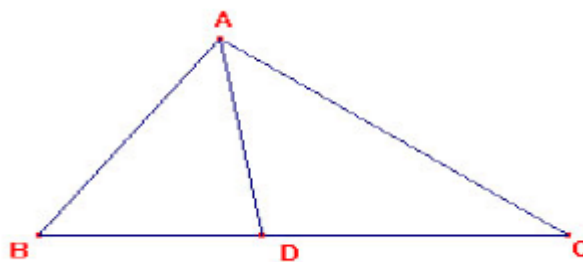


Incentro y circuncentro

Se ha dicho que la Geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas. La siguiente figura representa un triángulo que, evidentemente, no es la solución del problema que se plantea, pero debemos razonar sobre ella para intentar resolverlo.

El problema dice así: en un triángulo ABC se traza la bisectriz interior del ángulo $\hat{A}$, que corta al lado BC en el punto D . Si el incentro¹ del triángulo ABD coincide con el circuncentro² del triángulo ABC ,



1. Probar que el triángulo ABC es isósceles, obteniendo la medida de sus ángulos.
2. ¿Qué relación existe entre el lado mayor y el lado menor del triángulo?

El Hotel misterioso

Ahorrándonos la historia de los malvados que huyen del astuto detective, sólo diremos que el hotel se representa por 9 cartas boca abajo (matriz 3×3) y que las habitaciones aparecen y desaparecen como por arte de magia. Por el hotel se pueden dar paseos de una habitación a otra sólo horizontal y verticalmente pero en cualquier sentido, incluso retroceder. Cada paso de una habitación a otra es "un paseo". Cuando llegan los clientes (todos los espectadores que estén viendo la "exhibición") sólo están visibles las habitaciones (1,2), (2,1), (2,3) y (3,2). Las apariciones y desapariciones se hacen poniendo y quitando las cartas. Cada uno se aloja en una habitación sin decirlo a nadie. A la mañana siguiente han aparecido todas las habitaciones y los clientes consiguen dar cuatro paseos. Cuando intentan salir de donde están, descubren que han desaparecido las habitaciones (1,1) y (1,3) pero pueden dar cinco paseos. Más tarde desaparecen las habitaciones (1,2) y (2,3) y los clientes consiguen dar tres paseos. Por último desaparecen las habitaciones (2,2) y (3,3) y cada cliente sólo puede realizar un paseo.

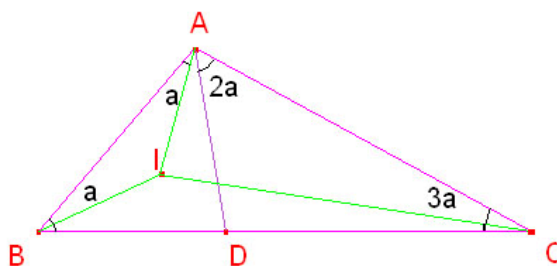
¡Ahí os pillé! ¡Estáis todos atrapados en la (3,1)!

¹ El Incentro de un triángulo es el punto donde se cortan las bisectrices interiores del mismo. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

² El circuncentro de un triángulo es el punto donde se cortan las mediatrices del mismo. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

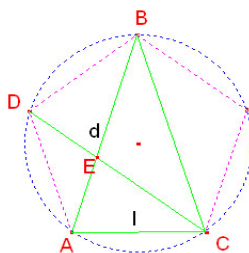
SOLUCIONES

Incentro y circuncentro



1.- Trazamos el incentro (I) del triángulo ABD (intersección de las bisectrices), que coincide con el circuncentro de ABC. Por lo tanto, $IA=IB=IC$ y los triángulos AIB, BIC y AIC son isósceles. Entonces, los ángulos del triángulo ABC quedan descompuestos de la siguiente manera: $\hat{A}=a+a+2a$; $\hat{B}=a+a$ y $\hat{C}=3a+a$. Luego, $a+a+2a+a+a+3a+a=180^\circ$; $10a=180^\circ$; $a=18^\circ$. Los ángulos de ABC miden 72° , 36° y 72° y es, por tanto, isósceles.

2.- Si se dibuja la circunferencia circunscrita al triángulo se observa que los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son inscritos y abarcan cada uno doble arco que $\hat{B}$. Luego los lados del triángulo son la diagonal y el lado de un pentágono regular.



El triángulo BDE es isósceles porque el ángulo en D (72°) es igual al ángulo en E (interior, que mide la semisuma de los arcos que abarca, esto es, 72°). Por tanto, $BE=BD=lado=l$. Por otra parte, los triángulos ABC y ACE son semejantes por tener los ángulos respectivamente iguales. Entonces se verifica:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \Leftrightarrow d^2 - dl - l^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d}{l}\right)^2 - \left(\frac{d}{l}\right) - 1 = 0,$$

de donde

$\frac{d}{l} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ y tomando la solución positiva queda $\frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que es la proporción áurea o número de oro. Así pues, la relación pedida es la relación áurea.

El Hotel misterioso

Sólo hay que ver el hotel como un tablero de ajedrez. Inicialmente los clientes se alojan en cuadros negros y basta observar que un número par de paseos no cambia a los clientes de color, mientras que si es impar sí los cambia. Lo demás es coser y cantar.