Cotas para la Regularidad de un Ideal de Retículo

E. Briales Morales P. Pisón Casares A. Vigneron Tenorio

Octubre de 2000

Abstract

Calculamos cotas para los grados de las sicigias de un ideal de retículo y en el caso homogéneo de su regularidad. Las cotas están explicitadas en función de los generadores del semigrupo asociado, y son símplemente exponenciales en el número de rayos extremales del cono asociado.

Palabras clave: COMPLEJOS SIMPLICIALES, HOMOLOGÍA REDUCIDA, IDEAL DE RETÍCULO, SICIGIAS, RESOLUCIÓN LIBRE MINIMAL, REGULARIDAD

Introducción

Pueden considerarse clásicos los ejemplos de ideales binomiales de Mayr y Meyer [9] donde el crecimiento de los grados de los polinomios alcanzan el doblemente exponencial en función del número de variables. En [2] pueden encontrarse una versión más algebraica de tales ejemplos, así como el mismo resultado para las sicigias.

Podemos considerar también como clásico el resultado que asegura que para la clase de ideales tóricos este grado es a lo sumo símplemente exponencial en el número de variables (ver [12]).

Las técnicas desarrolladas en [13] (ver también [10] y [7]), permiten acotar en el caso de ideales de retículos dichos grados, y en el caso homogéneo, la regularidad. Estas cotas están explicitadas en función de los generadores del semigrupo asociado. Son símplemente exponenciales en el número de generadores del semigrupo, o lo que es lo mismo, en el número de variables. Concretamente, en el exponente aparece $d_i = \begin{pmatrix} h \\ i+1 \end{pmatrix}$ para una i-sicigia, y en el caso de la regularidad, aparece $c = \begin{pmatrix} h \\ \lfloor \frac{h}{2} \rfloor \end{pmatrix}$, siendo h el número de variables.

La novedad en este artículo consiste en obtener nuevas cotas (proposición 11 y teorema 13) que, aunque son de la misma naturaleza que las anteriores, son símplemente exponenciales en el número de rayos extremales del cono asociado.

1 Ideales de Retículos

Sea k un cuerpo conmutativo y $R = k[X_1, \ldots, X_h]$ el anillo de polinomios en h indeterminadas. Un ideal I de R se dice que es un ideal de retículo si existe un retículo $\mathcal{L} \subset \mathbf{Z}^h$, tal que $I = \langle \mathbf{X}^{u^+} - \mathbf{X}^{u^-} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{L} \rangle$, donde $u = u^+ - u^-$ con $u^+, u^- \in \mathbf{N}^h$, y $\mathrm{supp}(u^+) \cap \mathrm{supp}(u^-) = \emptyset$. Equivalentemente ([14]), si I es el ideal de un semigrupo S cancelativo, conmutativo, con elemento neutro y generado por h elementos. Si representamos al álgebra del semigrupo por $k[S] = \bigoplus_{m \in S} k\chi^m$, $(\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'})$, esto quiere decir que existe $\Lambda = \{n_1, \ldots, n_h\}$ conjunto generador de S de forma que el homomorfismo de $k-$álgebras $\varphi_0 : R \longrightarrow k[S]$ definido por $\varphi_0(X_i) = \chi^{n_i}$, tiene como núcleo $\ker(\varphi_0) = I$. Notar que al ser φ_0 sobreyectivo, se tiene que $k[S]$ es isomorfo a R/I.

La equivalencia anterior puede comprobarse de la siguiente forma:

- partiendo de $\mathcal{L}$, se construye $S \subset \mathbf{Z}^h/\mathcal{L}$, el semigrupo generado por $\{e_1 + \mathcal{L}, \ldots, e_h + \mathcal{L}\}$, donde los e_i son los vectores unitarios de $\mathbf{N}^h$;
- partiendo de S se considera el retículo de la relaciones de sus generadores, es decir, $\mathcal{L} = \{u = (u_1, \ldots, u_h) \in \mathbf{Z}^h | \sum u_i n_i = 0\}$.

Observar que si denotamos $G(S)$ al menor grupo que contiene a S, podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $G(S) \simeq \mathbf{Z}^d \oplus \mathbf{Z}/a_1\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}/a_s\mathbf{Z}$, con $a_i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ para $1 \leq i \leq s$. Denotaremos por π a la proyección sobre las primeras d coordenadas. El siguiente resultado caracteriza cuando el ideal I es homogéneo.

Proposición 1 *[6, Proposición 17] I es homogéneo para la graduación natural si y sólo si $\exists \mathbf{w} \in \mathbf{Q}^d$ tal que $\mathbf{w} \cdot \pi(n_i) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, h$.*

Por otro lado, I siempre es homogéneo para la graduación sobre R que asigna el $S-$grado n_i a la variable X_i. Para ver esto, basta considerar en $k[S]$ la graduación natural que hace a φ_0 un morfismo $S-$graduado de grado 0. Por tanto, su núcleo I es $S-$graduado.

Exigiremos además la condición $S \cap (-S) = (0)$ sobre el semigrupo, que es equivalente a la condición $\mathcal{L} \cap \mathbf{N}^h = (0)$ sobre el retículo. Esta propiedad garantiza un lema de Nakayama para $S-$graduaciones ([3]), que nos asegura la existencia de la resolución libre minimal, única salvo isomorfismos. Denotaremos a tal resolución

$$0 \to R^{b_{h-1}} \xrightarrow{\varphi_{h-1}} \cdots \to R^{b_2} \xrightarrow{\varphi_2} R^{b_1} \xrightarrow{\varphi_1} R \xrightarrow{\varphi_0} k[S] \to 0,$$

y $N_i = \ker(\varphi_i)$ al $i-$ésimo módulo de sicigias $0 \leq i \leq h-1$ $(N_0 = I)$. Esta resolución es $S-$graduada. En el caso en que el ideal de retículo sea homogéneo para la graduación natural, la condición $S \cap (-S) = (0)$ se tiene asegurada ([6, Lema 18]).

Consideramos el $\mathbf{Q}-$espacio vectorial $V = G(S) \bigotimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ y sea $C(S)$ el cono generado por $\bar{S}$, la imagen de S en V. La condición $S \cap (-S) = (0)$, asegura que $C(S)$ es fuertemente convexo, así f, número de rayos extremales de $C(S)$, verifica que $f \geq d = \dim S = \mathrm{rank}\ (G(S))$. En estas condiciones, existe $E \subset \Lambda$ con $\sharp E = f$, y tal que $C(E) = C(S)$. Sea $A = \Lambda \setminus E, \sharp A = h - f = r$.

Para cada $m \in S$ definimos los complejos simpliciales:

$$\Delta_m = \{F \subset \Lambda \quad | \quad m - n_F \in S\} \quad \text{y} \quad T_m = \{F \subset E \quad | \quad m - n_F \in S\}$$

donde $n_F = \sum_{n \in F} n$ y $n_\emptyset = 0$.

Vamos a denotar por $\widetilde{H}_i(\bullet)$ a la $i-$ésima homología reducida de un complejo simplicial. Los siguientes subconjunto de S : $S(i) = \{m \in S \ \ | \ \ \widetilde{H}_i(\Delta_m) \neq 0\}, \ h-2 \geq i \geq 0$, y $D(i) = \{m \in S \ \ | \ \ \widetilde{H}_i(T_m) \neq 0\}, \ f-2 \geq i \geq -1$, están relacionados con los grados de las sicigias minimales de I. Concretamente, $S(i)$ coincide con los $S-$grados de las $i-$sicigias minimales ([4]).

Por otra parte, denotando por

$$C_i = \{m \in S \mid m = \overline{m} + n_F, \ \text{con } \overline{m} \in D(t) \text{ y } F \subset A, \sharp F = i - t, \ \text{para algún } t \geq -1\},$$

se tiene que $S(i) \subset C_i$ (ver [8]).

En [13] (ver también [10] y [7]) el estudio de la propiedad $\widetilde{H}_i(\Delta_m) \neq 0$ permite obtener el conjunto $S(i)$ asociando a cada $F \subset \Lambda$ con $\sharp F \geq i+2$ varios sistemas lineales diofánticos. Las bases de Hilbert de estos sistemas conducen hasta los elementos de $S(i)$. Más aún, permiten obtener cotas de los grados de las sicigias así como de la regularidad en el caso homogéneo.

En [6] estas técnicas son extendidas para calcular los conjunto $D(i)$. Pasamos ahora a describirlas, lo que nos permitirá en las dos secciones siguientes dar nuevas cotas que mejoran las anteriores. Empecemos por notar que $D(-1) = \{q \in S \quad | \quad q - e \notin S, \forall e \in E\}$. Este conjunto, denotado por Q, suele llamarse conjunto de Apery de S relativo a E, pues generaliza el concepto empleado en semigrupos numéricos ([1]). A partir de ahora vamos a considerar que $f - 2 \geq i \geq 0$.

Definición 2 *Sea $F \subset E$. Diremos que $\tau = \{F_1, \ldots, F_t\}$ es una $i-$triangulación de F si $\sharp F_j = i+1, \ \forall j = 1, \ldots, t$, y $F = \bigcup_{j=1}^t F_j$. Si además se verifica que $F_j \in T_m$, $\forall j = 1, \ldots, t$, y $F \notin T_m$, diremos que τ es una $i-$triangulación de F en T_m.*

Sea $\mathcal{G}$ la matriz que tiene por columnas los generadores de S elegidos, $\mathcal{G} := (n_1|\ldots|n_h) \in \mathcal{M}_{(d+s)\times h}(\mathbf{Z})$, considerando los n_i como elementos en $\mathbf{Z}^{d+s}$, y sea

$$\mathcal{G}(t) := \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{G} & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G} & -\mathcal{G} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G} & -\mathcal{G} & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \mathcal{G} & -\mathcal{G} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(d+s)(t-1)\times ht}(\mathbf{Z}).$$

Consideremos $F \subset E$, $\tau = \{F_1, \ldots, F_t\}$ una i-triangulación de F, y denotemos por $e_{F_l} \in \mathbf{N}^h$ el vector con todas sus coordenadas nulas salvo aquellas indicadas en el conjunto F_l. Sea $e_\tau := (e_{F_1}, \ldots, e_{F_t}) \in \mathbf{N}^{ht}$ y sea

$$R_\tau := \{\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)}) \in \mathbf{N}^{ht} \quad | \quad \mathcal{G}(t)\alpha = 0 \quad , \alpha \gg e_\tau\},$$

donde $\gg$ es el orden parcial natural en $\mathbf{N}^{ht}$. Nótese que si $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)}) \in R_\tau$, entonces se tiene que $\mathcal{G}\alpha^{(1)} = \cdots = \mathcal{G}\alpha^{(t)} = m \in S$ para algún m. Para pasar del conjunto R_τ al semigrupo definimos

$$\Sigma R_\tau := \{m \in S \;\;|\;\; m = \mathcal{G}\alpha^{(1)}, \text{ para algún } \alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(t)}) \in R_\tau\}.$$

Es bien conocido que $\mathcal{H}R_\tau := \{\alpha \in R_\tau \;\;|\;\; \alpha \text{ es minimal para } \ll\}$ es finito, y por lo tanto, el conjunto $\Sigma\mathcal{H}R_\tau := \{m \in S \;\;|\;\; m = \mathcal{G}\alpha^{(1)}, \alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(t)}) \in \mathcal{H}R_\tau\}$, es finito.

Definamos en S el orden parcial $m >_Q m'$ si $m - m' \in S \setminus Q$. Además, dado $H \subset S$, diremos que $m \in H$ es $Q-$minimal en H si $m \geq_Q m'$, con $m' \in H$, tenemos que $m = m'$. Sea $M_\tau := \{m \in \Sigma R_\tau \;\;|\;\; m \text{ es } Q\text{−minimal en } \Sigma R_\tau\}$.

Lema 3 *([6]) En las condiciones anteriores, $M_\tau \subset \Sigma\mathcal{H}R_\tau + Q$. En particular, M_τ es finito.*

Proposición 4 *[6, Proposición 11] Si $m \in D(i)$, entonces existe $\tau = \{F_1, \ldots, F_t\}$ $i-$triangulación de $F = \cup_{j=1,\ldots,t} F_j$ tal que $m \in M_\tau$.*

Del resultado anterior, llamando $M'_\tau := \{m \in M_\tau | F \notin T_m\}$, y $M_i(F) := \bigcup_\tau M'_\tau$, obtenemos el siguiente teorema, que da un algoritmo para calcular los conjuntos $D(i)$ (ver [6, Remark 12]).

Teorema 5

$$D(i) \subset \bigcup_{F \subset E,\ \sharp F \geq i+2} M_i(F).$$

2 Grados de las sicigias

Usaremos las siguientes notaciones:

- Si $x \in \mathbf{Z}^s$, $||x||_1 := \sum_{j=1}^{s} |x_j|$.
- Si $L \subset \mathbf{N}^s$ $\mathcal{H}L := \{x \in L - \{0\} \mid x \text{ es minimal para } \ll\}$ si $L \neq \{0\}$ y $\mathcal{H}\{0\} := \{0\}$.
- Si M es una matriz entera
  - $||M|| := \sup_l \sum_j |a_{lj}|$, es decir el máximo de la norma 1 de sus vectores filas;
  - $\mathcal{H}(M) := \mathcal{H}\{x \in \mathbf{N}^s \;\;|\;\; Mx = 0\}$(Base de Hilbert del sistema).

El siguiente resultado de Pottier ([11]) nos permitirá acotar la norma 1 de los elementos de la base de Hilbert de un sistema lineal diofántico.

Teorema 6 *([11]) Si $x \in \mathcal{H}(M)$ entonces $||x||_1 \leq (1 + ||M||)^s$, donde $s = rank(M)$.*

Supondremos por comodidad de notación que $E = \{n_1, \ldots, n_f\}$ y $A = \{n_{f+1}, \ldots, n_h\}$. Por ser $C(E) = C(S)$, para cada j, $f+1 \leq j \leq h$, existe $q_j \in \mathbf{N}$ tal que $q_j n_j = \sum_{i=1}^{f} \beta_i^j n_i$, donde $\beta_i^j \in \mathbf{N}$. De esta forma, si denotamos $\mathcal{G}_j$ a la matriz

$$\mathcal{G}_j := (n_1|\cdots|n_f| - n_j),$$

tendremos que $(\beta_1^j, \ldots, \beta_f^j, q_j) \in \mathbf{N}^{f+1}$ es una $\mathbf{N}$-solución del sistema diofántico en congruencia $\mathcal{G}_j x = 0$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicha $\mathbf{N}$-solución está en su base de Hilbert.

Denotemos por $\tilde{\mathcal{G}_j} := (\mathcal{G}_j|T)$, siendo

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ a_1 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & -a_3 & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a_s & -a_s \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que existe $\delta_j \in \mathbf{N}^{2s}$ tal que $(\beta_1^j, \ldots, \beta_f^j, q_j, \delta_j)$ está en la base de Hilbert del sistema (ya sin congruencias) $\tilde{\mathcal{G}}_j x = 0$. Así, usando Teorema 6, se tiene que:

$$q_j \leq ||(\beta_1^j, \ldots, \beta_f^j, q_j, \delta_j)||_1 \leq (1 + ||\tilde{\mathcal{G}}_j||)^{(d+s)} \leq (1 + 2\max_l |a_l| + ||\mathcal{G}||)^{(d+s)} \qquad (1)$$

Esto nos permite probar el siguiente resultado.

Lema 7 *Si $m \in Q$, entonces $m = \mathcal{G}x$ con $x \in \mathbf{N}^h$ verificando que*

$$||x||_1 \leq r\,(1 + 2\max |a_j| + ||\mathcal{G}||)^{(d+s)} - 1.$$

Demostración: Si $m \in Q$ se tiene que verificar que $m = \sum_{j=f+1}^{h} \alpha_j n_j$, con $\alpha_j < q_j$, para todo j, $f+1 \leq j \leq h$. Entonces, $||\alpha||_1 \leq (h-f)\max_j(q_j) - 1$. Basta ahora usar la ecuación (1) y que $r = h - f$. ■

Sea $F \subset E$ y $\tau = \{F_1, \ldots, F_t\}$ una i-triangulación de F en T_m tal que $m \in \Sigma\mathcal{H}R_\tau$. Entonces, existe $\alpha \in \mathcal{H}R_\tau$ tal que $m = \mathcal{G}\alpha^{(1)}$, donde $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)})$.

Notar que $\alpha \in \mathcal{H}R_\tau$ si y sólo si $\alpha - e_\tau \in \mathcal{H}\{\beta \in \mathbf{N}^{ht} \mid \mathcal{G}(t)(\beta + e_\tau) = 0\}$.

Sea $\tilde{T}$ la matriz

$$\begin{pmatrix} T & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & T & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(d+s)(t-1)\times 2s(t-1)}(\mathbf{Z}).$$

Se verifica que existe λ, tal que $(\alpha - e_\tau, \lambda)$ está en la base de Hilbert del sistema (ya sin congruencias) $(\mathcal{G}(t)|\tilde{T})(\beta,\lambda) = -\mathcal{G}(t)e_\tau$.

Entonces, denotando $\mathcal{G}_\tau := (\mathcal{G}(t)|\tilde{T}|\mathcal{G}(t)e_\tau)$, se tiene que $(\alpha - e_\tau, \lambda, 1) \in \mathcal{H}(\mathcal{G}_\tau)$. Sea $d'_i := \left(\begin{array}{c} f \\ i+1 \end{array} \right)$.

Lema 8 *Con las notaciones anteriores, se tiene que*

$$||(\alpha - e_\tau, \lambda, 1)||_1 \leq (1 + 2\max|a_j| + 4||\mathcal{G}||)^{(d+s)(d'_i-1)}.$$

Demostración: Al ser $(\alpha - e_\tau, \lambda, 1) \in \mathcal{H}(\mathcal{G}_\tau)$, por el teorema 6, sabemos que $||(\alpha - e_\tau, \lambda, 1)||_1 \leq (1+||\mathcal{G}_\tau||)^{(d+s)(t-1)}$. Observar que $t = \sharp\tau \leq \left(\begin{array}{c} \sharp F \\ i+1 \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{c} f \\ i+1 \end{array} \right) = d'_i$.

De otro lado tenemos que

$$||\mathcal{G}_\tau|| \leq ||\mathcal{G}(t)|| + ||\tilde{T}|| + ||\mathcal{G}(t)e_\tau|| \leq 2||\mathcal{G}|| + 2\max|a_j| + 2||\mathcal{G}|| = 4||\mathcal{G}|| + 2\max|a_j|$$

Aplicando las cotas anteriores, llegamos a que

$$||(\alpha - e_\tau, \lambda, 1)|| \leq (1+||\mathcal{G}_\tau||)^{(d+s)(t-1)} \leq (1+||\mathcal{G}_\tau||)^{(d+s)(d'_i-1)} \leq (1+4||\mathcal{G}||+2\max|a_j|)^{(d+s)(d'_i-1)}.$$

∎

Lema 9 *Sea $m \in \Sigma\mathcal{H}R_\tau$, donde $\tau = \{F_1, \ldots, F_t\}$ es una i-triangulación de $F = \cup_{i=1}^t F_i$ en T_m. Entonces, $m = \mathcal{G}x$ con $||x||_1 \leq (1 + 2\max|a_j| + 4||\mathcal{G}||)^{(d+s)(d'_i-1)} + (i+1)d'_i - 1$.*

Demostración: Al estar $m = \mathcal{G}x \in \Sigma\mathcal{H}R_\tau$, tenemos que $x = \alpha^1$ con $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)}) \in \mathcal{H}R_\tau$. Utilizando el lema 8 es suficiente notar que

$$\begin{array}{rcl} ||x||_1 & \leq & ||\alpha^{(1)}||_1 \leq ||\alpha||_1 = ||\alpha + e_\tau - e_\tau||_1 \\ & \leq & ||\alpha - e_\tau||_1 + ||e_\tau||_1 \leq ||(\alpha - e_\tau, \lambda, 1)||_1 - 1 + (i+1)t \\ & \leq & (1 + 2\max|a_j| + 4||\mathcal{G}||)^{(d+s)(d'_i-1)} + (i+1)d'_i - 1 \end{array}$$

∎

Corolario 10 *Si $m \in D(i)$, $-1 \leq i \leq f-2$, entonces $m = \mathcal{G}x$ con*

$$||x||_1 \leq r\,(1 + 2\max|a_j| + ||\mathcal{G}||)^{(d+s)} + (1 + 2\max|a_j| + 4||\mathcal{G}||)^{(d+s)(d'_i-1)} + (i+1)d'_i - 1.$$

Demostración: Si $i = -1$ basta aplicar el lema 7. Supongamos entonces que $0 \leq i \leq f-2$. Existe $\tau = \{F_1, \ldots, F_t\}$ una $i-$triangulación de $F = \cup_{i=1}^t F_i$ en T_m verificándose que $m \in M_\tau \subset \Sigma\mathcal{H}R_\tau + Q$, proposición 4. Basta ahora aplicar los lemas 9 y 7. ∎

Proposición 11 *Sea $m \in S$ el grado de una i-sicigia minimal, $0 \leq i \leq h-2$. Entonces, $m = \mathcal{G}x$ con*

$$||x||_1 \leq r\,(1 + 2\max|a_j| + ||\mathcal{G}||)^{(d+s)} + (1 + 2\max|a_j| + 4||\mathcal{G}||)^{(d+s)(c'-1)} + (i+1)(c'+1) - 1,$$

donde $c' = \left(\begin{array}{c} f \\ \lfloor f/2 \rfloor \end{array} \right)$.

Demostración: Usando que $m \in S(i) \subset C_i$, tenemos que $m = \overline{m} + n_F$, donde $\overline{m} \in D(t)$ para algún t, $-1 \leq t \leq \min\{i, f-2\}$, y $F \subset A$, con $\sharp F = i - t$. Así, $m = \mathcal{G}\alpha$, $\alpha = \overline{\alpha} + e_F$, y $\overline{m} = \mathcal{G}\overline{\alpha}$. Usando el corolario 10 obtenemos

$$||\alpha||_1 \leq r\,(1 + 2\max|a_j| + ||\mathcal{G}||)^{(d+s)} + (1 + 2\max|a_j| + 4||\mathcal{G}||)^{(d+s)(d'_t - 1)} + (t+1)d'_t - 1 + (i-t).$$

Basta ahora tener en cuenta que tanto $t+1$ como $i-t$ son menores o iguales que $i+1$, y además, $c' \geq d_t$ $\forall t = -1, \ldots, \min\{i, f-2\}$. ■

NOTA: Observar que la cota anterior es símplemente exponencial en f, el número de rayos extremales del cono.

3 Regularidad

Supondremos que I es homogéneo para la graduación natural. Observar que entonces si $m \in S$, y $m = \sum \alpha_i n_i$, podemos definir $||m|| = ||\alpha||_1$.

Es bien conocido, (ver [2] por ejemplo) que $reg(I) = \max_{0 \leq i \leq h-2}\{t_i - i\}$ donde $t_i = \max\{||m|| \mid m \in S(i)\}$. Usando nuevas técnicas homológicas se puede obtener otra fórmula.

Teorema 12 *([6, Teorema 19])*

$$reg(I) = max_{-1 \leq i \leq f-2}\{u_i - i\}, \; donde \; u_i = \max\{||m|| \mid m \in D(i)\}.$$

Podemos dar ahora la cota de la regularidad.

Teorema 13

$$reg(I) \leq r\,(1 + 2\max|a_j| + ||\mathcal{G}||)^{(d+s)} + (1 + 2\max|a_j| + 4||\mathcal{G}||)^{(d+s)(c'-1)} + (f-1)(c'-1),$$

donde $c' = \begin{pmatrix} f \\ \lfloor f/2 \rfloor \end{pmatrix}$.

Demostración: Usando la fórmula del teorema 12, el resultado sigue del corolario 10 teniendo en cuenta que $i+1 \leq f-1$, y que $c' \geq d_i$ $\forall i = -1, \ldots, f-2$. ■

NOTA: Observar que la cota anterior es símplemente exponencial en f, el número de rayos extremales del cono.

Referencias

[1] R.APERY, Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques. *C.R.Acad.Sci.Paris* **222** (1946), 1198-1200.

[2] D.BAYER, B. STILLMAN, On the complexity of Computing Syzygies, *J. Symbolic Computation* **6**, (1988), 135-147.

[3] E. BRIALES, A. CAMPILLO, C. MARIJUÁN, P. PISÓN, Minimal Systems of Generators for Ideals of Semigroups, J. of Pure and Applied Algebra, **124** (1998), 7-30.

[4] E. BRIALES, A. CAMPILLO, C. MARIJUÁN, P. PISÓN, Combinatorics of Syzygies for Semigroup Algebras, Collectanea Mathematica, **49**, 2-3 (1998) 239-256.

[5] E. BRIALES, A. CAMPILLO, P. PISÓN, On the equations defining toric projective varieties. Prepublicaciones del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla, **5**, (2000). (*Proceeding of the Conference on Conmutative Algebra and Algebraic Geometry in Messina, Italy, 1999*)(to appear in Lect. Notes in Pure and Applied Mathematics.)

[6] E. BRIALES, A. CAMPILLO, P. PISÓN, A. VIGNERON, Simplicial Complexes and Syzygies of Lattice Ideals. Prepublicaciones del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla, **6**, (2000)

[7] E. BRIALES, P. PISÓN, A. VIGNERON, The Regularity of a Toric Variety. J. of Algebra, por aparecer.

[8] A. CAMPILLO, P. GIMÉNEZ, Syzygies of affine toric varieties. Journal of Algebra **225**, (2000), 142-161.

[9] E. MAYER, A. MEYER, The Complexity of the Word Problems for Commutative Semigroups and Polinomial Ideals. Advances in Mathematics **46**, (1982), 305-329.

[10] P. PISÓN, A. VIGNERON, First Syzygies of Toric Varieties and Diophantine Equations in Congruence. Comm. in Algebra, por aparecer.

[11] L. POTTIER, Minimal solutions of linear diophantine systems: bounds and algorithms. *Proceedings of the Fourth International Conference on Rewriting Techniques and Applications,* Italy 1991, 162-173.

[12] B. STURMFELS, Gröbner bases of toric varieties. Tôhoku Math. Journal **43**, (1991), 249-261.

[13] A. VIGNERON TENORIO, Álgebra de Semigrupos y Aplicaciones. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (2000).

[14] A. VIGNERON-TENORIO, Semigroup Ideals and Linear Diophantine Equations. *Linear Algebra and its Applications,* **295** (1999), 133-144.

E. Briales Morales y P. Pisón Casares
Departamento de Álgebra, Facultad de Matemáticas, Apartado 1160, 41080 Sevilla.
E-mail: {*emilio,pilar*}*@algebra.us.es*
Parcialmente financiados por el Plan Propio de Investigación la Universidad de Sevilla (75403699-98-191).

A. Vigneron Tenorio
Departamento de Matemáticas, E.U.E. Empresariales, Por-Vera 54, 11403 Jerez de la Frontera (Cádiz).
E-mail: *alberto.vigneron@uca.es*
Parcialmente financiado por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Sevilla (75403699-98-191).