

TEMA 9: VECTORES

“Papá, ¿Has conseguido multiplicar las ternas?” (A Hamilton de sus hijos)

1. Justificación

La justificación de la unidad la podemos hacer desde dos puntos de vista:

- Desde la propia estructura interna ya que no es posible el estudio de nuevos conceptos sin tener adquiridos los conceptos anteriores que le sirven de base. Y no sólo para la asignatura de matemáticas, sino que las matemáticas en bachillerato proporcionan herramientas y estrategias básicas para otras materias.
En el caso concreto de esta unidad, los conceptos en ella estudiados darán a los alumnos herramientas geométricas que les ayudará a resolver problemas o ejercicios de posteriores estudios.
- Valor formativo: Contribuye a la mejora de las estructuras mentales del alumno y a la adquisición de cualidades como la constancia, la perseverancia, la creatividad, así como una mayor capacidad para adquirir una amplia gama de saberes y habilidades.

Referente a la **relación de esta unidad con el currículo**, los alumnos han tratado con la geometría desde el primer curso de la E.S.O. ya que en 1º han trabajado con coordenadas cartesianas calculando incluso el punto medio de un segmento. En 2º amplían con las coordenadas polares y tratan con traslaciones. En 3º es cuando se centran más en los movimientos en el plano, por lo que perfeccionan el concepto y la manipulación con traslaciones. En 4º afianzan lo anterior y estudian la Geometría de la esfera terrestre donde se incluyen coordenadas geográficas y rumbo de un barco. De manera más formal, es en 1º de bachillerato donde estudian los vectores en el plano y en 2º en el espacio.

Estamos en la parte central del bloque dedicado a la Geometría, es el segundo del curso, habiendo estudiado ya el bloque dedicado a la Aritmética y el Álgebra. En este bloque, los alumnos ya han estudiado toda la trigonometría y la resolución de triángulos. Trataremos ahora con vectores, que darán pie a la Geometría analítica de la recta. Finalizaremos el bloque con los números complejos y las cónicas.

2. Objetivos

- Objetivos de etapa

De entre los objetivos que figuran en el decreto 126/1994 (modificado por el 208/2002) nos interesa destacar los que hablan sobre la comprensión y el dominio de conocimientos científicos y tecnológicos, así como sus aplicaciones y situaciones relacionadas con la experiencia cotidiana, personal y social. También hacemos hincapié en el hecho que trata de posibilitar una madurez personal, social y moral que permita actuar de forma responsable y autónoma.

- Objetivos de área

Vienen a cubrir la necesidad de que los alumnos comprendan y sepan utilizar conceptos, procedimientos, estrategias y métodos matemáticos en la interpretación de las ciencias y en actividades cotidianas.

Muy importante es también el uso del lenguaje matemático para expresar situaciones que puedan ser tratadas matemáticamente y la utilización del discurso racional para plantear problemas, justificar procedimientos, etc.

- Objetivos didácticos

- Utilizar los conceptos de vector fijo, módulo, dirección y sentido. Equipolencia de vectores.
- Reconocer y utilizar el concepto de vector libre, realizar operaciones de suma de vectores y producto por un escalar, así como combinaciones de vectores.
- Calcular las coordenadas de un vector a partir de sus extremos.
- Calcular el producto escalar de dos vectores y utilizar su interpretación geométrica.
- Calcular el ángulo de dos vectores.

3. Contenidos

Además de los contenidos transversales que iremos comentando según vayan saliendo en las actividades, los contenidos se dividen en conceptos, procedimientos y actitudes.

- Conceptos

- Vectores fijos. Módulo, dirección y sentido.
- Vectores libres. Operaciones.
- Producto escalar.
- Ángulo de dos vectores.

- Procedimientos

- Cálculo de la dirección y el módulo de un vector a partir de sus coordenadas.
- Realización gráfica de la suma de vectores y el producto por un escalar.
- Expresión analítica de las operaciones con vectores.
- Cálculo del producto escalar con sus dos formulaciones.
- Cálculo del ángulo formado por dos vectores.
- División de un segmento en partes iguales.

- Actitudes

- Valoración de la utilidad y la presencia de la geometría en la vida cotidiana.
- Reconocimiento de la aplicación de métodos gráficos para resolver problemas de tipo geométrico.
- Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos.

4. Metodología

Planteamos el desarrollo del tema dividiéndolo en 6 sesiones dependiendo de la evolución del grupo y de las características de los alumnos, en cada una de las cuales la distribución de la clase dependerá de la actividad a realizar. Antes de empezar les repartimos a los alumnos una relación de problemas de donde irán sacando los ejercicios propuestos en cada una de las sesiones.

En general, la metodología a seguir en casi todas las sesiones será la siguiente: Empezaremos planteando una o varias actividades o con explicaciones teóricas con las que introduzcamos los conceptos a tratar en la sesión correspondiente, así como para intentar saber lo que el alumno conoce sobre el tema. Realizaremos a continuación algunos ejercicios donde se traten los contenidos procedimentales relacionados con los conceptos estudiados. Y por último, dejaremos propuestos algunas actividades similares a las realizadas en clase que sacaremos de la relación de problemas que se le entregó al alumno al inicio de la unidad.

5. Actividades

A.General Lectura de dos libros

Al principio del curso, pediremos a los alumnos que hagan grupos de 4 personas. A cada uno de estos grupos se les asignará dos libros (uno en el primer trimestre y otro en el segundo) que tendrán que leer y luego hacer un comentario sobre ellos al resto de la clase.

Los libros propuestos son:

- El diablo de los números.
- El señor del cero.
- Ernesto el aprendiz de matemago.
- Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números.
- Números pares, impares e idiotas.
- Un cuento enmarañado.
- El asesinato del profesor de matemáticas.
- El gran juego.

A.1. Un poco de historia

Vector

Vocablo latino que significa *conductor*. Los vectores geométricos se pueden interpretar en forma abstracta, a través de sus componentes o coordenadas. Es lo que hizo el genial matemático irlandés Hamilton, que en 1865 utilizó la palabra vector para designar un par, una terna, una cuaterna... de números ordenados, entre los que definió ciertas operaciones. Sus trabajos sentaron las bases del cálculo vectorial.

Trabajo: Buscar una breve reseña de Hamilton.

T.1. Elementos de un vector

Definición de vector: Un vector es un segmento orientado en el plano \vec{v} . Cada vector posee unas características que son:

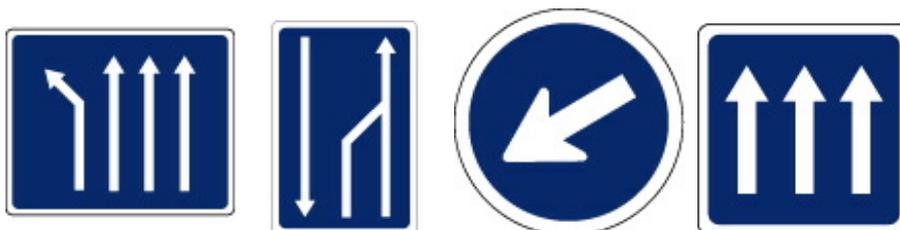
- **Origen:** O también denominado *Punto de aplicación*. Es el punto exacto sobre el que actúa el vector.
- **Módulo:** Es la longitud o tamaño del vector. Para hallarla es preciso conocer el origen y el extremo del vector, pues para saber cuál es el módulo del vector, debemos medir desde su origen hasta su extremo.
- **Dirección:** Viene determinada por la recta que lo contiene (un conjunto de rectas paralelas tiene la misma dirección).
- **Sentido:** Se indica mediante una punta de flecha situada en el extremo del vector, indicando hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector.

A.2. Las señales de tráfico

1. ¿Qué significan las siguientes señales de tráfico?



2. ¿Cuántas direcciones ves en cada una de estas señales?



Con esta actividad estudiamos la diferencia entre dirección y sentido de un vector. Aprovechamos la actividad para tratar el contenido transversal de la educación vial.

T.2. La tienda de vectores Equipolencia de vectores. Vector libre.

Con esta actividad vamos a introducir el concepto de vector libre y la equipolencia de vectores planteando el siguiente símil:

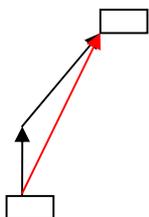
Cuando entramos en una mercería, nos encontramos con muchas cajas en las que hay pegado un botón y dentro de las cuales hay botones igual al botón de muestra. La relación que existe entre la caja y los botones que están dentro es la misma que la que existe entre un vector libre y los vectores fijos. Es decir, un vector libre es el conjunto de todos los vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, pero no necesariamente el mismo origen.

Además, esta actividad nos permite establecer una conexión entre las matemáticas y situaciones o lugares cotidianos, con lo cual fijan los conocimientos.

A.3. En el almacén

Tratamos los vectores asociados a una traslación.

1. En un almacén hay que desplazar unas cajas, sabemos que debemos llevarlas 3 metros dirección norte y luego 5 m dirección noreste.



- a) En el dibujo te mostramos una manera de desplazar las cajas, ¿sabrías decir si hay alguna forma más directa?

Así definimos el **vector suma**.

- b) Si te diéramos los dos vectores con el mismo origen, ¿cómo llegarías al vector suma? **Regla del paralelogramo**.

2. Propiedades de la adición de vectores: asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento opuesto. (Todo tratado como traslaciones).
3. Sustracción de vectores: caso particular de la adición.

- En la adición y la sustracción de vectores varía tanto la dirección, como el módulo, y el sentido.

A.4. Producto por un escalar

1. Al desplazar el punto A por el vector \vec{v} llegamos al punto A'.

$$A \text{ -----} \rightarrow A'$$

- a) ¿Dónde estaría el punto A' si queremos que el desplazamiento sea de doble distancia? Tendríamos una nueva traslación, ¿qué vector lleva asociada?
- b) ¿Y si queremos que lo desplace sólo a la mitad de la distancia? ¿Qué vector llevará asociada la nueva traslación?
- c) ¿Qué puedes decirme si el desplazamiento es en sentido contrario?

Definimos de esta forma $k\vec{v}$, teniendo en cuenta que tiene:

- La misma dirección que \vec{v} .
 - Igual sentido que \vec{v} si $k > 0$ y sentido contrario si $k < 0$.
 - El módulo queda multiplicado por el valor absoluto de k.
2. Propiedades: Distributiva respecto de la suma de vectores y de escalares, asociativa mixta, elemento unidad 1. (Se estudian gráficamente).

NOTA: Tarea para casa: realizar las correspondientes actividades de la relación de problemas.

- Las actividades propuestas están clasificadas según su dificultad para así poder atender a las diferentes necesidades de los alumnos.

A.5. Coordenadas de un vector

Para esta actividad vamos a necesitar *papel cuadriculado*.

Los vectores los podemos representar en el plano sobre unos ejes coordenados. Es por eso que vamos a poder trabajar con ellos con dos coordenadas (a,b), donde a representa las unidades que nos desplazamos en paralelo al eje de abscisas y b las unidades desplazadas en la dirección del eje de ordenadas.

- En los vectores siguientes, di cuáles serían sus coordenadas. (les damos vectores de distintas coordenadas y algunos iguales).
- ¿Coinciden las coordenadas de algunos vectores? ¿Qué significa eso?
Todo representante de un vector libre tiene las mismas coordenadas.
- Observa que cada vector tiene un punto origen y un extremo. ¿qué relación encuentras entre las coordenadas de dichos puntos y las del vector?
Coordenadas del vector = Extremo – Origen.

A.6. Cálculo del módulo y de la dirección de un vector

Dado un vector (a,b), podemos construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea precisamente el vector dado.

- ¿Cómo calcularías la hipotenusa? **Mód** $\vec{v} = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- La dirección de un vector viene dada por la pendiente de la recta que lo contiene, dicha pendiente la podemos calcular a través del ángulo que forma con la horizontal, ¿qué ángulo determina la dirección del vector (a,b)?

$$\text{Dirección de } \vec{v} : \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

A.7. Operaciones con coordenadas

Dados los vectores $\vec{v} = (3,-1)$, $\vec{u} = (4,3)$ y $k=2$ un escalar, observa en la figura los vectores $\vec{v} + \vec{u}$, $\vec{v} - \vec{u}$ y $k\vec{v}$.

- ¿Qué puedes decirme de sus coordenadas?
- ¿Están relacionadas con la de los vectores \vec{v} y \vec{u} ?

A.8. Polígonos

- Indica qué tipo de triángulo es el de vértices ABC siendo:
 - A(3,5), B(0,0) y C(5,3).
 - A(2,4), B(-4,2) y C(0,0).
 - A(1,7), B(5,2) y C(1,2).
- De un paralelogramo se conocen los vértices A(1,3), B(5,1) y C(-2,0). Halla las coordenadas del vértice D, la diagonal y el perímetro del paralelogramo.

NOTA: Tarea para casa: realizar las correspondientes actividades de la relación de problemas.

- Las actividades propuestas están clasificadas según su dificultad para así poder atender a las diferentes necesidades de los alumnos. Así para los más avanzados podemos proponerles actividades con parámetros.

T.3. Producto escalar y propiedades

1. Producto escalar

- Definición de producto escalar de dos vectores:** es el escalar que viene dado por la siguiente expresión: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, donde α es el ángulo que forman los dos vectores.

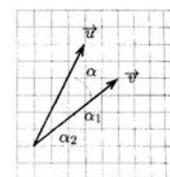
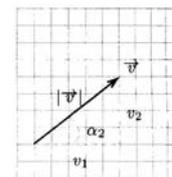
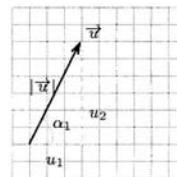
- Ángulo entre dos vectores:**

Consideremos dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, representados con el mismo origen. Si \vec{u} forma un ángulo α_1 con la horizontal y \vec{v} forma un ángulo α_2 con la horizontal, la diferencia de ambos nos dará el ángulo α que forma el vector \vec{u} con \vec{v} . Según sean los dos vectores, será $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ o bien $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Pero en cualquier caso es:

$$\cos \alpha = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \text{sen } \alpha_1 \text{ sen } \alpha_2.$$

Ahora bien, según vemos en las figuras:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha_1 &= \frac{u_2}{|\vec{u}|}; & \cos \alpha_1 &= \frac{u_1}{|\vec{u}|} \\ \text{sen } \alpha_2 &= \frac{v_2}{|\vec{v}|}; & \cos \alpha_2 &= \frac{v_1}{|\vec{v}|} \end{aligned}$$



Así pues,

$$\cos \alpha = \frac{u_1}{|\vec{u}|} \cdot \frac{v_1}{|\vec{v}|} + \frac{u_2}{|\vec{u}|} \cdot \frac{v_2}{|\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad (1)$$

El numerador del último miembro, $u_1 v_1 + u_2 v_2$, es un escalar que resulta de sumar los productos de las primeras y segundas componentes de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

146

- Expresión analítica del producto escalar:**

De la expresión anterior se deduce que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

- Propiedades: Definida positiva, conmutativa y distributiva respecto a la suma.

A.9. Aplicaciones del producto escalar

- Intenta expresar el módulo de un vector en función del producto escalar. $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
- Sea $\vec{u} = (3,2)$, $\vec{v} = (-2,3)$ y $\vec{w} = (-1,2)$, $\vec{x} = (4, 2)$. Representálos y calcula los productos escalares de los dos primeros y de los segundos. ¿Qué conclusión podemos sacar? $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si \vec{u} es perpendicular a \vec{v} .

A.10. División de un segmento en partes iguales

Veamos cómo dividir un segmento en dos partes iguales y cómo calcular el punto medio de dicho segmento. Sean $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$.

$$AB = AM + MB, \text{ de donde } M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

1. ¿Cómo dividirías un segmento en tres partes iguales?
2. ¿Y en cuatro partes iguales?

NOTA: Tarea para casa: realizar las correspondientes actividades de la relación de problemas.

- Las actividades propuestas están clasificadas según su dificultad para así poder atender a las diferentes necesidades de los alumnos.

A.11. Trabajo: Aplicaciones de los vectores a otros campos de la ciencia.

Esta actividad se realizará en grupos de dos alumnos, se les dará un plazo de 10 días para entregarlo.

A.12. Taller de matemáticas

Algunas actividades de repaso que podemos realizar al finalizar esta unidad, las podemos realizar en el taller de matemáticas.

1. Aula de ordenadores
<http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/UnidDidVectores/indice/indice.htm#indice>
sumar y restar vectores gráficamente.
2. Día escolar de las matemáticas
Los alumnos prepararán una actividad para el resto de los alumnos del centro que consistirá en esconder “un tesoro” en algún lugar del patio y hacer que sus compañeros lo encuentren dándoles indicaciones con vectores (dirección, sentido y módulo en pasos, como si fuera un mapa de un tesoro).

A.13. Esquema final

En esta actividad pediremos a los alumnos que nos hagan un esquema con todo lo tratado en la unidad, de manera que no sólo les sirva de resumen, sino que les ayude a clasificar los contenidos desarrollados en la unidad y a diferenciar conceptos y procedimientos.

6. Atención a la diversidad

El tratamiento de la diversidad resulta complejo, no obstante, apuntamos algunas estrategias posibles:

- Actividades de diagnóstico de los conocimientos previos de los alumnos para adecuar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Reforzamiento de lo aprendido antes de continuar.
- Mayor estructuración de las actividades para los alumnos con dificultades y planteamiento más abierto para alumnos de mayor nivel de autonomía en el trabajo.
- Actividades de refuerzo o ampliación según las características de cada alumno.

7. Evaluación

Haremos dos evaluaciones: a los alumnos y a la propia unidad didáctica.

U.D. Iremos anotando todo lo necesario para analizar si la temporización ha sido la adecuada, si los alumnos han podido seguir el ritmo marcado con las actividades propuestas, etc. Y no sólo para ir cambiando las actividades y la metodología según vayamos viendo el proceso de la unidad, sino también para mejorarla para años sucesivos.

Alumnos: Los criterios de evaluación expresados en el decreto 208/2002 relacionados con el tema estudiado son los siguientes:

- Organizar y codificar informaciones, seleccionar estrategias, comparándolas y valorándolas, para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, y utilizar las herramientas matemáticas adquiridas.

Concretizando estos criterios a nuestra unidad didáctica podemos evaluar los siguientes aspectos:

Criterios generales

- Realizar los ejercicios propuestos en cada sesión.
- Saber trabajar en grupo, se valorará la participación en el grupo de cada alumno, su aportación personal, su contraste de ideas con el resto de compañeros, el respeto mostrado hacia las ideas de los demás, el nivel de integración conseguido, la ayuda dada a compañeros con las ideas menos claras, etc.

Criterios específicos

- Reconocer los distintos elementos de un vector.

- Utilizar el concepto de vector libre.
- Determinar el módulo y la dirección de un vector.
- Realizar operaciones con vectores tanto gráfica como analíticamente.
- Hallar el producto escalar de dos vectores. Calcular el ángulo de dos vectores.
- Dividir un segmento en partes iguales.

Utilizaremos los siguientes instrumentos de evaluación:

- ❖ Observación de las ideas previas en los primeros ejercicios de diagnóstico.
- ❖ Observación de intervenciones en el aula.
- ❖ Valoración de trabajos individuales y colectivos.
- ❖ Preguntas directas en clase.
- ❖ Trabajo diario desarrollado en casa.
- ❖ Resumen actividades, en este caso contendrá las siguientes cuestiones:
 1. Módulo y dirección de un vector.
 2. Operaciones con vectores.
 3. Paralelismo y perpendicularidad de vectores.
 4. Ángulo de dos vectores.
 5. División de segmentos en partes iguales.
- ❖ Prueba escrita. (Se realizará conjuntamente con la siguiente unidad que trata sobre la geometría analítica de la recta y distancias).

8. Bibliografía

- Unidad didáctica Santillana servicios educativos y sm.
- Libro 1º bachillerato CCNS ed. La ñ.
- Libro 1º bachillerato CCNS ed. ecir