

TEMA 10: GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA RECTA. DISTANCIAS.

“Matemática universal: la que contiene todo aquello por lo que otras ciencias se llaman parte de la Matemática” (Descartes)

1. Justificación

La justificación de la unidad la podemos hacer desde dos puntos de vista:

- Desde la propia estructura interna ya que no es posible el estudio de nuevos conceptos sin tener adquiridos los conceptos anteriores que le sirven de base. Y no sólo para la asignatura de matemáticas, sino que las matemáticas en bachillerato proporcionan herramientas y estrategias básicas para otras materias.
En el caso concreto de esta unidad, los conceptos en ella estudiados darán a los alumnos una visión geométrica que les ayudará a resolver problemas o ejercicios de posteriores estudios.
- Valor formativo: Contribuye a la mejora de las estructuras mentales del alumno y a la adquisición de cualidades como la constancia, la perseverancia, la creatividad, así como una mayor capacidad para adquirir una amplia gama de saberes y habilidades.

Referente a la **relación de esta unidad con el currículo**, los alumnos han tratado durante toda la E.S.O. tanto con la geometría sintética como con la analítica. En concreto, en el primer ciclo de la E.S.O. han estudiado el paralelismo y perpendicularidad de rectas y planos de manera sintética y analíticamente se han encontrado con las ecuaciones de semirrectas que pasan por el origen o paralelas a los ejes. En el segundo ciclo amplían lo anterior con ecuaciones de la recta en la forma punto-pendiente. Ya en bachillerato nos encontramos que los alumnos estudian la geometría plana en 1º y la geometría espacial en 2º, todo esto en la modalidad de CNS, en la de CCSS no tienen ningún bloque de geometría.

Estamos en el segundo bloque del curso dedicado a la Geometría. En él, los alumnos han estudiado toda la trigonometría y estudio de los triángulos, y han iniciado el estudio de los vectores. En esta unidad tratamos en profundidad las diferentes ecuaciones de la recta, su posición relativa, etc. Para terminar el bloque, estudiaremos los números complejos y las cónicas.

2. Objetivos

- Objetivos de etapa

De entre los objetivos que figuran en el decreto 126/1994 (modificado por el 208/2002) nos interesa destacar los que hablan sobre la comprensión y el dominio de conocimientos científicos y tecnológicos, así como sus aplicaciones y situaciones relacionadas con la experiencia cotidiana, personal y social. También hacemos hincapié en el hecho que trata de posibilitar una madurez personal, social y moral que permita actuar de forma responsable y autónoma.

- Objetivos de área

Vienen a cubrir la necesidad de que los alumnos comprendan y sepan utilizar conceptos, procedimientos, estrategias y métodos matemáticos en la interpretación de las ciencias y en actividades cotidianas.

Muy importante es también el uso del lenguaje matemático para expresar situaciones que puedan ser tratadas matemáticamente y la utilización del discurso racional para plantear problemas, justificar procedimientos, etc.

- Objetivos didácticos

- Obtener todas las ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua, general, explícita y punto pendiente.
- Determinar las posiciones relativas de dos rectas en el plano.
- Analizar el ángulo de dos rectas que se cortan.
- Paralelismo y perpendicularidad.
- Determinar distancias en el plano.
- Obtener el vector normal a una recta y la recta normal a una dada.

3. Contenidos

Además de los contenidos transversales que iremos comentando según vayan saliendo en las actividades, los contenidos se dividen en conceptos, procedimientos y actitudes.

- Conceptos

- Ecuaciones de la recta.
- Posiciones relativas de dos rectas.
- Distancias en el plano.
- Ángulo de dos rectas.

- Procedimientos

- Cálculo de puntos de una recta, de su vector director y normal, y de su pendiente a partir de su ecuación en cualquiera de sus formas.
- Obtención de las ecuaciones de una recta a partir de algunos elementos dados, pasando de unas formas a otras.
- Discusión de la posición relativa de dos rectas en el plano resolviendo sistemas y comparando los coeficientes.
- Utilización de la relación de las pendientes de las rectas paralelas y de las perpendiculares.
- Cálculo de la distancia entre dos puntos, entre punto y recta y entre dos rectas paralelas siguiendo un procedimiento geométrico.
- Cálculo del ángulo formado entre dos rectas.

- Actitudes

- Confianza en las propias capacidades para resolver problemas.
- Gusto por la presentación en la resolución de problemas geométricos.
- Valoración del método geométrico para la resolución de problemas.

4. Metodología

Planteamos el desarrollo del tema dividiéndolo en 8 sesiones dependiendo de la evolución del grupo y de las características de los alumnos, en cada una de las cuales la distribución de la clase dependerá de la actividad a realizar. Antes de empezar les repartimos a los alumnos una relación de problemas de donde irán sacando los ejercicios propuestos en cada una de las sesiones.

En general, la metodología a seguir en casi todas las sesiones será la siguiente: Empezaremos planteando una o varias actividades o con explicaciones teóricas con las que introduzcamos los conceptos a tratar en la sesión correspondiente, así como para intentar saber lo que el alumno conoce sobre el tema. Realizaremos a continuación algunos ejercicios donde se traten los contenidos procedimentales relacionados con los conceptos estudiados. Y por último, dejaremos propuestos algunas actividades similares a las realizadas en clase que sacaremos de la relación de problemas que se le entregó al alumno al inicio de la unidad.

5. Actividades

A.General Lectura de dos libros

Al principio del curso, pediremos a los alumnos que hagan grupos de 4 personas. A cada uno de estos grupos se les asignará dos libros (uno en el primer trimestre y otro en el segundo) que tendrán que leer y luego hacer un comentario sobre ellos al resto de la clase.

Los libros propuestos son:

- El diablo de los números.
- El señor del cero.
- Ernesto el aprendiz de matemago.
- Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números.
- Números pares, impares e idiotas.
- Un cuento enmarañado.
- El asesinato del profesor de matemáticas.
- El gran juego.

A.1. Dos puntos determinan una recta

Idea intuitiva de recta, ideas previas de los alumnos. (Preguntas a la clase)

- ¿Cuántos puntos son necesarios para determinar una recta?
- ¿Cuántas rectas pasan por dos puntos? ¿Y por uno? ¿Y por tres?

A.2. Ecuaciones de la recta

Sea $P = (a_1, a_2)$ un punto de la recta, y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ su vector director. Consideramos $X = (x, y)$ un punto genérico de la recta, entonces se tiene que:

$\overline{OX} = \overline{OP} + \lambda \vec{v}$ esto es lo que conocemos como ecuación vectorial de la recta.

1. Escribe la ecuación anterior con coordenadas e iguala coordenada a coordenada. (Ecuaciones paramétricas).
2. El valor de λ que nos da un punto concreto de la recta, ¿es igual para ambas coordenadas? En caso afirmativo, despeja λ de ambas coordenadas e iguala. (Ecuación continua).
 - a) ¿Podemos utilizar esta ecuación para toda recta?
 - b) ¿Qué tipo de rectas no tiene ecuación continua?
3. En la ecuación anterior, opera quitando denominadores. (Ecuación general).
4. Despejar y de la ecuación general. (Ecuación explícita).
¿Qué representa la n en la expresión de la ecuación explícita? (Ordenada en el origen).

A.3. Cálculo de las ecuaciones de una recta

1. Dado un punto y un vector.
2. Dados dos puntos. (siempre llegar a punto y vector)

A.4. Punto y vector

Observando la construcción de las diferentes ecuaciones de la recta, di cómo podemos obtener un punto y el vector director de la recta conocida cada una de las distintas ecuaciones.

TABLA-ESQUEMA**A.5. Obtención de punto y vector**

1. $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{5}$
2. $x+3y-7=0$
3. $y=5x-2$
4. $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{cases}$

A.6. ¿Verdadero o falso?

Los siguientes pares de ecuaciones representan la misma recta:

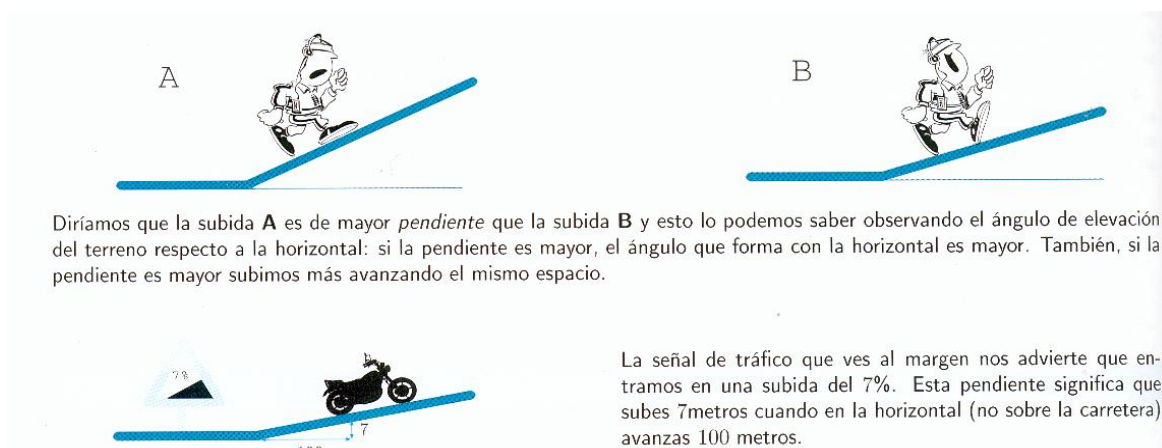
1. $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2}$; $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$
2. $(x, y) = (2, 1) + \lambda(-1, 2)$; $2x - y - 5 = 0$

NOTA: Tarea para casa: realizar las correspondientes actividades de la relación de problemas.

- o Las actividades propuestas están clasificadas según su dificultad para así poder atender a las diferentes necesidades de los alumnos.

A.7. Cuesta arriba

- a) ¿Qué diferencias encuentras entre las dos subidas de la siguiente figura?
- b) ¿Se habrá avanzado sobre la carretera lo mismo en ambos casos si sobre la horizontal se avanzan 100 metros?



- c) ¿Cómo interpretamos la pendiente si la carretera va cuesta abajo?
 d) Hemos visto que la pendiente está relacionada con el ángulo que forma la recta con la horizontal, ¿cómo calcularías dicho ángulo? ($m = \operatorname{tg} \alpha$)

A.8. Ecuación punto-pendiente

- a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) ?

$$(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})$$
 b) ¿Qué expresión obtienes si en lugar de considerar dos puntos de la recta, consideramos un punto (x_1, y_1) y un punto genérico (x, y) ?
 (Ecuación punto-pendiente).
 c) ¿Qué relación ves entre la ecuación punto-pendiente de la recta y su ecuación explícita?

NOTA: Tarea para casa: realizar las correspondientes actividades de la relación de problemas.

- o Las actividades propuestas están clasificadas según su dificultad para así poder atender a las diferentes necesidades de los alumnos.

A.9. Puentes de Sevilla

1. ¿Cuántos puntos tienen en común las rectas que aparecen en las siguientes fotografías?



2. Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas.
 - a) Resolviendo Sistemas.
 - b) Proporcionalidad coeficientes (Explicando el porqué: (-B,A) es el vector).

Con esta actividad estudiamos las distintas posiciones relativas de dos rectas estudiando el número de soluciones del sistema formado por ambas rectas y con el estudio de la proporcionalidad de los coeficientes.

A.10. Estudio de la posición relativa según la pendiente

- a) Representa los siguientes pares de rectas:
 - Un par de rectas paralelas y otro secantes
 En cada uno de los casos, ¿Cuál es la pendiente de cada una de las rectas?, ¿Qué relación hay entre ellas? (las paralelas iguales, secantes distintas)
- b) Consideramos ahora las siguientes rectas (perpendiculares), ¿Qué relación existe entre las pendientes de ambas rectas? ($m_r = \frac{-1}{m_s}$).

A.11. Ángulo entre dos rectas

- a) Dos formas de calcularlo:
 1. Conocidas las pendientes (= tg de los ángulos que forman con la horizontal)

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \right| = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$
 2. Conocidos los vectores directores de ambas rectas: $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$
- b) ¿Qué ángulo forman dos rectas paralelas?, ¿Y dos rectas perpendiculares? (Caracterización perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

NOTA: Tarea para casa: realizar las correspondientes actividades de la relación de problemas.

- Las actividades propuestas están clasificadas según su dificultad para así poder atender a las diferentes necesidades de los alumnos.

A.12. Problemas analítica

- Paralela a otra por un punto
- Perpendicular a otra por un punto
- Por dos puntos
- Con vector y punto...

A.13. Distancias

Sala de informática:

1. Entre dos puntos: $d(A,B)=\|A\bar{B}\|$.

$$\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2. Entre punto y recta: $\text{dist}(P,r)=\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Estas dos fórmulas las vamos a estudiar en la página de descartes. En el caso del punto y la recta, hay una observación (PQ perpendicular a r siempre) que nos da pie a la construcción geométrica del vector PQ cuyo módulo nos da la distancia buscada.

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Geometria_afin_analitica_p_lano_lugares_geometricos/Geometria_4.htm#Distancia%20de%20un%20punto%20a%20una%20recta

3. Entre dos rectas paralelas: Tomando un punto cualquiera de la primera, utilizar cualquiera de los procedimientos del punto 2.

NOTA: Tarea para casa: realizar las correspondientes actividades de la relación de problemas.

- Las actividades propuestas están clasificadas según su dificultad para así poder atender a las diferentes necesidades de los alumnos.

A.14. Taller de matemáticas

Aprovechando la actividad 10 planteada a través de algunos de los puentes de Sevilla, vamos a hacer un trabajo sobre *Matemáticas en la arquitectura*. Tendrá tres puntos a tratar: (los dos primeros como trabajo en grupos de dos que tendrán que entregar al finalizar el bloque de geometría)

- Matemáticas en Sevilla, particularizando en los puentes.
- Matemáticas en otros monumentos (estudio de Calatrava).
- Montaje de exposición de fotos para el día escolar de las matemáticas.

A.15. Esquema final

En esta actividad pediremos a los alumnos que nos hagan un esquema con todo lo tratado en el tema, de manera que no sólo les sirva de resumen, sino que les ayude a clasificar los contenidos desarrollados en la unidad y a diferenciar conceptos y procedimientos.

A.16. Autoevaluación

En la siguiente página web podemos encontrar una serie de preguntas de autoevaluación que nos ayudan a repasar los conceptos tanto de esta unidad como de la anterior.

<http://mimosa.cnice.mecd.es/~clobo/geoweb/geoanaeval.htm>

6. Atención a la diversidad

El tratamiento de la diversidad resulta complejo, no obstante, apuntamos algunas estrategias posibles:

- Actividades de diagnóstico de los conocimientos previos de los alumnos para adecuar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Reforzamiento de lo aprendido antes de continuar.
- Mayor estructuración de las actividades para los alumnos con dificultades y planteamiento más abierto para alumnos de mayor nivel de autonomía en el trabajo.
- Actividades de refuerzo o ampliación según las características de cada alumno.

Actividades de ampliación:

a) Elementos notables de un triángulo: recta de Euler.

Construcción de los elementos de un triángulo **con y sin** Cabri.

<http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/pnotables/puntosnotables.htm>

b) Construcción de rectas paralelas y perpendiculares con Cabri.

<http://mimosa.cnice.mecd.es/~clobo/geoweb/recta2.htm>

7. Evaluación

Haremos dos evaluaciones: a los alumnos y a la propia unidad didáctica.

U.D. Iremos anotando todo lo necesario para analizar si la temporización ha sido la adecuada, si los alumnos han podido seguir el ritmo marcado con las actividades propuestas, etc. Y no sólo para ir cambiando las actividades y la metodología según vayamos viendo el proceso de la unidad, sino también para mejorarla para años sucesivos.

Alumnos: Los criterios de evaluación expresados en el decreto 208/2002 relacionados con el tema estudiado son los siguientes:

- Transcribir una situación real problemática a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de medida de ángulos y longitudes y de resolución de triángulos para encontrar las posibles soluciones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real.

- Organizar y codificar informaciones, seleccionar estrategias, comparándolas y valorándolas, para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, y utilizar las herramientas matemáticas adquiridas.

Concretando estos criterios a nuestra unidad didáctica podemos evaluar los siguientes aspectos:

Criterios generales

- Realizar los ejercicios propuestos en cada sesión.
- Saber trabajar en grupo, se valorará la participación en el grupo de cada alumno, su aportación personal, su contraste de ideas con el resto de compañeros, el respeto mostrado hacia las ideas de los demás, el nivel de integración conseguido, la ayuda dada a compañeros con las ideas menos claras, etc.

Criterios específicos

- Calcular y reconocer las diferentes ecuaciones de una recta.
- Determinar el vector director de una recta.
- Estudiar las posiciones relativas de dos rectas.
- Determinar la distancia entre dos puntos, un punto y una recta y dos rectas paralelas.
- Estudiar el ángulo formado por dos rectas.

Utilizaremos los siguientes instrumentos de evaluación:

- ❖ Observación de las ideas previa en los primeros ejercicios de diagnóstico.
- ❖ Observación de intervenciones en el aula.
- ❖ Valoración de trabajos individuales y colectivos.
- ❖ Preguntas directas en clase.
- ❖ Trabajo diario desarrollado en casa.
- ❖ Resumen actividades, en este caso contendrá las siguientes cuestiones:
 1. Ecuaciones de la recta conocido punto y vector o pendiente y punto.
 2. Un problema analítica: paralela o perpendicular a una dada y punto.
 3. Ángulo de dos rectas.
 4. Distancia entre punto y recta (de dos formas).
 5. Posición relativa de dos rectas.
- ❖ Prueba escrita. (Se realizará conjuntamente con la unidad anterior que trata sobre vectores en el plano).

8. Bibliografía

- Unidad didáctica Santillana servicios educativos y sm.
- Libro 1º bachillerato CCNS ed. La ñ.
- Libro 1º bachillerato CCNS ed. ecir

Y todas las páginas webs que hemos mencionado a lo largo de la unidad.