Metodología del Álgebra y la Geometría
en la Enseñanza Secundaria
Metodología de los Recursos en la Enseñanza
de las Matemáticas en Secundaria

Medición del radio de la Tierra

Facultad de Matemáticas
26 de marzo de 2009

Figura 1: Eratóstenes

Eratóstenes (Cirene, 276 a.C. - Alejandría, 194 a.C.) fue un célebre matemático, astrónomo y geógrafo griego que observó cómo en Siena (actual Assuan, situada sobre el Trópico de Cáncer) el día del solsticio de verano los rayos del Sol caían verticalmente iluminando el fondo de un pozo. Sin embargo, en Alejandría, ese mismo día, los rayos caían de forma oblicua (ver figura 2).

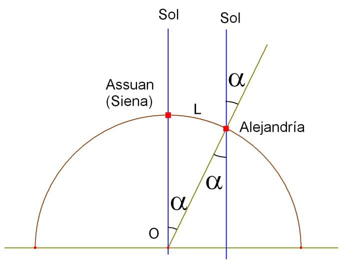

Figura 2: Siena-Alejandría

Siena y Alejandría están situadas en el mismo meridiano por lo que el ángulo de inclinación de los rayos en Alejandría coincidía en ese momento con la medida angular del arco de meridiano entre ambas ciudades, esto es, con la diferencia entre sus latitudes.
Si conocemos la distancia, L, entre las dos ciudades, sólo falta hacer el siguiente razonamiento:

$$\begin{array}{ccc} 360 & \leftrightarrow & 2\pi r \\ \alpha & \leftrightarrow & L \end{array}$$

y, de aquí,

$$r = \frac{360L}{2\pi\alpha}$$

Eratóstenes calculó la inclinación de los rayos midiendo la sombra de un palo vertical en el momento del paso del Sol por el meridiano (mínima longitud de la sombra) y resolviendo por Trigonometría (ver figura 3). La distancia entre los dos puntos la obtuvo pagando a un hombre para que la midiese a pie[1].

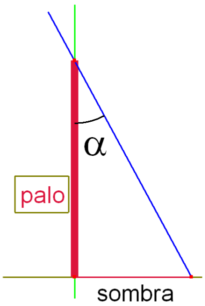

Figura 3: Ángulo de inclinación de los rayos solares

$$\tan\alpha = \frac{sombra}{palo}$$

Pero si los puntos están situados por encima del trópico de Cáncer (o por debajo del trópico de Capricornio) en ningún momento los rayos del Sol caerán verticalmente como pasaba en Siena. Sin embargo, podemos reproducir el procedimiento de Eratóstenes con algunas modificaciones si los dos lugares están situados sobre el mismo meridiano.

Coordenadas ecuatoriales

Para fijar la posición de un astro, en nuestro caso el Sol, en la esfera celeste se pueden utilizar diferentes sistemas de referencia. Si consideramos el plano del ecuador y el eje de los polos se obtienen las *coordenadas ecuatoriales*, que se llaman **ascensión recta** (AR) y **declinación** (δ) (ver figura 4).

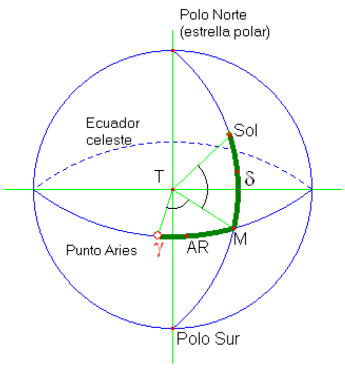

Figura 4: Coordenadas ecuatoriales

La *ascensión recta* y la *declinación* de un astro son las coordenadas equivalentes a la *longitud* y *latitud* de un lugar en la Tierra. La ascensión recta se mide sobre el ecuador, en sentido antihorario

[1]Los resultados fueron 7° para el ángulo y 800 Km para la distancia, resultando una longitud del radio terrestre de 6540 Km.

y tomando como origen el punto Aries (γ) que es el punto en que la eclíptica corta al ecuador (*equinoccio de Primavera*). Ese día el Sol recorre el ecuador y su declinación es cero.

Cada día el Sol recorre un paralelo[2] aumentando su declinación hasta llegar al trópico de Cáncer donde alcanza su valor máximo, 23°27′N, (*solsticio de Verano*). A partir de ese momento el Sol describe paralelos disminuyendo su declinación hasta recorrer de nuevo el ecuador en el *equinoccio de Otoño*. La declinación ahora aumenta hacia el Sur hasta los 23°27′S (*solsticio de Invierno*) para volver a subir de nuevo hasta el ecuador.

Inclinación del Sol y latitud del lugar

En la figura 5 se observa la relación que existe entre la inclinación de los rayos solares, la latitud del lugar y la declinación del Sol el día de la observación.

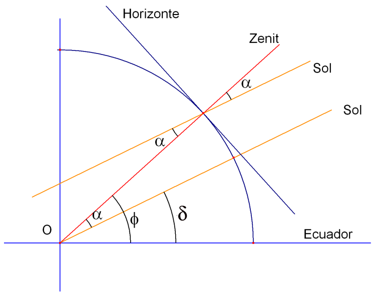

Figura 5: Relación entre inclinación de los rayos y la latitud del lugar

P	Punto de la superficie terrestre (lugar de la observación)
α	Ángulo de los rayos del Sol con la vertical del lugar
$90 - \alpha$	Altura del Sol sobre el horizonte
ϕ	Latitud del lugar
δ	Declinación del Sol en el momento de la observación

Como puede verse, la relación que se verifica es:

$$\phi = \delta + \alpha$$

La declinación del Sol en un determinado momento no depende de las latitudes de los lugares de observación. Si éstos están situados en el mismo meridiano, al paso del Sol, la declinación es la misma. Por lo tanto, se verifica:

$$\phi_1 = \delta + \alpha_1$$
$$\phi_2 = \delta + \alpha_2$$

y, entonces,

$$\phi_1 - \phi_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

[2]En este sistema de referencia se considera el movimiento aparente del Sol, es decir, la Tierra está fija en el centro y el Sol gira alrededor de ella.

es decir, la diferencia de latitud de los dos lugares coincide con la diferencia entre los ángulos de inclinación de los rayos solares, que se calculan en la experiencia. La distancia (sobre el meridiano) entre los dos puntos la obtenemos sobre un mapa a escala y, ahora, el cálculo ya es como antes:

$$r = \frac{360L}{2\pi(\phi_1 - \phi_2)} = \frac{360L}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Si los puntos no están situados en el mismo meridiano, las mediciones no se hacen en el mismo instante. Sin embargo, la declinación del Sol se mantiene prácticamente constante entre las dos observaciones. Por lo tanto se puede también aplicar la fórmula anterior [3].

En la experiencia del día 26 se calculará la inclinación de los rayos del Sol en cada lugar y la distancia al paralelo de Madrid, lugar en el que se centralizarán todos los datos.

Cálculo efectivo de la inclinación de los rayos solares

Para calcular el ángulo α de la figura 3 situaremos un palo vertical (*gnomon*) de 1 m de altura en un lugar soleado (parking) y colocaremos en el plano horizontal (suelo) un papel grande de envolver en el que iremos marcando los extremos de la sombra del palo (ver figura 6).

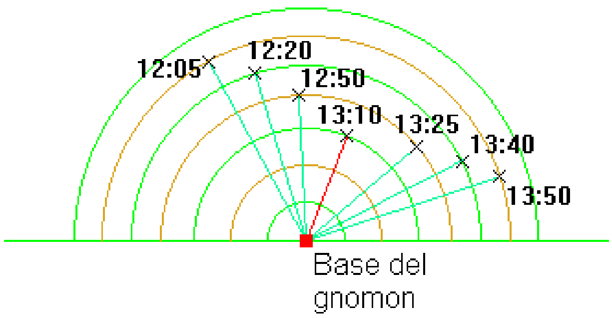

Figura 6: Sombra del gnomon

El paso del Sol por el meridiano marca las 12:00 horas solares, pero como la hora oficial es una más, haremos los cálculos en un entorno de las 13:00 horas. Desde las 12:00 empezaremos a marcar la sombra del palo en el papel cada cinco o diez minutos. Dibujaremos semicírculos concéntricos de distintos radios con centro en la base del gnomon. Aproximadamente, hacia la una de la tarde, la sombra alcanzará su menor longitud; en ese momento el Sol está pasando por el meridiano y es cuando hay que dividir la longitud de la sombra por la longitud del palo:

$$\alpha = \arctan \frac{sombra}{palo}$$

También puede aprovecharse el momento para trazar en el suelo la *meridiana*, intersección del plano del horizonte con el plano del meridiano del lugar, que marca la dirección Norte-Sur. Para ello basta trazar la mediatriz de un segmento que una dos marcas situadas en el mismo semicírculo.

[3] La diferencia que pudiera existir entre las declinaciones es irrelevante si tenemos en cuenta el error que se comete en el uso de los aparatos de medida, una cinta métrica que aproxima al milímetro, como máximo.