidez de los algoritmos (ver [9] y [12]). Aquí la aportación de nuestro grupo consiste en la generalización de estos métodos al caso de torsión no trivial dada por Vigneron en [22].

Por otra parte, a partir de un sistema de generadores del ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_{b_1} \rangle$, podemos definir el homomorfismo de $A$-módulos

$$\Phi_1 : A^{b_1} \to A, \quad \Phi_1(e_i) = f_i,$$

siendo $e_i$ el elemento de $A^{b_1}$ con todas sus coordenadas nulas salvo la $i$-ésima que es igual a 1. El núcleo de este homomorfismo es llamado primer módulo de sicigias de $I$, lo denotaremos $N_1 = ker(\Phi_1)$. La noetherianidad de $A$ asegura la de $A^{b_1}$ y por tanto $N_1$ está finitamente generado. De esta forma, por recurrencia se construyen los siguientes módulos de sicigias $N_i$. El Teorema de las sicigias de Hilbert asegura que este proceso es finito, y así se construye una resolución libre finita de $k[S]$

$$0 \to A^{b_r} \to \cdots \to A^{b_1} \to A \to k[S] \to 0.$$

Además, todo el proceso anterior puede hacerse de forma graduada sobre el semigrupo $S$. Para ello basta asignar en $A$ a cada variable $X_i$ el grado $n_i$ con lo que

$\Phi$ será graduado de grado 0 e $I$ un ideal homogéneo para esta $S$-graduación. Esto permite mantener la graduación en los siguientes pasos. Es decir, podemos construir una resolución libre y $S$-graduada de $k[S]$. Este es otro de los objetos en los que basamos nuestro estudio.

Es bien conocido que los sistemas de generadores de $I$, y más generalmente los de los módulos $N_i$, pueden tener distinto cardinal, aún exigiendo que no pueda prescindirse en ellos de ningún elemento. Otra de las aportaciones del grupo consiste en el estudio de las condiciones que permiten asegurar que estos sistemas de generadores tengan el mismo cardinal. Concretamente la condición encontrada sobre el semigrupo es $S \cap (-S) = (0)$ (ver [4]). Esta condición es equivalente a muchas otras condiciones. Por ejemplo, citaremos que en el caso $S \subset \mathbf{Z}^r$ se tiene que todos los generadores de $S$ están en un mismo semiespacio de los definidos por cierto hiperplano. O también, que cada elemento $m \in S$ admite únicamente un número finito de escrituras en función de los generadores. Es decir, el subespacio vectorial de los elementos de grado $m$ de $A$, $A_m$, tiene dimensión finita.

La condición anterior nos permite demostrar un lema de Nakayama para $S$-graduaciones. Concretamente lo que se tiene es que si $M$ es un $A$-módulo $S$-graduado finitamente generado y $\mathbf{m} = (X_1, \ldots, X_r)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{g_1, \ldots, g_t\}$ es un sistema de generadores de M.

2. $\{\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_t}\}$ es un sistema de generadores de $M/\mathbf{m}M$.

De esta forma, los sistemas minimales de generadores de $M$ se corresponden con las bases del $k$-espacio vectorial $M/\mathbf{m}M$ (nótese que $A/\mathbf{m} \simeq k$). Como consecuencia todos tienen el mismo cardinal.

Imponiendo entonces sobre $S$ esta condición, una parte importante de la labor de nuestro grupo y sus antecedentes se centra en el estudio de los sistemas minimales de generadores de los módulos de sicigias $N_i$ (consideramos $I = N_0$) y por tanto de la resolución libre minimal de $k[S]$.

Nuestro estudio se basa fundamentalmente en un objeto combinatorio: un complejo simplicial abstracto con vértices en el conjunto $\Lambda = \{1, \ldots, r\}$. En realidad no es uno sino muchos, uno para cada elemento $m \in S$. Concretamente a cada elemento del semigrupo $m \in S$ le asociamos el conjunto

$$\Delta_m = \{F \subset \Lambda \mid m - \sum_{i \in F} n_i \in S\},$$

que puede fácilmente comprobarse que es un complejo simplicial abstracto.

El grafo subyacente a este complejo simplicial aparece definido por primera vez en la tesis de José Carlos Rosales de la Universidad de Granada [20]. Posteriormente ([6]), Antonio Campillo y Carlos Marijuán de la Universidad de Valladolid, ponen caras a este grafo obteniendo el complejo. Desde entonces, aparecen considerados en la literatura además de por estos autores con los que nuestro grupo tiene colaboraciones, por un amplio número de investigadores como puede verse en [1], [2], [16] y [21].

Existe un isomorfismo

$$\varphi_i : \widetilde{H}_i(\Delta_m) \to V_i(m) := (N_i)_m/(\mathbf{m}N_i)_m, \quad \forall i \geq 0$$

donde $\widetilde{H}_i(\Delta_m)$ representa el $i$-ésimo grupo de la homología reducida de $\Delta_m$. La descripción del isomorfismo es otra de nuestras aportaciones ([3]).

El isomorfismo anterior junto con el lema de Nakayama permiten trasladar el problema de obtener sistemas minimales de generadores de $N_i$ a los siguientes problemas:

**Problema 1:** Determinar el conjunto

$$C_i = \{m \in S \mid \widetilde{H}_i(\Delta_m) \neq 0\}.$$

**Problema 2:** Determinar bases de $\widetilde{H}_i(\Delta_m)$.

En el caso $i = 0$, el problema 2 es fácil de resolver, ya que basta tomar un punto en cada componente conexa de $\Delta_m$ y formar un árbol. Sin embargo, no es tan fácil el problema 1 cuya solución es otra de nuestras aportaciones. Los primeros resultados parciales se obtienen en [7]. Definitivamente, en [8] se da una condición necesaria y suficiente que caracteriza a los elementos $m \in S$ tales que $\Delta_m$ es no conexo. Esta viene dada por tres propiedades aritméticas que, mediante la introducción en [4] de nuevos elementos combinatorios (escaleras), se convierten en un algoritmo que resuelve el problema 1.

Para $i \geq 1$ el problema 2 se reduce a Álgebra lineal ordinaria, una vez que se haya construido el complejo $\Delta_m$. De esta forma, lo que hay que resolver son sistemas lineales diofánticos en enteros positivos. En este tema también obtenemos resultados novedosos en [18].

Son también las bases de Hilbert de sistemas lineales diofánticos, la clave para obtener superconjuntos $C_i'$ finitos, $C_i \subset C_i'$, donde chequear para resolver definitivamente el problema 1. Esta solución se encuentra en un primer momento para el caso $i = 1$ en [19]. Posteriormente, generalizando las técnicas se obtiene la solución para $i \geq 2$ en [5]. Se puede entonces decir, que si bien la noetherianidad del anillo de polinomios nos asegura la finitud de los conjuntos $C_i$, es la Programación lineal entera la que permite calcular estos conjuntos.

Se obtienen así procedimientos de cálculo de todos los módulos de sicigias y por tanto de la resolución libre minimal $S$-graduada del álgebra. Estos métodos aunque no mejoran la rapidez de los métodos que emplean bases de Gröbner, tienen su interés en que describen combinatoriamente los elementos que intervienen en el resultado final obtenido (grados, número de elementos, etc).

Otra de las líneas más prometedoras, y en las que el grupo cuenta ya con aportaciones, está en los ideales binomiales. Los ideales *celulares* definidos en

[10] están estrechamente relacionados con los ideales de semigrupo. Esta relación permite obtener, a partir de retículos asociados, información de los celulares como su radical y su descomposición primaria. Cualquier ideal binomial se puede expresar como intersección de ideales celulares. De esta descomposición se extrae información del ideal binomial.

Nuestro trabajo en esta línea se inicia con la tesina de Ojeda cuya continuación consiste en la resolución de los problemas propuestos en [10] para afinar los pasos que conducen a la obtención de una descomposición primaria de un ideal binomial en componentes binomiales. Las soluciones están recogidas en [13].

Otra de las aplicaciones de estas técnicas está en la obtención del índice de nilpotencia relacionado con el Nullstellensatz efectivo (ver [14]).

También se consigue un criterio efectivo para detectar la descomposición primaria canónica en [15].

Por último, aclarar que las aplicaciones que buscamos de nuestro trabajo, de momento se centran en las aplicaciones dentro de la propia matemática. Concretamente, la líneas que nos han interesado hasta ahora son la Programación lineal y la Geometría tórica.

Existen muchas conjeturas abiertas en el marco de la Geometría Algebraica. El caso tórico es un buen ejemplo donde plantearse un problema concreto antes de intentar abordarlo en toda su generalidad.

# References


[1] ARAMOVA A.; HERZOG J. Free resolutions and Koszul homology. *J. Pure and Applied Algebra* **105**, No. 1, 1-16, 1995.

[2] ARAMOVA A.; HERZOG J. Koszul cycles and Eliahou-Kervaire type resolution, *J. of Algebra* **181**, 347-370, 1996.

[3] BRIALES E.; CAMPILLO A.; MARIJUÁN C.; PISÓN P. Combinatoric and Syzygies of Semigroup Algebras, *Collect. Math.* **49**, 239-256, 1998.

[4] BRIALES E.; CAMPILLO A.; MARIJUÁN C.; PISÓN P. Minimal Systems of Generators for Ideals of Semigroups, *Journal of Pure and Applied Algebra* **124**, 7-30, 1998.

[5] BRIALES E.; PISÓN P.; VIGNERON A. The Regularity of a Toric Variety, *Prepublicación de la Universidad de Sevilla 53*, 1999.

[6] CAMPILLO A.; MARIJUÁN C. Higher relations for a numerical semigroup, *Seminaire de Theorie des nombres. Bordeaux* **3**, 249-260, 1991.

[7] CAMPILLO A.; PISÓN P. Generators of a monomial curve and graphs for the associated semigroup, *Bulletin de la Societe Mathematique de Belgique, V.* **45**, 1-2, Serie A, 45-58, 1993.

[8] CAMPILLO A.; PISÓN P. L'idéal d'un semi-grupe de type fini, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **316**, 1303-1306, 1993.

[9] DI BIASE, F.; URBANKE, R. An Algorithm to Calculate the Kernel of Certain Polynomial Ring Homomorphisms, *Experimental Mathematics*, **4**, No. 3, 227-234, 1995.

[10] EISENBUD D.; STURMFELS B. Binonial ideals, *Duke Mathematical Journal*, **84**, No. 1, 1-45, 1996.

[11] HERZOG J. Generators and Relations of Semigroups and Semigroup Rings, *Manuscripta Math.* **3**, 175-193, 1970.

[12] HOSTEN S.; STURMFELS B. GRIN, An Implementation of Grobner Bases for Integer Programming, In E. Balas and J. Clausen editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, LNCS **920**, Springer-Verlag, 267-276, 1995.

[13] OJEDA I.; PIEDRA R. Cellular binomial ideals. Primary decomposition of binomial ideals. To appear in the Special Issue on Applications of Groebner Bases, Journal of Symbolic Computation, 1999.

[14] OJEDA I.; PIEDRA R. Effective Nullstellensatz for binomial ideals. Prepublicación n.51 de la Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla., 1999.

[15] OJEDA I.; PIEDRA R. Canonical decomposition of polynomial ideals, *Prepublicación de la Universidad de Sevilla 53*, 1999.

[16] PEEVA I.; STURMFELS B. Syzygies of codimension 2 lattice ideals, 1998.

[17] PISÓN, P. *Métodos combinatorios en Álgebra local y Curvas monomiales en dimensión 4*, Doctoral thesis, Universidad de Sevilla, 1991.

[18] PISÓN, P.; VIGNERON, A. **N**-solutions to linear equations over **Z**, *Preprint*, 1998.

[19] PISÓN, P.; VIGNERON, A. First syzygies of toric varieties and diophantine equations in congruences, *Communication in Algebra*, to appear.

[20] ROSALES J.C. *Semigrupos numéricos.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1991.

[21] STURMFELS B. Grobner Bases and Convex Polytopes, *American Mathematical Society*, University Lecture Series, Vol.8, Providence, RI, 1995.

[22] VIGNERON A. Semigroup Ideals and Linear Diophantine Equations, *Linear Algebra and its Applications* **295**, 133-144, 1999.