

Intercambio de fichas

Se tienen tres fichas blancas (0) y tres fichas negras (X) en la siguiente posición:

0	0	0	
X	X	X	

Se trata de intercambiar las fichas blancas y negras para llegar a la posición final, descrita más abajo, en el menor número de movimientos. Blancas y negras se mueven por turnos hacia cualquier cuadrado adyacente que esté desocupado, en horizontal, vertical o diagonal.

X	X	X	
0	0	0	

- En este caso el mínimo número de movimientos es siete. ¿Cuáles son?
- Encontrar una estrategia para resolver el juego en el caso general de n fichas blancas y n negras. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos en este caso?

0	0	0	0	0	0	0	...	...	0	
X	X	X	X	X	X	X	...	...	X	

Medianas (longitudes)

Construir un triángulo conociendo las longitudes de sus medianas.

Indicación (por si sirve de algo): éste es un típico problema de construcción geométrica en el que hay que suponer el problema resuelto y analizar la situación, buscando elementos en la figura que se puedan construir directamente a partir de los datos (en este caso, un triángulo cuyos lados son los $2/3$ de las medianas dadas) y después, razonando “marcha atrás”, llegar a la solución del problema.

SOLUCIONES

Intercambio de fichas

La solución, para el caso de tres fichas de cada color es la siguiente:

0	0	0	x
x	x		

0		0	x
x	x	0	

0	x	0	x
	x	0	

	x	0	x
0	x	0	

x	x	0	x
0		0	

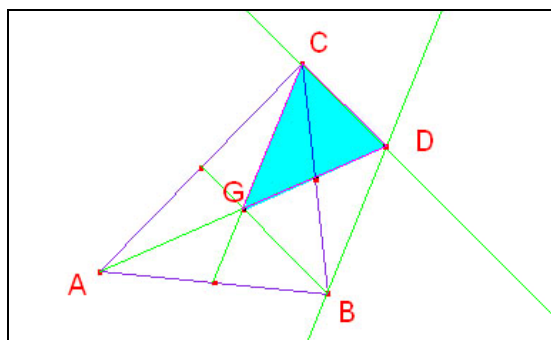
x	x		x
0	0	0	

x	x	x	
0	0	0	

En el caso general, la estrategia consiste en mover en diagonal, como se ha hecho antes, una ficha de cada columna (n movimientos), después la ficha que queda en la primera columna en vertical (1 movimiento) y, por último, de nuevo en diagonal una ficha de cada columna, una menos que antes, ($n-1$ movimientos) y en horizontal la primera ficha que se movió (1 movimiento). En total, $2n+1$ movimientos.

Medianas (longitudes)

Supongamos el problema resuelto, esto es, supongamos construido el triángulo ABC, cuyas medianas son tres segmentos de longitudes dadas:



Si trazamos por C la paralela a GB y por B la paralela a GC, resulta un paralelogramo, cuyas diagonales se cortan en su punto medio. Por la propiedad de la mediana, $GD=GA$ y, por lo tanto, los lados del triángulo GCD son las distancias del baricentro, G, a cada uno de los vértices del triángulo, es decir, los $2/3$ de las medianas respectivas. Como conocemos las medianas, podemos obtener los segmentos que son $2/3$ de cada una de ellas (Teorema de Tales). Así pues, invirtiendo la construcción, podemos primero dibujar el triángulo GCD (conocemos sus lados) y a partir de él es fácil construir el ABC, porque el punto B es el simétrico de C respecto del punto medio de GD y el vértice A es el simétrico de D respecto de G.