

Poliedros

Probar que en todo poliedro hay, al menos, dos caras con el mismo número de aristas.

Progresiones

1. Hallar un número positivo tal que su parte decimal, su parte entera y él mismo estén en progresión geométrica.
2. ¿Tiene lo anterior algo que ver con una progresión geométrica que sea, a su vez, una sucesión de Fibonacci?

SOLUCIONES

Poliedros

En primer lugar hay que observar que si una cara tiene x aristas, de ella “cuelgan” x caras.

Supongamos entonces que el poliedro tiene n caras. Si no hubiese dos con el mismo número de aristas, habría necesariamente una con n aristas (principio del palomar) y de ella “colgarían” n caras, con lo cual habría $n+1$, ¡contradicción!

Progresiones

1. Sea x la parte decimal del número y E su parte entera; entonces el número es $E+x$. Se sabe que $x, E, E+x$ es una progresión geométrica, luego:

$$E^2 = x(E + x) \rightarrow E^2 - xE - x^2 = 0 \rightarrow \left(\frac{E}{x}\right)^2 - \left(\frac{E}{x}\right) - 1 = 0$$

De donde: $\frac{E}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es decir, la razón de la progresión es el número áureo. Como $0 < x < 1$, E es un entero menor o igual que 1, luego $E=1$. Entonces, la progresión es:

$$\frac{1}{\Phi}, 1, \Phi$$

2. Efectivamente,

$\frac{1}{\Phi}, 1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \dots$ es la única sucesión de Fibonacci que es progresión geométrica.