GEOMETRÍA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resumen:

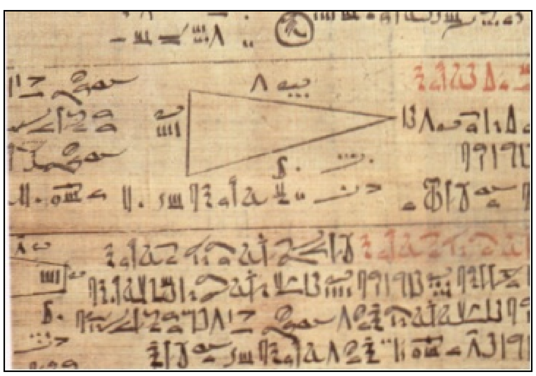
Hoy es difícil concebir una clase de matemáticas que no sea un “taller” donde se resuelven problemas. Se piensa, y creo que con razón, que el conocimiento matemático se adquiere resolviendo problemas. Ya se sabe que numerosos estudios y manuales avalan y enseñan a utilizar esta forma de aprendizaje.
El objetivo de esta charla es poner de manifiesto, mediante algunos ejemplos clásicos, que los problemas de Geometría juegan un importante papel y son especialmente idóneos para favorecer y facilitar el aprendizaje matemático.

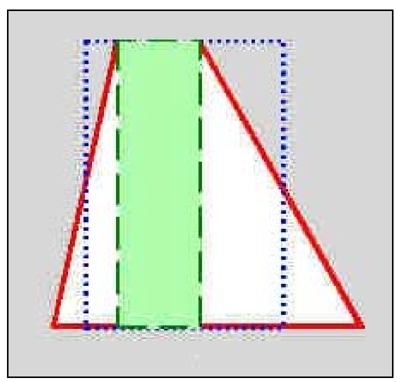
Para comenzar … ¡un problema!

¿Existen siempre en todo poliedro dos caras con el mismo número de aristas? (Z. Michalewicz y D. B. Fogel “*How to Solve it: Modern Heuristics”*). Lo dejamos así, para pensarlo un poco, y al final volveremos sobre él.

Un poco de Historia.

Hace más de 3000 años que se están resolviendo problemas de Geometría. En el Papiro de Rhind (1700 a.C.) aparecen cálculos de áreas de triángulos, cuadrados, trapecios y del círculo.



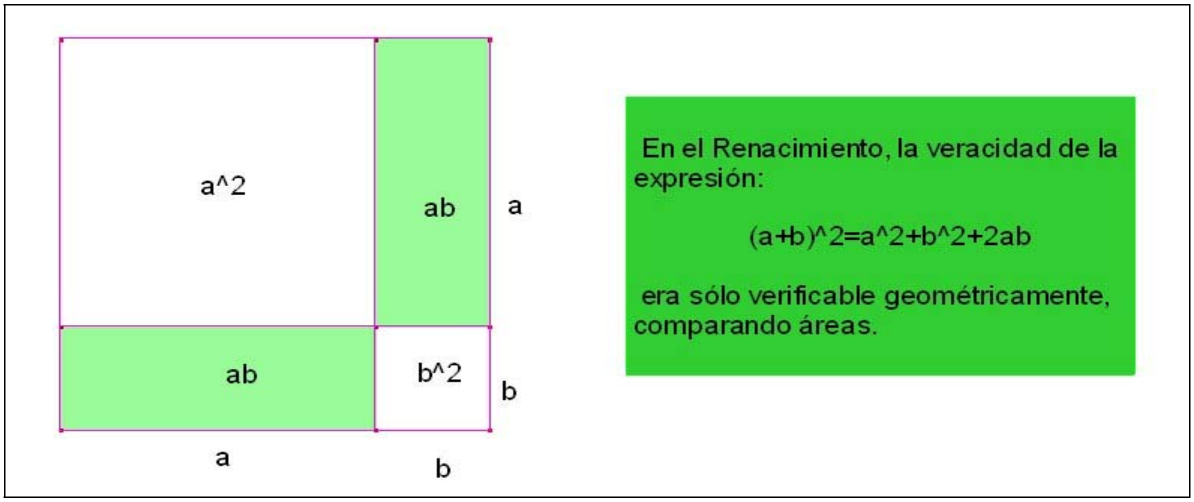


En Egipto y Grecia los problemas de Geometría fueron la base del conocimiento matemático. Y podemos decir que hasta el Renacimiento la forma más aceptada de razonamiento era geométrico.

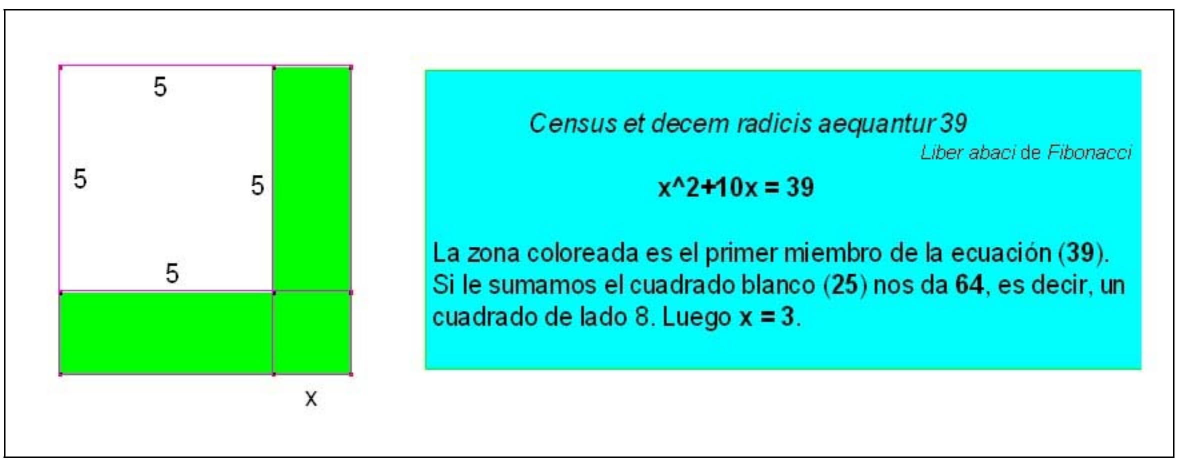
Incluso en Álgebra, cuya forma retórica dificultaba los razonamientos, identidades como la del cuadrado de un binomio eran sólo verificables comparando áreas (ver figura). Lo mismo ocurre con la resolución de ecuaciones. Hasta la aparición del

Álgebra simbólica, la Geometría era la única herramienta de que se disponía para alcanzar la solución de un problema algebraico.

Trabajos como los de Fibonacci y posteriormente Cardano y Tartaglia nos muestran esta forma de proceder.



Así, la resolución de ecuaciones cuadráticas se hacía completando geométricamente un cuadrado, como puede verse en la siguiente figura.
La famosa solución de la ecuación cúbica "*del cubo y las cosas igual al número*" la obtiene Cardano ("*Ars Magna*") razonando sobre figuras planas, pero, en realidad, es como si estuviera haciéndolo con lo que hoy llamamos policubos.



Tenemos, pues, razones históricas para pensar que la Geometría ha sido durante siglos la base de los procesos demostrativos en matemáticas.

Por qué resolver problemas.

La clase de matemáticas ha vivido muchos cambios a lo largo de la historia y en todos los niveles educativos: lecciones magistrales, clases teóricas seguidas de numerosos ejercicios, clases de teoría y clases de problemas impartidas por separado, resolución de problemas de los que surgen las ideas teóricas, etc. Hoy día parece comprobado que, al menos en la enseñanza media, el modelo de plantear problemas y a través de ellos ir introduciendo los conceptos teóricos es el más adecuado para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Incluso entre los docentes universitarios va calando también la idea de que este modelo, unido a una percepción histórica de los problemas que generaron las teorías, es la mejor manera de plantear las clases.

Resolver problemas es, sin duda, no sólo el objetivo, sino también la forma de aprender matemáticas. Aunque puedan parecer una exageración, las palabras del británico Godfrey H. Hardy abundan en este sentido:

> *La única forma de aprender matemáticas es resolver diez problemas todos los días de la semana, ... y veinte los domingos.*

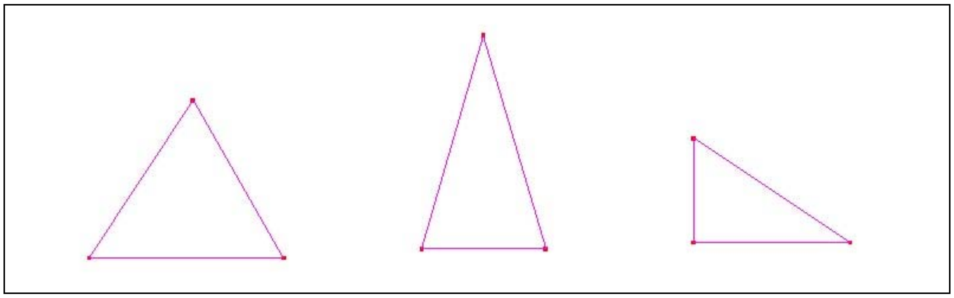
La pregunta entonces es: ¿se puede aprender a resolver problemas? Y la respuesta es: sí, … ¡resolviendo problemas! Por supuesto hay estrategias de resolución de problemas (G. Polya, M. de Guzmán, …), pero resolver problemas de matemáticas es como montar en bicicleta: hay que montarse y, casi seguro, caerse más de una vez. Aunque hayamos visto, incluso a cámara lenta, vídeos y vídeos de excelentes ciclistas mostrando la forma de hacerlo, si no nos arriesgamos no aprenderemos nunca.

Los problemas de Geometría.

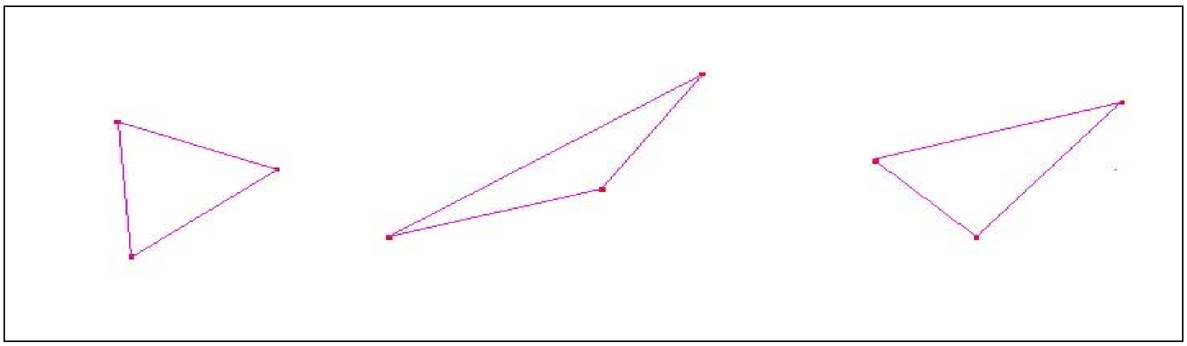
El objetivo que se pretende en esta charla es poner de manifiesto que los problemas de Geometría favorecen especialmente el aprendizaje en la resolución de problemas. Los motivos son variados, pero aquí los vamos a resumir en cuatro:

1. **La visualización del problema**, que se traduce en aspectos tales como:

   - El problema está plasmado en una imagen que tenemos presente.
   - La figura permite recordar las características de los objetos construidos.
   - El trazado de unas líneas puede dar luz sobre la solución.
   - Aunque existe el peligro de la pérdida de generalidad al dibujar las figuras. Así, si pedimos dibujar un triángulo equilátero, otro isósceles y otro rectángulo, la mayoría nos presentará este dibujo



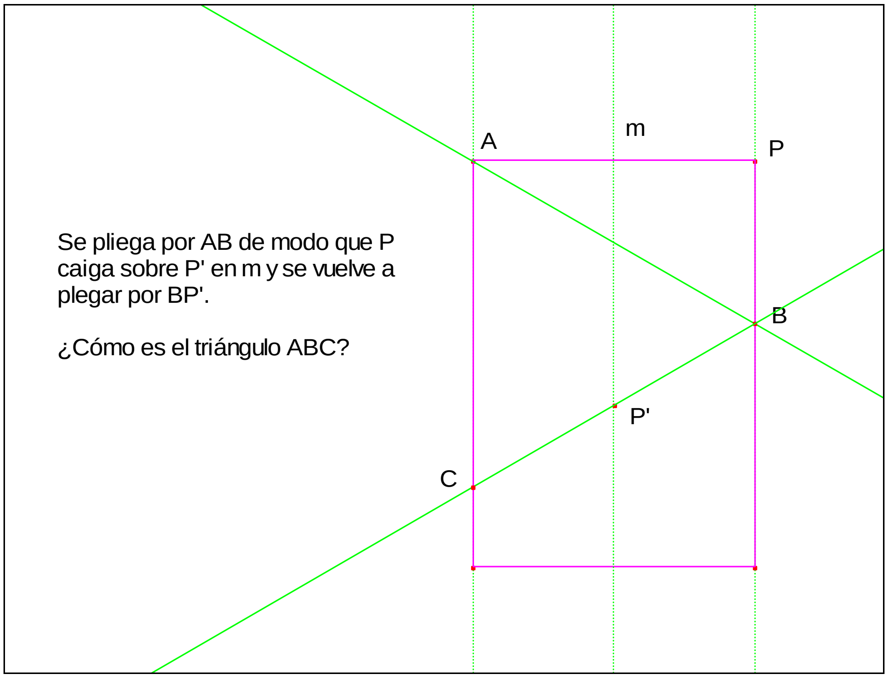
y muy pocos lo presentarían así



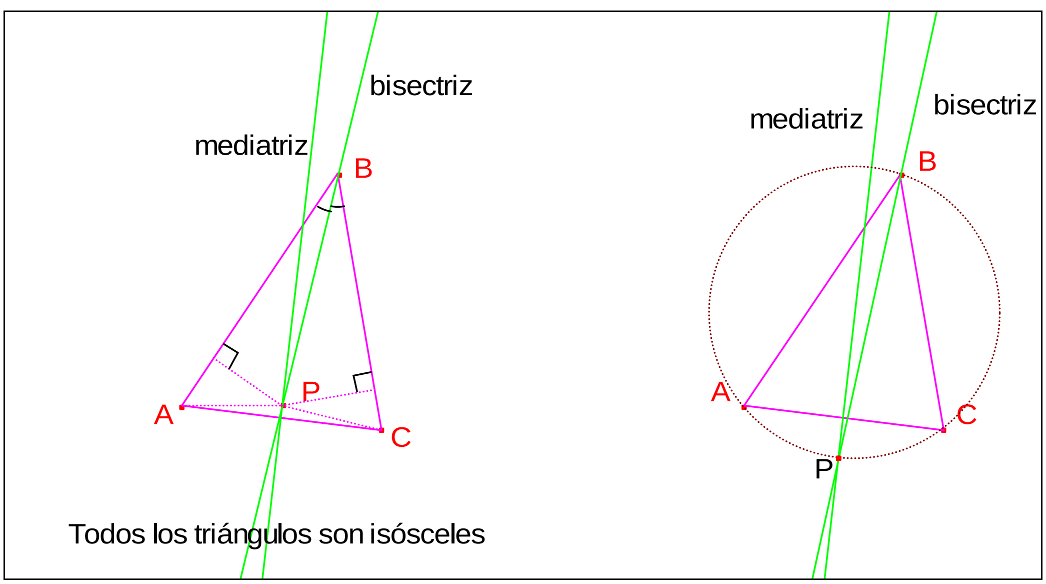
2. La facilidad para compaginar la intuición y el rigor.

Es bien sabido que el rigor es una herramienta necesaria para el matemático, pero es importante no sobrevalorar su importancia y saber en qué momento debe hacerse presente. Los procesos matemáticos, como los procesos científicos en general, atraviesan dos etapas: en primer lugar hay una fase "intuitiva" en la que se busca, se imagina, se conjetura sobre cuál puede ser la solución del problema. En esta etapa se puede actuar sin rigor, es más, a veces el rigor puede ser contraproducente. En segundo lugar está la fase "demostrativa" en la que, por métodos rigurosos, hay que probar que la solución encontrada es verdaderamente la solución del problema. Aquí es donde el rigor se hace imprescindible.

En los problemas de Geometría se aprecia muy bien esta dualidad. En el siguiente ejemplo sospechamos que el triángulo es equilátero, pero necesitaremos probarlo con un razonamiento riguroso, que se encuentra fácilmente con sólo trazar la recta AP’.



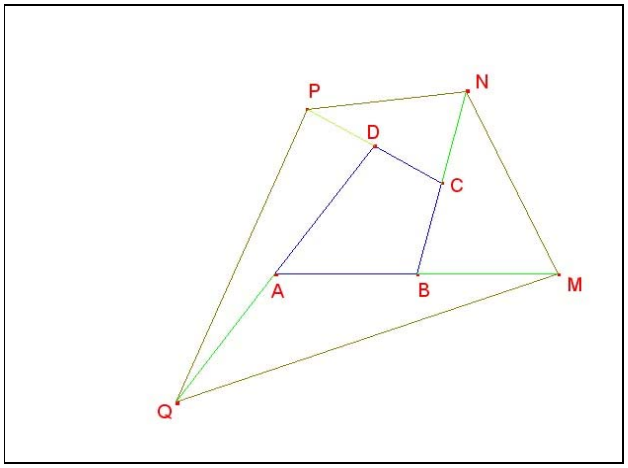
Pero también es posible que la intuición, quizás ayudada por un dibujo mal hecho, nos conduzca a resultados erróneos, como en el conocido ejemplo que prueba que todos los triángulos son isósceles:



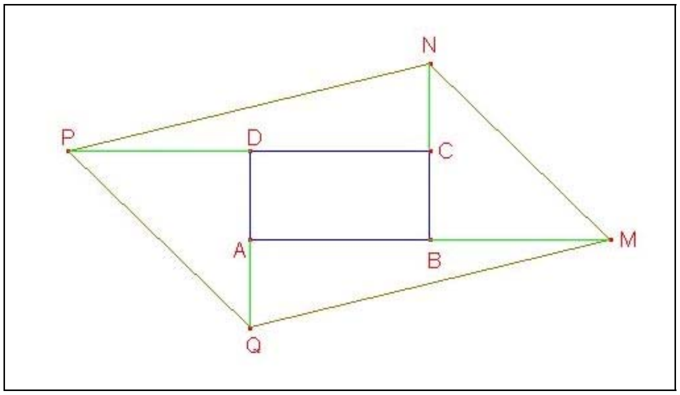
En la primera figura, la igualdad de los triángulos rectángulos que aparecen conduce a la igualdad de los lados AB y BC. En la segunda, la bisectriz, que ahora está correctamente trazada, corta a la mediatriz fuera del triángulo, concretamente, en la circunferencia circunscrita, lo que es fácil probar, y que no permite hacer el razonamiento aditivo sobre segmentos que se hacía antes.

3. La posibilidad de empezar con casos sencillos.

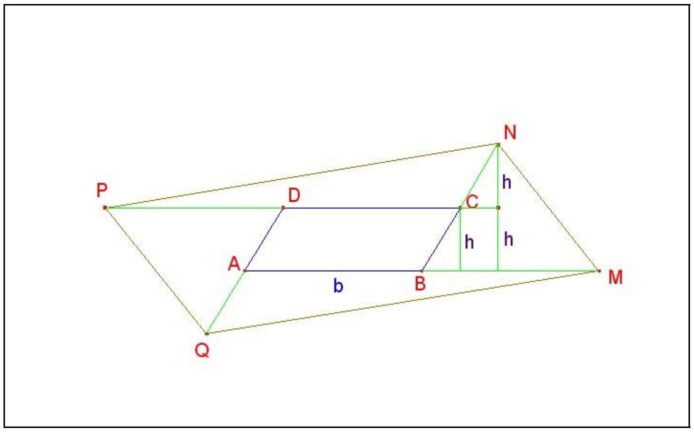
Muchos problemas de Geometría pueden replantearse con formas más simples, lo que permite en muchos casos obtener soluciones particulares que pueden generalizarse o aportar ideas para resolver el caso general. Por ejemplo, en la siguiente figura se han prolongado los lados del cuadrilátero ABCD, todos en el mismo sentido, el doble de su longitud. Si el área de ABCD es *k,* ¿cuál es el área del cuadrilátero PQMN?



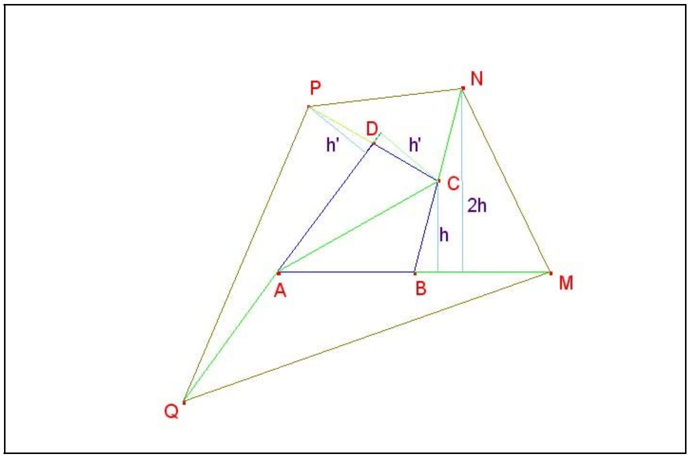
Si ABCD fuese un rectángulo la solución es sencilla:



Si el área de ABCD es *k,* el área del cuadrilátero PQMN es *5k,* porque cada triángulo es equivalente al rectángulo. Lo mismo ocurre si ABCD fuese un romboide:



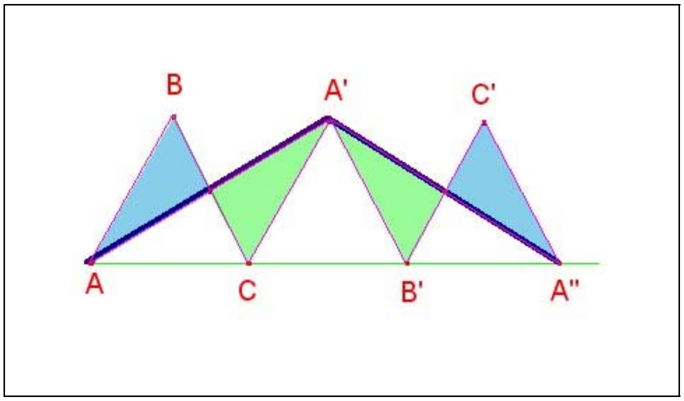
Intuyendo que en el caso general será lo mismo, nos apoyamos en los casos anteriores para demostrar que es así:



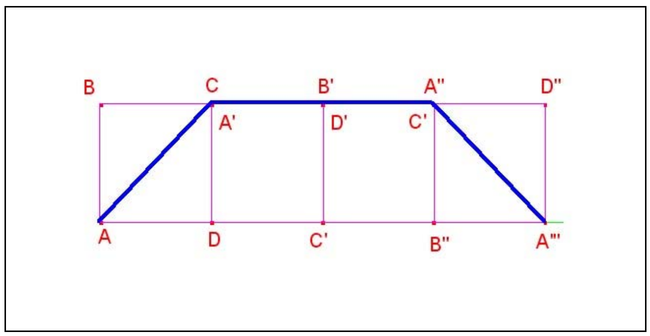
Ahora el área de los triángulos no coincide con la del cuadrilátero, pero el área de cada uno de ellos resulta ser el doble de cada uno de los triángulos que determinan las diagonales en ABCD. Sumando todas las áreas se obtiene el resultado esperado.

Otro ejemplo, más complicado, es el cálculo del área bajo un arco de cicloide. Aunque en secundaria no podemos pretender llegar a una prueba formal, sí que podemos, por aproximaciones sucesivas, jugando a ser Arquímedes, conjeturar una fórmula para dicha área.

Empezamos volteando un triángulo equilátero y observamos que el área bajo la poligonal es tres veces el área del triángulo:

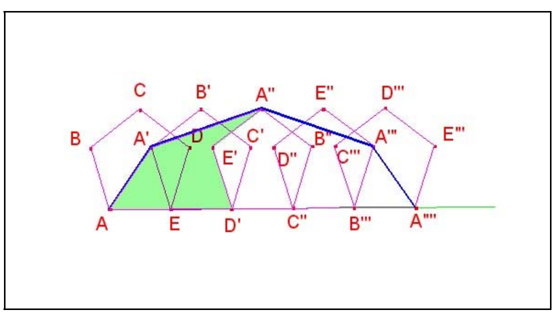


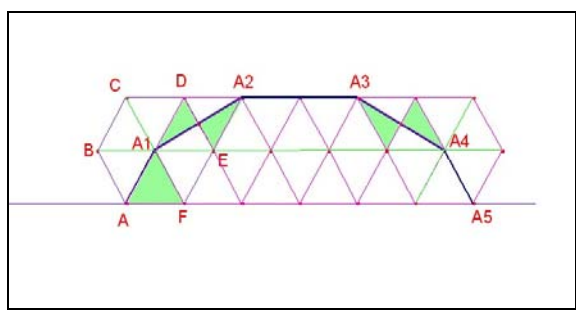
Si volteamos un cuadrado resulta otra vez que el área bajo la poligonal es tres veces el área del cuadrado:



Si repetimos el proceso con un pentágono regular, hexágono, etc. resulta de nuevo que el área bajo la poligonal es tres veces el área del polígono.

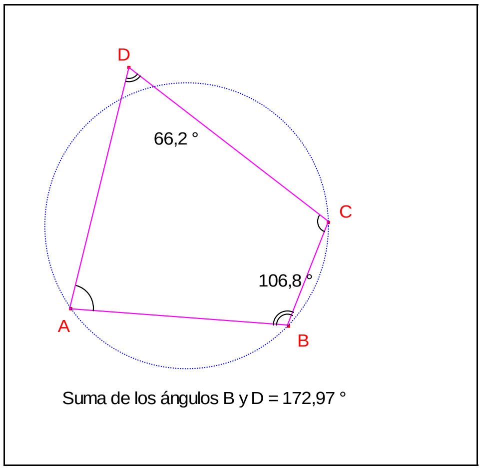
Es fácil intuir entonces que el área que encierra un arco de cicloide es tres veces el área del círculo, y no podemos ir más allá, pero ya es mucho.

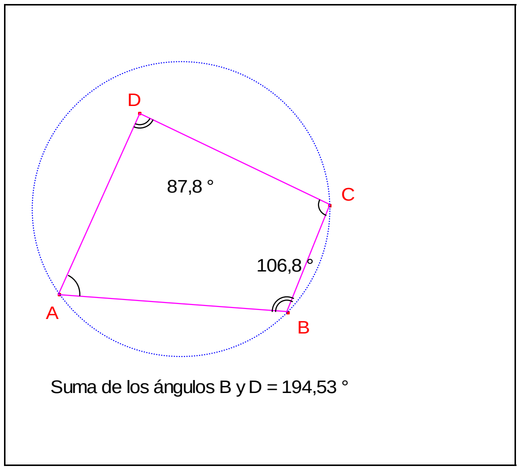




4. Consideremos el problema resuelto.

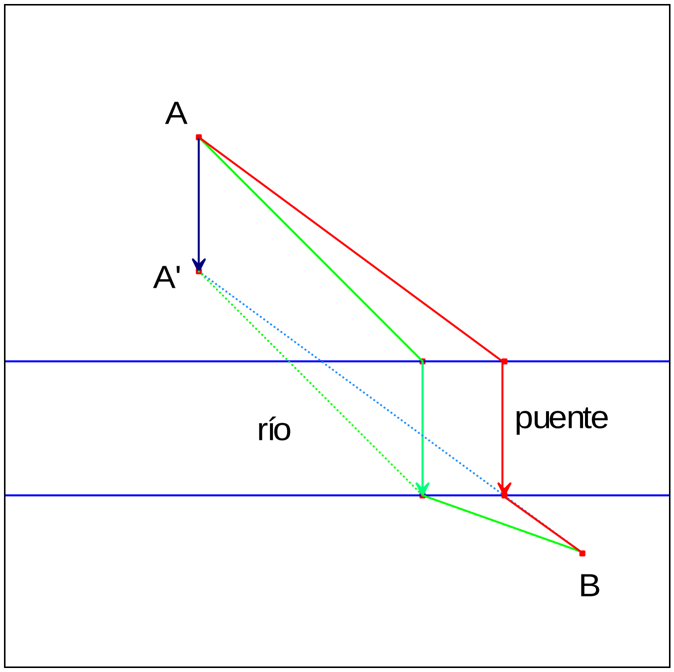
La visualización de un problema geométrico permite, en muchos casos, suponer que hemos encontrado la solución y analizar qué propiedades la relacionan con los datos del problema y si éstas son reversibles, es decir, ver si es posible usando estas relacionas hallar la solución a partir de los datos.





Por ejemplo, si queremos saber qué propiedad debe tener un cuadrilátero para que sea inscriptible suponemos que existe una circunferencia que pasa por los cuatro vértices. Entonces observamos que la suma de los ángulos opuestos es 180º y, además, si alguno de los vértices es interior o exterior al círculo determinado por los otros tres, dicha suma es mayor o menor, respectivamente, que 180º. Hemos encontrado así la caracterización que buscábamos.

Otro ejemplo clásico es el de encontrar el camino más corto entre dos pueblos, teniendo que cruzar un puente. Si suponemos el problema resuelto, pensemos que, como la longitud del puente es constante, podemos situarla al inicio del recorrido y, a partir de ahí, la mínima distancia a recorrer sería en línea recta desde A' hasta B.

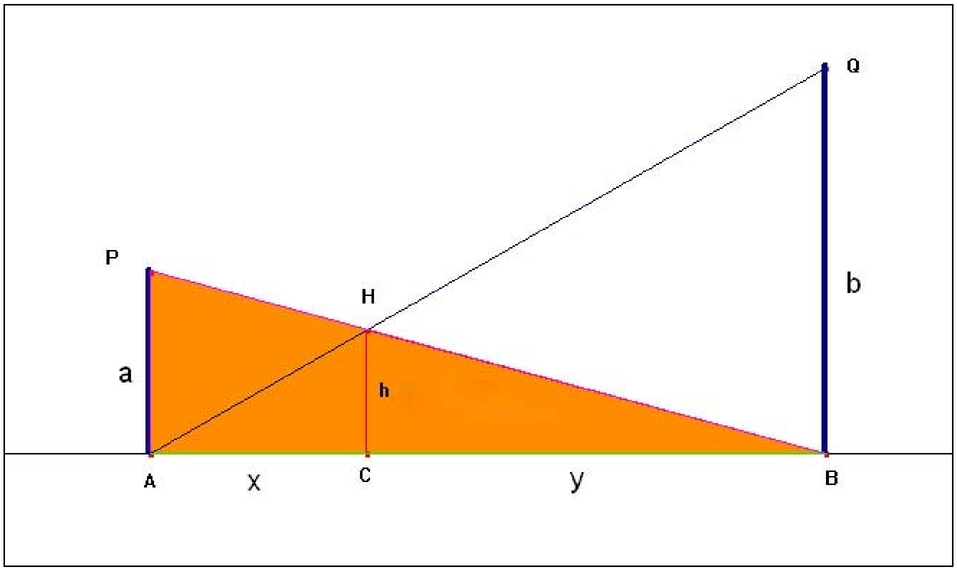


Esto nos marca la situación del puente y de ahí la solución del problema. El razonamiento para comprobar que, efectivamente, éste es el camino más corto es fácil, observando que seguir cualquier otro equivale a ir de A' a B por un camino diferente al rectilíneo.

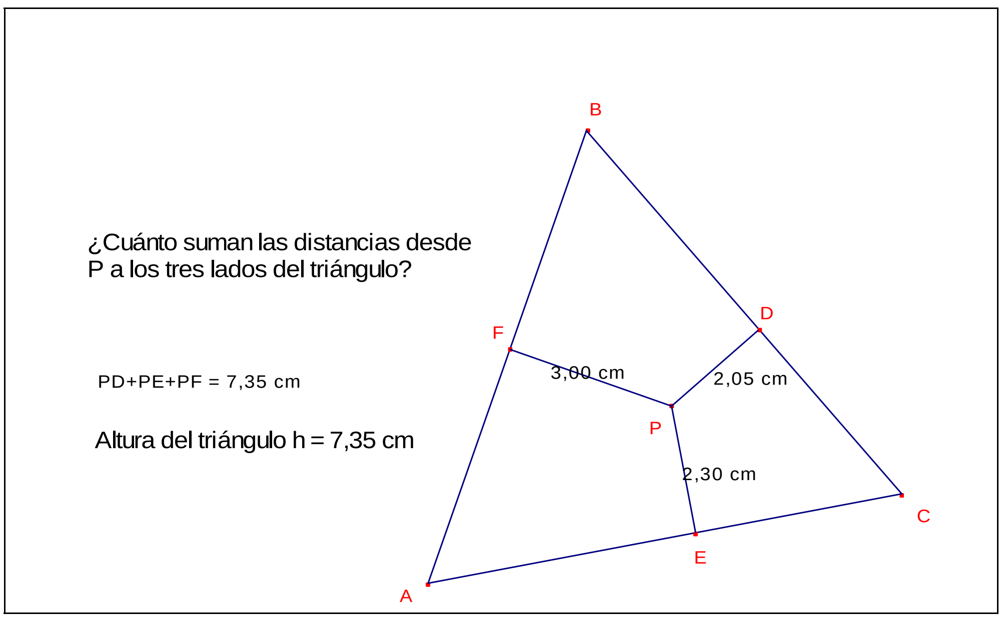
Los programas de geometría dinámica.

Cómo hemos podido apreciar a lo largo de la exposición, un programa como CABRI nos ayuda muchísimo a realizar construcciones geométricas, visualizar los problemas, encontrar relaciones entre los objetos, modificar las posiciones de los mismos, hallar lugares geométricos, etc. Pero el principal atractivo de los programas de geometría dinámica, desde un punto de vista matemático, es que permiten hacer conjeturas, avanzar resultados que luego, por supuesto, habrán de ser probados.

Se expone como ejemplo el cálculo de la altura a la que se cruzan dos cables que unen dos postes. La visualización en CABRI hace pensar que esa altura es la misma cuando se aproximan o separan los postes. La prueba, aplicando el Teorema de Thales, confirma que la altura sólo depende de la longitud de los postes.



Y en un segundo ejemplo la propiedad del triángulo equilátero referente a la suma de distancias desde un punto interior del triángulo a los lados del mismo:



Al mover el punto P con ayuda del programa se observa que la suma de distancias coincide con la altura del triángulo. Entre las diferentes pruebas de esta propiedad, destacamos una, comparando las áreas de los triángulos que se forman, y otra, más en consonancia con la idea que venimos desarrollando, reduciendo el problema a un caso más sencillo, cuando P está en un lado del triángulo, y generalizando después la situación a cualquier punto interior.

Y para terminar …

"En todo poliedro existen siempre dos caras con el mismo número de aristas".

La resolución de este problema se enmarca dentro de lo que se llama "Principio del Palomar". Si en una plaza hay trece palomas revoloteando y su palomar tiene doce huecos para entrar y salir, cuando las palomas vayan a recogerse habrá, al menos, un hueco por el que entren más de una paloma.

Este principio tan simple nos sirve para resolver problemas, como el propuesto, que de entrada parece bastante complicado. En primer lugar observemos que si una cara tiene x aristas, rodeándola habrá x caras. Entonces, si el poliedro tiene n caras, habrá una que tenga el máximo número de aristas. Este máximo no puede ser n porque si fuera así de esa cara saldrían n caras y el poliedro tendría $n+1$ caras. Luego, el máximo número posible de aristas que puede tener una cara es $n-1$. Aplicando ahora el principio del palomar, tenemos $n-1$ números posibles de aristas en una cara ("huecos") y n caras en total ("palomas"). Por lo tanto, al menos dos caras tienen el mismo número de aristas.

En realidad el resultado es más fuerte porque el razonamiento anterior supone que el número de aristas que tiene cada cara es $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$. Pero el 1 y el 2 no son válidos, luego el número de "huecos" es $n-3$ y, así, hay tres "palomas" que tienen que entrar por "huecos" ya usados, para lo que existen, claro está, diferentes combinaciones.

Bibliografía.

Francisco Martín Casalderrey. "Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento Italiano". Ed. Nivola. Madrid. 2000.

Zbigniew Michalewicz y David B. Fogel. "How to Solve it: Modern Heuristics**".**
Ed. Springer. 3ª Edición. Berlín, 2002.

José M. Pichel. "Requeteoremas: reinventando teoremas de Geometría con Cabri II". Revista SUMA. Nº 36. 2001.

Norma C. Presmeg. "Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos" (Traducción de Julio Sancho). Revista SUMA. Nº 32. 1999.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk. "History of Mathematics". December 2000.