

# Metodología del Álgebra y la Geometría en la Enseñanza Secundaria

En estas notas vamos a desarrollar diferentes aspectos del papel de las Matemáticas en el contexto educativo.

La Matemática forma parte del patrimonio cultural de la humanidad, ha estado ligada a sus grandes creaciones y constituye uno de los hilos conductores de la historia de las ideas y del pensamiento humano. El conocimiento de sus contenidos y de sus métodos constituye un capítulo importante de la formación cultural y académica de una sociedad moderna.

La historia de la matemática ha de ser un recurso didáctico en su enseñanza. Se trata de situar la aparición de los conceptos en un contexto análogo al que se daba cuando se originaron, o, al menos, presentar a los alumnos aquella situación.

Las Matemáticas conforman un amplio campo de conocimientos que se caracterizan por su naturaleza lógico-deductiva y por su fuerte cohesión interna. Llegar a "saber hacer matemáticas" es un proceso lento, laborioso, cuyo comienzo debe ser una prolongada actividad sobre elementos concretos con objeto de crear intuiciones que son un paso previo al proceso de formulación.

En las Matemáticas de la enseñanza secundaria obligatoria se presentan los contenidos a través de procesos intuitivos. En Bachillerato se parte de las bases asentadas en la enseñanza secundaria obligatoria, y nos apoyamos en ellas para desarrollar la capacidad de análisis y comprensión de la realidad. Por otra parte, se introducen nuevas herramientas matemáticas necesarias para el aprendizaje científico, tanto en el propio Bachillerato como en los estudios posteriores de carácter científico-técnico.

## 1 Matemáticas en la E.S.O.

El tratamiento de la asignatura de Matemáticas en este nivel debe verse bajo una doble perspectiva:

### 1. Formativa.

Se trata de potenciar estructuras intelectuales, generar capacidades científicas tales como observación, interpretación, análisis, síntesis, valoración, etc.

## 2. Instrumental.

Herramienta útil para interpretar, conocer y hacer frente a las necesidades que se le plantearán a los alumnos en estudios posteriores, futuros puestos de trabajo, etc.

### 1.1 Objetivos generales

- Adquirir y utilizar un lenguaje preciso para entender y comunicar información matemática.
- Desarrollar la capacidad de reconocer, plantearse y resolver problemas.
- Conocer aspectos históricos de la matemática que ilustren la aparición de las teorías.
- Conocer y utilizar los instrumentos y recursos que ponen a nuestra disposición las nuevas tecnologías.
- Potenciar la reflexión sobre los procesos que se siguen en la actividad matemática.
- Favorecer el gusto por la certeza y por la necesidad de fundamentar los resultados.
- Interpretar y valorar informaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente.
- Desarrollar la creatividad y los hábitos de investigación y descubrimiento.

### 1.2 Contenidos

- Números.
- Álgebra.
  - Codificar/descodificar situaciones de manera que lo entiendan los demás.
  - Traducir información de unos códigos a otros.
  - Tratamiento simbólico de cantidades conocidas o desconocidas mediante letras.
  - Expresar relaciones mediante letras.
  - Operaciones con expresiones literales.
  - Resolución de ecuaciones y sistemas por diversos métodos.
- Funciones y gráficas.
- Geometría.
  - Reconocimiento de figuras y cuerpos elementales.
  - Construcciones geométricas con instrumentos de dibujo, geoplanos, mosaicos, tangrams, policubos, etc.
  - Establecimiento de conexiones entre el plano y el espacio.
  - Conocimiento de propiedades básicas: Thales y Pitágoras.
  - Medidas: trigonometría básica.
  - Interpretación de mapas y planos.
  - Reconocimiento de regularidades y simetrías.
- Estadística y probabilidad.

### 1.3 Evaluación

Se entiende la evaluación como el conjunto de actividades que nos aportan los datos necesarios para el correcto seguimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por un lado se usa para determinar el grado de asimilación, por parte del alumno, de la materia estudiada y, por otro, una vez interpretados los datos obtenidos, nos sirve para introducir los cambios oportunos a fin de mejorar el proceso.

Así pues, la evaluación debe cubrir las siguientes funciones:

- Conocer la realidad inicial de la clase.
- Analizar el grado de adecuación entre lo que se pretende que el alumno aprenda y lo que realmente se ha conseguido.
- Reorientar el proceso y modificar el diseño si fuera necesario.

Son muchos y variados los instrumentos que pueden utilizarse para evaluar. Citamos algunos de ellos:

- Observación directa de la actuación del alumno.
- Opinión de los propios alumnos sobre su rendimiento.
- Resultados de pruebas escritas, cuaderno de trabajo, actividades, etc.
- Historial del alumno: rendimiento en otros cursos, características psico-sociales, etc.

## 2 Matemáticas en el Bachillerato

Como se ha dicho anteriormente, en la E.S.O. se presentan los conceptos de forma intuitiva, siendo el Bachillerato el lugar donde se debe comenzar a dar una visión más formal de los contenidos.

No se deben perder de vista aspectos históricos que nos ayuden a situar los problemas, poniendo de manifiesto que la Matemática está constituida por un conjunto de conocimientos con los que se pretende crear modelos de las situaciones que se dan en la realidad.

Desde el punto de vista pedagógico y metodológico las Matemáticas en el Bachillerato asumen un triple papel:

#### 1. Papel formativo.

El desarrollo de los contenidos matemáticos permiten a los alumnos mejorar sus estructuras mentales y adquirir aptitudes cuya utilidad y alcance trasciendan el ámbito de las propias matemáticas. En este sentido, la resolución de problemas requiere poner en juego unas estrategias de pensamiento, que son extrapolables a otras áreas de conocimiento de la propia realidad.

El papel formativo de las Matemáticas se completa incitando los alumnos a la búsqueda de la armonía, a la adquisición de una visión amplia y científica de la realidad, al desarrollo de la creatividad y de otras capacidades personales y sociales.

## 2. Papel instrumental.

Atendiendo a este papel, las Matemáticas proporcionan técnicas y estrategias básicas, necesarias para el estudio de otras áreas de conocimiento y para la actividad profesional.

## 3. Fundamentación teórica.

En las Matemáticas de Bachillerato se da una fundamentación teórica al cuerpo de conocimientos, mediante definiciones, demostraciones y encadenamientos conceptuales y lógicos. Éstos confieren validez científica a las intuiciones y a las técnicas y estrategias aplicadas a lo largo de las etapas anteriores.

## 2.1 Objetivos generales

- Comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.
- Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en las actividades cotidianas.
- Analizar y valorar la información proveniente de diferentes fuentes, utilizando herramientas matemáticas, para formarse una opinión propia que les permita expresarse críticamente sobre problemas actuales.
- Utilizar con autonomía y eficacia las estrategias características de la investigación científica y los procedimientos propios de las matemáticas (plantear problemas, formular y contrastar hipótesis, planificar, manipular y experimentar) para realizar investigaciones y, en general, explorar situaciones y fenómenos nuevos.
- Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos.
- Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.
- Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones lógicas.
- Abordar con mentalidad abierta los problemas que la continua evolución científica y tecnológica plantea a la sociedad dominando el lenguaje matemático necesario.
- Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber, mostrando una actitud flexible y abierta ante las opiniones de los demás.

## 2.2 Contenidos

Los contenidos de Matemáticas en Bachillerato son diferentes según las distintas modalidades que existen en el ciclo. Estas modalidades son:

- Arte.
- Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.
- Humanidades y Ciencias Sociales.
- Tecnología.

Y las asignaturas que se imparten en cada una de estas modalidades son las siguientes:

Modalidad	Curso 1	Curso 2
CC de la Nat. y la Salud	Matemáticas I	Matemáticas II
Tecnología	Matemáticas I	Matemáticas II
Humanidades y CC SS	Mat. aplicadas a CC SS I	Mat. aplicadas a CC SS II

### Matemáticas I

1. Aritmética y Álgebra.
  - Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grados.
  - Resolución de ecuaciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas sencillas.
  - Aplicación del método de Gauss en la resolución de sistemas sencillos de ecuaciones lineales.
2. Geometría.
  - Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
  - Resolución de triángulos.
  - Ecuaciones de la recta. Incidencia y paralelismo.
  - Producto escalar de vectores. Distancias entre puntos y rectas y ángulos entre rectas.
  - Estudio de la circunferencia.
3. Funciones y gráficas.
4. Estadística y probabilidad.

### Matemáticas II

1. Análisis.
2. Álgebra lineal.

- Matrices de números reales. Operaciones con matrices.
- Rango de una matriz.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Representación matricial.
- Discusión y resolución de sistemas lineales por el método de Gauss.
- Determinantes de órdenes 2 y 3. Regla de Sarrus.
- Propiedades de los determinantes.
- Uso de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

### 3. Geometría.

- Vectores en el espacio tridimensional. Productos escalar, vectorial y mixto.
- Ecuaciones de rectas y planos en el espacio.
- Problemas de incidencia y paralelismo entre rectas y planos.
- Problemas métricos sobre ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
- Lugares geométricos planos. Cónicas.

## Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

### 1. Aritmética y Álgebra.

- Polinomios. Operaciones elementales. Regla de Ruffini.
- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.
- Interpretación y resolución algebraica y gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Interpretación y resolución gráfica de inecuaciones lineales con una o dos incógnitas.

### 2. Funciones y gráficas.

### 3. Estadística y probabilidad.

## Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

### 1. Álgebra.

- Matrices como expresión de tablas y grafos. Operaciones con matrices.
- Resolución y discusión por el método de Gauss de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
- Interpretación y resolución gráfica de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Iniciación a la programación lineal bidimensional.

### 2. Análisis.

### 3. Estadística y probabilidad.

### 3 El Álgebra y la Geometría en el Bachillerato

En esta sección vamos a concretar los aspectos anteriores en las áreas que son objeto de la asignatura: el Álgebra y la Geometría.

#### 3.1 Objetivos concretos

- Utilizar el lenguaje vectorial y las operaciones con vectores para resolver situaciones y problemas de las ciencias de la naturaleza interpretando las soluciones.
- Representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones utilizando el lenguaje matricial y las operaciones con matrices.
- Aplicar las técnicas algebraicas adecuadas en la resolución de problemas y sistemas de ecuaciones lineales, expresando los procedimientos utilizados y las soluciones en lenguaje algebraico.
- Manejar las diferentes ecuaciones de rectas y planos, así como sus posiciones relativas, distancias y ángulos entre ellos.
- Aplicar diversas técnicas de geometría analítica al estudio de cónicas y otros lugares geométricos sencillos.
- Aplicar propiedades métricas e identificar formas correspondientes a algunos lugares geométricos.
- Utilizar la reflexión lógico-deductiva, los modelos de argumentación propios de las matemáticas y los procedimientos matemáticos adquiridos para la realización de investigaciones.

#### 3.2 Criterios de evaluación

- Utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso como instrumentos para la interpretación de fenómenos diversos.
- Reconocer formas geométricas a partir de su expresión analítica.
- Utilizar algunas técnicas propias de la geometría analítica y aplicarlas al estudio de las cónicas y de otros lugares geométricos muy sencillos.
- Construir cónicas que representen situaciones y hechos extraídos de la Ciencia y la Tecnología.
- Utilizar el lenguaje matricial como herramienta algebraica para expresar y resolver problemas relacionados con la organización de datos y con la geometría analítica.
- Expresar problemas en lenguaje algebraico y resolverlos aplicando las técnicas algebraicas adecuadas.
- Interpretar críticamente la solución obtenida a distintos problemas algebraicos y de geometría analítica.

## 4 Resolución de problemas

### 4.1 Fases en la resolución de un problema

La resolución de un problema recorre, según Polya, las siguientes cuatro fases:

I Comprender el problema.

- Desear resolver el problema
- Entender el enunciado.
- Responder a las preguntas:
  - ¿Cuál es la incógnita?
  - ¿Cuáles son los datos?
  - ¿Cuáles son las condiciones?
- Notación adecuada.
- Dibujar la figura, si hay alguna relacionada con el problema.

II Concebir un plan.

- ¿Conocemos algún problema relacionado?
- Si tenemos un problema relacionado con el nuestro, ya resuelto, ¿podemos hacer uso de él?
- ¿Puede enunciarse el problema de forma diferente?
- ¿Hemos empleado todos los datos? ¿Hemos hecho uso de todas las condiciones?

III Ejecución del plan.

- Verificar cada paso del plan.
- Efectuar las operaciones que nos llevan a la solución.

IV Examinar la solución obtenida.

- Verificar el resultado.
- Número de soluciones.
- ¿Puede obtenerse el resultado de un modo distinto?
- ¿Puede utilizarse el resultado, o el método, para resolver algún otro problema?

### Ejemplo

Aplicar los pasos anteriores al siguiente problema:

*Hallar la diagonal de un paralelepípedo rectangular conociendo su longitud, su anchura y su altura.*

## 4.2 Las preguntas del profesor

Para conseguir que el alumno llegue a tener esa "idea brillante" que le permita resolver el problema, hay que ayudarlo a encontrarla, y un método es hacer preguntas convenientemente pensadas. ¿Cómo deben hacerse tales preguntas?

- Empezar por preguntas generales y sugerencias simples.
- Ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas.
- La lista de preguntas debe ser corta, para que se repitan en circunstancias diversas, convirtiéndolas así en un hábito mental.
- Hay buenas y malas preguntas.

## 4.3 Diálogo para resolver un problema

En cada una de las cuatro fases que hemos considerado anteriormente, el alumno debe establecer el siguiente diálogo consigo mismo:

- ¿Por dónde debo empezar?
- ¿Qué puedo hacer?
- ¿Qué gano haciendo esto?

# 5 Problemas que se resuelven mediante ecuaciones

## 5.1 Notas para entregar a los alumnos

Presentamos ahora una particularización de las fases de resolución de Polya al caso de problemas que se resuelven mediante ecuaciones:

### Fase de lectura y comprensión

1. Leer el problema atentamente. Al final se debe saber contestar a las siguientes preguntas:
  - ¿Qué me pide el problema?
  - ¿Qué necesito calcular para resolverlo? Elección de incógnitas.
  - ¿Qué datos tengo?
  - ¿Qué relaciones hay entre las incógnitas y los datos?
  - Además de las relaciones que vienen en el enunciado del problema ¿pueden ayudar otras fórmulas que conozco? (Por ejemplo, si el problema habla de un triángulo rectángulo, puedo usar el Teorema de Pitágoras).

2. Si el problema se presta a ello, conviene hacer un dibujo que nos oriente en la solución.

Fase de planteamiento

3. Hay que traducir las relaciones entre datos e incógnitas a ecuaciones o expresiones matemáticas.

Fase de resolución

4. Se trata ahora de resolver la ecuación o sistema de ecuaciones que se ha obtenido en el paso anterior, utilizando los métodos que ya se conocen.

Fase de interpretación y discusión

5. Analizar el número de soluciones obtenidas: una, ninguna, dos, muchas, ...
6. En caso de haber obtenido alguna solución, se debe mirar:
  - Si ese valor o valores responden a lo que pide el problema.
  - Si los números obtenidos tienen sentido en el contexto del problema: una solución "rara" (por ejemplo, que obtengamos 24,4 como número de alumnos de una clase) puede significar que nos hemos equivocado o que el problema está mal planteado o que no tiene solución.

## 5.2 El lenguaje del álgebra

Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades hay que traducir dichas relaciones del idioma en el que está escrito el problema al lenguaje del álgebra.

Hasta el siglo XVII el lenguaje del álgebra era "retórico", no existían símbolos. La incógnita se llamaba "la cosa" y, por ejemplo, la ecuación  $x^3 + ax = b$  se enunciaba como "del cubo y las cosas igual al número".

Isaac Newton,<sup>1</sup> en su manual de álgebra titulado "Aritmética Universal", mostró con ejemplos cómo debía efectuarse la traducción. He aquí uno de ellos:

Se trata de determinar el capital inicial de un comerciante sabiendo los gastos y los ingresos que ha tenido, así como su capital final después de un cierto tiempo.

<i>En lengua vernácula</i>	<i>En el idioma del álgebra</i>
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero.	$x$
El primer año se gastó 100 libras.	$x - 100$
Aumentó el resto con un tercio de éste.	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
y aumentó la suma restante con un tercio de ella.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
El tercer año gastó de nuevo 100 libras.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
Después de haber agregado la tercera parte del resto,	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
el capital llegó a ser el doble del inicial.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

Resolviendo la ecuación  $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$  resulta la solución  $x = 1.480$  libras.

---

<sup>1</sup>Isaac Newton (1642 - 1727), físico, matemático y astrónomo británico; sus principales descubrimientos fueron: el cálculo infinitesimal, la naturaleza de la luz blanca y la teoría de la gravitación universal.

### 5.3 Diophantos de Alejandría

Diophantos fue un matemático griego de la escuela de Alejandría (s. IV dC). Estudió la resolución de ecuaciones y, en especial, fue un innovador en la teoría de ecuaciones de primer y segundo grados. Pero sabemos poco de su vida. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático, que se reproduce a continuación.

<i>En lengua vernácula</i>	<i>En el idioma del álgebra</i>
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto, y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida,	
cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla.	
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, que duró tan sólo la mitad de la de su padre en la tierra.	
y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	

Se trata de averiguar cuántos años vivió Diofanto, a qué edad se casó, cuándo tuvo su primer hijo y a qué edad lo perdió. (*Solución: 84, 21, 38 y 80 años*).

## 5.4 Problema en verso

En este mundo traidor                      con entera voluntad,  
nada es verdad ni mentira,              que si no haces ahora mismo  
eso dijo Campoamor,                      el problema que ahí va,  
y es dicho que el mundo admira.      tus estudios matemáticos  
Mas, yo sostengo y afirmo,              son mentira y nada más.

En casa de mi vecino  
son doce para comer:  
los papás y cuatro abuelos  
y seis infantes también,  
que unidos sus años suman  
once veces treinta y tres.

Los niños nacieron todos  
seguiditos, sin revés,  
año a año y uno a uno,  
testigos de un gran querer.

Al mayor de los bebés  
la mamá lo cuadruplica,  
siendo ella duplicada  
por un abuelo ¡rediez!

Los años de los abuelos  
equidistan entre sí,  
y su diferencia duplica  
a la de los papás, ¡ojo ahí!

Conviene también saber  
que el abuelo más jovial  
antecede al que duplica  
a la fecunda mamá.

Si quieres hacer constar  
que es buena tu aplicación,  
dime, en años nada más,  
la edad de cada persona  
de este enorme batallón.

## 6 Bloqueos y desbloques

Miguel de Guzmán, en su libro "Para pensar mejor", nos hace una descripción de los tipos de bloqueos que entorpecen nuestra actividad mental, así como algunos remedios para eliminarlos.

### 6.1 La actitud adecuada

- Confianza.
- Tranquilidad, sin prisas.
- Disposición de aprender, curiosidad.
- Gusto por el reto.

### 6.2 Los surcos de la mente

- Lo que vemos y lo que no vemos.
- Análisis de las situaciones desde un punto de vista que ordinariamente no es el nuestro.
- Salir de nuestros propios hábitos conceptuales.
- Escuchar con atención otras formas de encuadrar un mismo problema.

### 6.3 Bloqueos de origen afectivo

- Apatía, pereza ante el comienzo.
- Miedos (al fracaso, a la equivocación, al ridículo, al examen).
- Ansiedades.
- Repugnancias.

### 6.4 Bloqueos de origen cognoscitivo

- Dificultades en la percepción del problema.
- Incapacidad de desglosar el problema.
- Visión estereotipada.
- Tendencia al juicio crítico.
- Rigidez mental.

## 6.5 Bloqueos culturales y ambientales

- La sabiduría popular
  - Busca la respuesta correcta.
  - Eso no es lógico.
  - Sigue las normas establecidas.
  - Hay que ser prácticos.
- Las ideas inertes.

## 6.6 Ayudas para el desbloqueo

- La pregunta como actitud.
- Torbellino de ideas (brainstorming).
  - Espontaneidad de ideas.
  - Aplazamiento de juicio.
  - Cantidad conduce a calidad.
  - Perfeccionamiento de las ideas que surgen.