Sesión 7. Utilización de recursos: enseñanza experimental I. (Primera parte)

ACTIVIDADES ENCAMINADAS AL EMPLEO DE MATERIALES

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han de ir evolucionando a tenor de los tiempos y dando respuestas coherentes a las necesidades y expectativas de formación de las nuevas generaciones.

El Profesor no debe seguir apoyándose únicamente en los medios tradicionales, pizarra y tiza, lápiz y papel sino que debería, además, contemplar la utilización de otros medios y de ciertos materiales que le ayuden a modelizar situaciones, a abstraer conceptos y a razonar por analogía. Por ello, debe tener información suficiente sobre diversas alternativas didácticas para poder optar a la hora de decidir, dentro de los márgenes que le permite el currículo de la materia, qué contenidos, qué métodos y cómo organizar el trabajo en su aula.

El uso de los materiales está ineludiblemente ligado a la opción metodológica del Profesor. La utilización de materiales sin una intencionalidad didáctica clara que explicite los objetivos matemáticos que se pretenden conseguir, puede convertirse en un mero juego.

Teniendo en cuenta las anteriores reflexiones y nuestra experiencia de trabajo con los alumnos en el Laboratorio de Matemáticas, proponemos algunas actividades encaminadas a emplear ciertos tipos de materiales. Comenzamos con un material muy barato y muy fácil de hacer: las tramas cuadradas.

ACTIVIDADES ENCAMINADAS AL EMPLEO DE TRAMAS CUADRADAS.

Actividades con tramas cuadradas de puntos.

¿Qué podemos abordar?:
- Números, en particular radicales (incluidos radicales semejantes) y aproximaciones.
- Ángulos.
- Perímetros y áreas.
(Cálculos directos y al revés. Cálculo de áreas por descomposición. Figuras congruentes.)
- Problemas de optimización (máximos y mínimos).
- Estudio de polígonos (en particular, caracterización y clasificación) .
- Definición de polígonos, con análisis de la dificultad que encierra dar una definición 'definitiva' o 'absoluta' en matemáticas.
- Pruebas (por ejemplo, en áreas de figuras elementales).
- Combinatoria.
- Divisibilidad.
- Conjeturas (La fórmula de Pick)
- Semejanza de figuras (poligonales).

Un posible guión para la realización de actividades con la trama cuadrada.

1.- <u>¿Qué matemáticas veis en la trama?</u>
La primera vez que

Una vez distribuidas las tramas, se preguntará a los alumnos: ¿**qué matemáticas veis en la trama**? Se pretende que los alumnos se familiaricen con el material y organicen esa hoja 'simple' de puntos con imaginación y vocablos matemáticos.
Respuestas usuales: Puntos, segmentos, rectas, cuadrados, etc. Algunos dirán números concretos, etc.

2.- <u>¿Cuál es el área de este cuadrado?</u>

El Profesor dibujará en transparencia, o en la pizarra, un trozo de trama (por ejemplo, un cuadrado 5X5). Dibujará, sobre ella, un cuadrado de lado 2 unidades. Preguntará, ¿qué área tiene éste cuadrado?
El profesor puede encontrarse con sorpresas: Muchos alumnos dirán: 9; algunos tal vez digan 1; otros, quizás los menos, dirán 4.

Cuando aparezcan distintas respuestas, el profesor acudirá al recurso del **conflicto cognitivo:** solicitará que intenten ponerse de acuerdo. Una buena cosa es pedir que aquel que cambie de opinión que lo haga público, dando las razones de su nueva postura.
Al final, toda la clase, o la mayoría, acabará asumiendo la solución correcta.

¡Atención!: el profesor debe tener <u>paciencia</u> y no adelantarse. Que deliberen, discutan y pongan en común.

Tampoco hay que aclarar cuál es la unidad de medida. Los datos están implícitos y los alumnos que no lo han asumido, acaban tomando como unidad de longitud la distancia entre dos puntos naturalmente consecutivos y, como unidad de área, el cuadrado asociado. De todas maneras si la pregunta surge, el profesor debe aclararla.
Por supuesto, al final de toda la discusión, el <u>profesor hará explícita la unidad de área</u> que se está utilizando.

3.- Dibujar segmentos.

Se pedirá a los alumnos que dibujen segmentos de longitud dada:
A) "Dibujar tres segmentos de longitud 5"
A los pocos minutos (tal vez segundos), el profesor se encontrará con respuestas y dirá: 'este es vertical'; 'este es horizontal'; '¿alguien ha dibujado un segmento oblicuo de longitud 5? Hacedlo, por favor'. Y nuevamente, dejará que los alumnos intenten conseguirlo.
Posiblemente, algún alumno (muy pocos) lo hagan; tal vez ninguno. En todo caso, el profesor aprovechará para hablar y utilizar el Teorema de Pitágoras.

B) "Dibujar segmentos de longitudes $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, etc."
Se pretende exclusivamente que los alumnos se vean en la necesidad de aplicar el teorema de Pitágoras

C) "Dibujar un segmento inclinado de longitud 10"
Será curioso observar cómo muchos alumnos titubean, a pesar de lo realizado inmediatamente antes en los dos apartados anteriores. (¡No hay que olvidar que, en situaciones escolares anteriores, el alumno nunca ha utilizado así el Teorema de Pitágoras!: al alumno no se le pide un cateto conocidas la hipotenusa y el otro cateto o algo similar, se le pide que busque, ¡sin decirlo!, los dos catetos).

Otro tipo de ejercicios interesantes, algo distinto a los anteriores consiste en:

D)"Dibujar segmentos que no contengan ningún punto, calculando sus longitudes".
Salen, así, todos los radicales que pueden obtenerse en la trama.

E)"Dibujar segmentos que contengan un punto (o dos, o tres, o cuatro, etc.), calculando sus longitudes".
Se puede aprovechar para manejar radicales semejantes.

4.- Dibujar caminos.

El profesor pondrá un dibujo en la pizarra y dirá: 'Esto es un camino' y preguntará: ¿qué longitud tiene este camino? (por camino entendemos una línea quebrada).

F) "Dibujar caminos de longitud $3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{5}$"
Se puede pedir, al final, que digan, una aproximación, con números decimales de dicha longitud (¡por supuesto, pueden utilizar la calculadora!; para que hagan un uso inteligente de la misma, se le puede pedir que den una aproximación decimal concreta, por ejemplo, con error menor que una milésima; se les hará ver que, en este caso, ¡basta con tomar tres decimales!).

G) "Dibujar el camino de menor longitud entre los puntos A y B. Indicar la longitud exacta y aproximadamente."
El Profesor dibujará sobre la trama los puntos A y B, en la transparencia o en la pizarra.
Aquí no debe de haber mucho problema: 'la línea más corta es la recta'; esto lo tienen asumido y lo suelen aplicar.
Pero, les obligamos a elegir el triángulo rectángulo necesario para los cálculos y a aplicar el teorema de Pitágoras.
G1) Una variante de este problema consiste en buscar el camino mínimo entre A y B, pasando por C (no alineado con los anteriores).

5.-Dibujar polígonos.

H) "Encontrar todos los triángulos de área ½"

Los alumnos suelen tener dificultades una vez encontrado el primer triángulo (el encerrado dentro de un cuadrado de lado 1). Debe dejárseles que busquen. Acabará apareciendo toda una fauna que se pondrá en común en la clase. Si este problema es de los primeros realizados con áreas, los alumnos intentarán aplicar la fórmula, casi nunca abordarán la estrategia de descomposición, que constituye un objetivo de esta actividad. Por supuesto, se aceptará la fórmula del cálculo del área; pero los alumnos tendrán dificultades para aplicarla al no saber encontrar la altura correspondiente. Se puede aprovechar para hablar de la altura, dibujándola cuando aparezca la ocasión.

Se pueden comparar las estrategias de la fórmula y de la descomposición, lo que puede servir, además, para dar una prueba de la fórmula usual del área de triángulos.

I) "<u>Dibuja todos los cuadriláteros que puedas con perímetro $8+4\sqrt{5}$</u>"

Es un problema de los ''recíprocos': se trata de construir polígonos conocido el perímetro, y no al revés. Con esto se incentiva la búsqueda, la creatividad, las estrategias de resolución y se incide en el hecho de que un problema puede tener muchas soluciones. Por supuesto, nos va a permitir hablar de polígonos (cuadriláteros, en este caso) y de sus distintos tipos -tal vez no salgan los estrellados-, de perímetro y de su cálculo, de números radicales y del teorema de Pitágoras.

Se pueden plantear, alternativamente, enunciados en los que se hablen de polígonos en general o de otro tipo de polígonos particulares; en cualquier caso el profesor debe estudiar el número que pone como perímetro (el 'mejor perímetro') en el enunciado para que la actividad sea lo más rica posible.

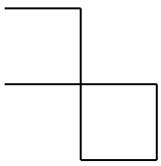
J) "<u>Encuentra el octógono de menor área</u>"

Esta actividad se centra en la noción de área asociada a un octógono; se presenta también un problema de optimización, que da interés de búsqueda al enunciado.

Con este enunciado, uno de los primeros octógonos que salen es uno de apariencia regular, pero que no es ni equilátero. Se debe hacer patente este hecho por parte del profesor.

En la marcha de la actividad, primero salen los convexos, luego los cóncavos y, finalmente, casi siempre hay algún alumno que se 'atreve' a dibujar uno estrellado, con la duda (si no se han trabajado este tipo de polígonos) de si son o no polígonos y por, supuesto, si son o no octógonos. El profesor debe aprovechar para que se discuta qué se entiende por polígono.

Uno que puede salir es éste:



[¿es un polígono?; ¿son dos cuadrados unido por el vértice?; ¿es un heptágono estrellado?; ¿es un octógono cóncavo con un vértice doble? Desde el punto de vista de la tortuga (filosofía Logo), todas las definiciones anteriores serían correctas. **Debemos aceptar cualquier definición coherente** y así debemos hacerlo constar. Interesa mucho el debate que mantengan los alumnos. Pedirán al profesor, de una manera u otra, que les aclare qué es un polígono (que no lo enunciarán así, sino preguntando cosas cómo: 'pero, ¿esto es un octógono o no?'; '¿cuándo tendré un octógono?'). Esta actividad nos permitirá también hacer ver a nuestros alumnos que, en matemáticas, las cosas no son tan fáciles; una definición, puede someterse a crítica y revisarse.]
En este punto es interesante que el profesor lea el libro *Pruebas y refutaciones* de I. Lakatos.

K) "<u>Dibuja todos los rectángulos distintos de área 36. ¿Cuántos hay? ¿Cuál es el que tiene menor perímetro? ¿Y el de mayor perímetro?</u>

Este problema está relacionado, en principio, con la divisibilidad. Hay tantos rectángulos, con lados enteros, como la mitad de los divisores del número (o la mitad mas uno si el número de divisores es impar; en este caso, el divisor central – en el orden usual- da lugar a un cuadrado) .

Pero no sólo con números enteros se obtienen rectángulos. Los rectángulos con lados {$\sqrt{2}$, 18$\sqrt{2}$}; {2$\sqrt{2}$, 9$\sqrt{2}$}, etc., son rectángulos construibles en la cuadrícula. Si estos rectángulos no saliesen, los debe explicitar el profesor, pues supone operar directamente con irracionales.

Este ejercicio pone en evidencia la no proporcionalidad entre área y perímetro: A una misma área corresponde diversos perímetros.

Al calcular el del perímetro mínimo, los alumnos suelen tener dificultades pues ¿el cuadrado es un rectángulo? Debe pedírsele la definición de un rectángulo y luego la de un cuadrado y hacerles ver que la segunda encaja en la primera.

L) "Calcular el área del polígono dibujado"

Dibujar un polígono bastante 'irregular', pues esta actividad va a servir para poner el énfasis en el cálculo de áreas por descomposición.

Podría parecer que esta actividad debería realizarse antes que las dos anteriores. No necesariamente, pues se enmascararían los problemas que surgen en ellas y la propia búsqueda, imaginación y creatividad del alumno.

Se debería trabajar con varios ejercicios del mismo tipo, para que consoliden la descomposición.

M) "Polígonos equiláteros y equiángulos. Ángulos en los polígonos".
Los alumnos suelen pensar que los polígonos equiláteros son regulares (y también que los equiángulos lo son). Estas actividades, van muy bien para hacer ver que dichas nociones no son equivalentes. Al mismo tiempo mediremos ángulos sobre la trama (para comprobar , según el caso, que son o no equiángulos).

6.- "Transformaciones y semejanzas".

N) "Dibujar polígonos semejantes"

Dar polígonos y pedir otros semejantes (dando o no la razón de semejanza).

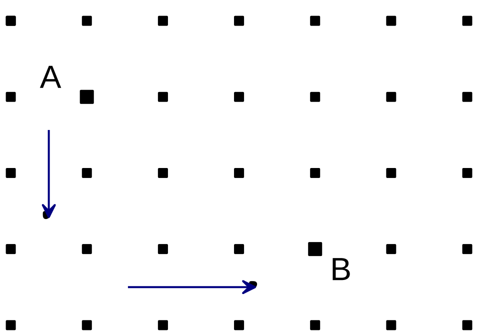
Dibujar polígonos y solicitar si son o no semejantes.

Dar un polígono y pedir que encuentren todos los que puedan semejante al dado (Va bien poner un rectángulo; algunos alumnos creen que todos los rectángulos son semejantes). Aprovechar para hablar de que 'ángulos iguales' es una condición necesaria, pero no suficiente.

Dar un polígono y una razón de semejanza y pedir que encuentren todos los que puedan semejantes.

7.- "Combinatoria".

Se dibujan todos los caminos posibles desde A a B, siguiendo el camino de las flechas. ¿cuántos hay? ¿qué método has seguido para obtenerlos todos?"



8.- "Teorema de Pick".

Otra actividad interesante sobre la trama, consiste en calcular áreas de las figuras, en función del número de puntos (interiores y sobre el borde).

Esta actividad se puede plantear a muchos niveles (con o sin pautas).

Se puede plantear con una gradación de las pautas. Un primer enunciado consistirá en que la figura no tenga puntos interiores. Luego se puede generalizar, o plantear que haya un punto interior; etc.

El objetivo será obtener la fórmula de Pick:

$$\mathbf{S = (f + 2i - 2)/2}$$

f = nº de puntos en la **frontera**. **i** = nº de puntos **interiores**.

(esta fórmula vale para polígonos cóncavos y convexos. Ojo! con los estrellados).

Esta actividad es de tipo inductivo y requiere que el alumno organice su trabajo. Está, además, entroncada con el álgebra al obtenerse expresiones algebraicas.

Supone, por otro lado, una actividad muy interesante de conjeturas y pruebas.

Una vez obtenida la fórmula, el profesor debe indicar la restricción en el caso de los polígonos estrellados, en el que puede fácilmente comprobarse que no vale la fórmula (ello sin entrar en lo que sea el área de un polígono estrellado, A estos efectos, tal área es considerada no como la del estrellado sino como la de la adjunción de los polígonos que la componen).

ACTIVIDAD I.

Alhambra (Patio Leones)

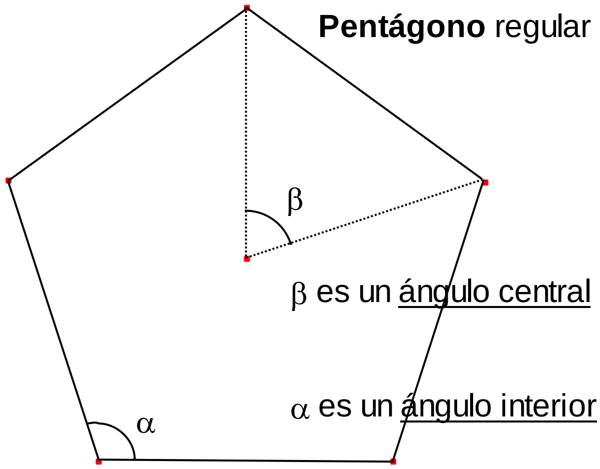
No es necesario que te explique qué es un mosaico. Lo habrás visto en muchos sitios.
El mosaico que reproducimos a la izquierda se conoce popularmente como “Aviones” y está en el Patio de los Leones de la Alhambra de Granada.
Cada “avión” de la figura es una **tesela** y, con ellas, se recubre la pared (o el suelo) dando lugar al mosaico que se observa.
En esta primera actividad nos centraremos en los mosaicos cuyas teselas son polígonos regulares.

1) Utilizando las teselas que te vamos a facilitar, construye algunos mosaicos y haz un dibujo a mano alzada de cada uno de ellos. (En cada mosaico puedes utilizar uno o varios tipos de teselas).
2) Utilizando solamente teselas octogonales (octógonos regulares), ¿puedes construir un mosaico? ¿Por qué? Razona tu respuesta y escríbela.
3) ¿Y utilizando pentágonos regulares? (Si no se te ocurre la respuesta, inténtalo después de hacer la siguiente actividad).

ACTIVIDAD II.

Ángulos en los Polígonos Regulares.

Se llama **ángulo interior** de un polígono al ángulo determinado por dos lados consecutivos.
Se llama **ángulo central** de un polígono regular al ángulo determinado por dos radios consecutivos (el radio es el segmento que une el centro del polígono regular con un vértice).



1) En el pentágono regular, ¿cuánto vale el ángulo α ? ¿y el ángulo β?
2) La misma pregunta anterior para el hexágono.
3) Rellena la tabla que figura a continuación. (En la última fila se te pide que generalices el resultado para un polígono regular de **n** lados).

Polígono regular.	Ángulo Central	Ángulo Interior	Suma de ángulos Interiores
Triángulo			
Cuadrado			
Hexágono			
Octágono			
Dodecágono			
Polígono de n lados			

ATENCIÓN: Para el polígono de n lados has de dar una **fórmula**!!

4) Utilizando la fórmula obtenida, calcula el ángulo interior de un pentágono regular.

Sesión 7. **Utilización de recursos: enseñanza experimental I. (Segunda parte)**

ACTIVIDAD III.

MOSAICOS REGULARES

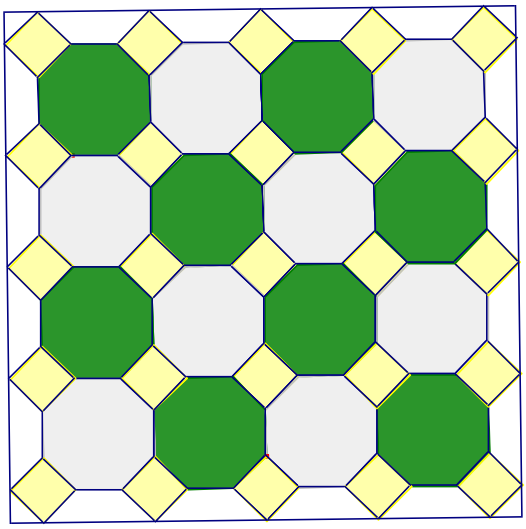
En esta actividad nos vamos a centrar en mosaicos construidos con un solo tipo de tesela (como el Avión de la primera actividad).

Se llaman **mosaicos regulares** aquellos que están construidos con un solo tipo de tesela con forma de polígono regular.

1) ¿Podrías decir qué polígonos regulares dan origen a mosaicos regulares y cuáles no?
Dibuja a mano alzada todos los mosaicos regulares.
2) Uniendo los centros de los polígonos de un mosaico regular M, se obtiene otro mosaico **M’** que se denomina **dual de M.** Dibuja los duales de los mosaicos regulares (¿hay alguno que sea dual de sí mismo?)

ACTIVIDAD IV.

Vamos ahora a utilizar más de un tipo de teselas.
Un mosaico como el de la figura se dice que es **semirregular**. Está formado por octógonos y cuadrados.



Mosaico semirregular, 4, 8, 8

Con las teselas que te hemos facilitado construye los siguientes mosaicos y dibújalos a mano alzada.

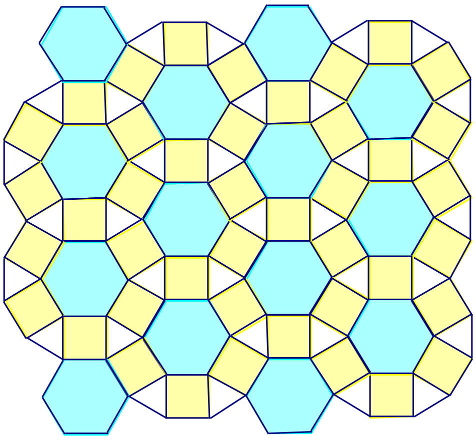
1) Utilizando dos tipos de teselas: hexágonos y triángulos equiláteros.
2) Tres tipos de teselas: hexágonos, cuadrados y triángulos equiláteros.

Toma nota: Cuando construimos un mosaico decimos en matemáticas que hemos "**recubierto el plano**" (también se dice que hemos "completado el plano").

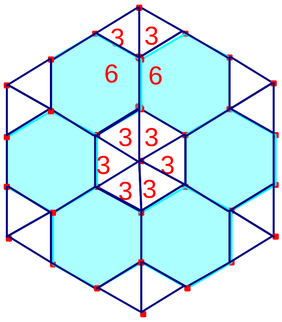
3) Utilizando solamente hexágonos y octógonos, ¿puede recubrirse el plano?

ACTIVIDAD V. **Mosaicos semirregulares.**

Rodeando un vértice de este mosaico se observa: un cuadrado, un triángulo equilátero, otro cuadrado y un hexágono. Diremos que el vértice tiene la **configuración** (o tienen el código): **4,3, 4,6**.
Un mosaico es semirregular cuando **todos sus vértices** tienen **la misma configuración** y, además, las teselas son polígonos regulares.



Mosaico semirregular 4,3,4,6



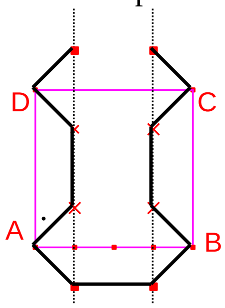
Sin embargo, el mosaico de la izquierda, **no es semirregular** pues hay vértices del tipo 3,3,6,6 y otros del tipo 3,3,3,3,3,3.

A) Sólo hay dos mosaicos semirregulares que contengan un dodecágono. ¿Podrías indicar qué otro, u otros polígonos lo componen y cuál sería la configuración de sus vértices? Haz en cada caso un dibujo a mano alzada.
B) Sólo hay dos mosaicos semirregulares que contengan triángulos y hexágonos (sólo estos dos tipos de teselas). Di la configuración de los vértices de cada uno de ellos.
C) Sólo hay dos mosaicos semirregulares que contengan triángulos y cuadrados (sólo estos dos tipos de teselas). Di la configuración de los vértices de cada uno de ellos.

En la actividad anterior tienes el mosaico semirregular **4,8,8**. Al comienzo de esta actividad está el mosaico semirregular **4,3,4,6.** Estos dos, junto con los seis de los apartados anteriores hacen un total de ocho mosaicos semirregulares…..que son todos los que hay (¡no hay más!).

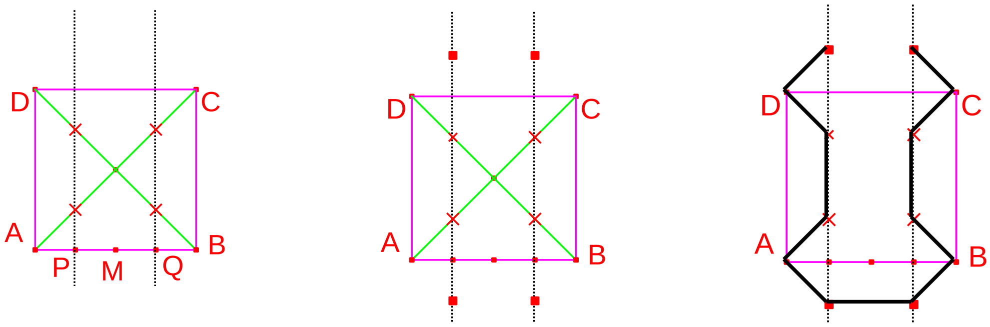
ACTIVIDAD VI.

He aquí nuevamente el mosaico conocido como el Hueso y, al lado, la tesela correspondiente



EL HUESO es un polígono de doce lados no regular y cóncavo.

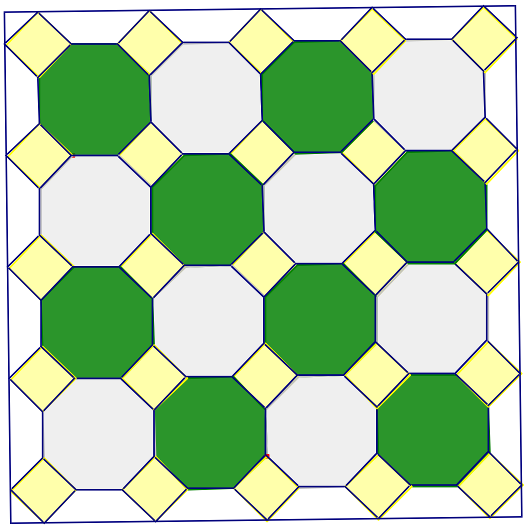
1) Observando el proceso de construcción,



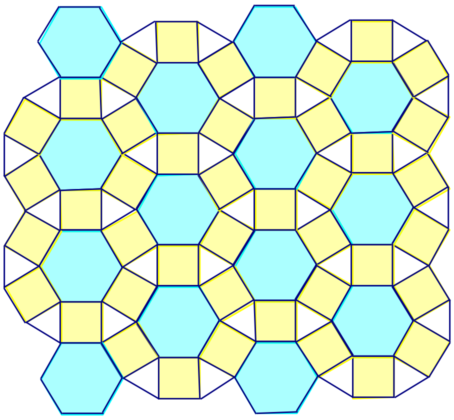
1A.- ¿Podrías decir cuánto valen los ángulos interiores del **polígono nazarí** (que así se llama también El Hueso)?

1B.- ¿Cuánto vale su perímetro y cuánto su área, tomando como unidad el lado y el área del cuadrado respectivamente?

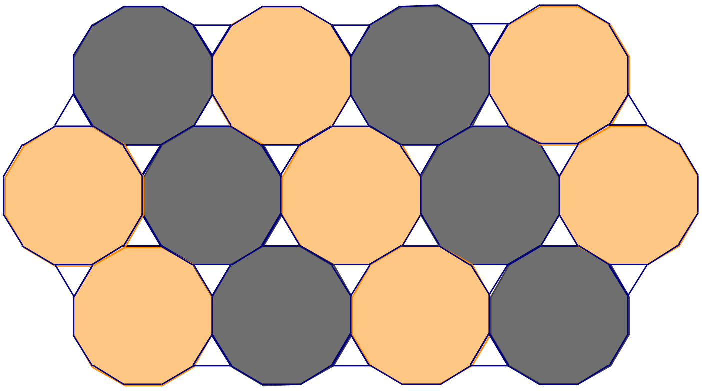
ACTIVIDAD VII.
He aquí cuatro mosaicos semirregulares.



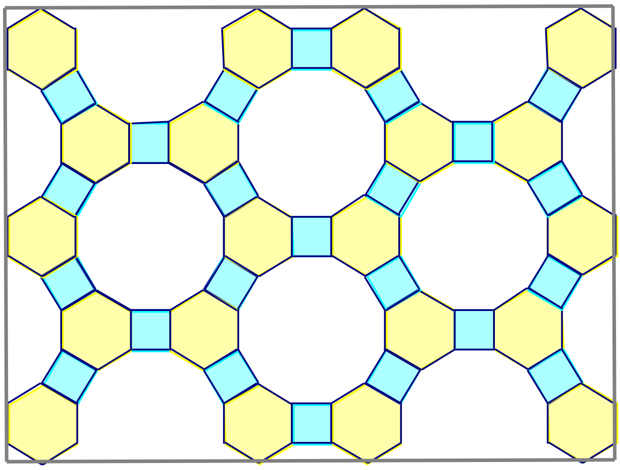
Mosaico semirregular, 4, 8, 8



Polígono semirregular 4, 3, 4, 6



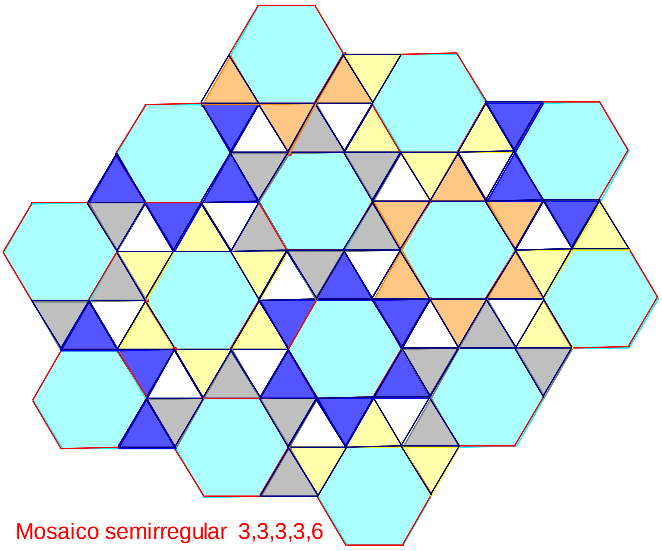
Mosaico semirregular 3, 12, 12



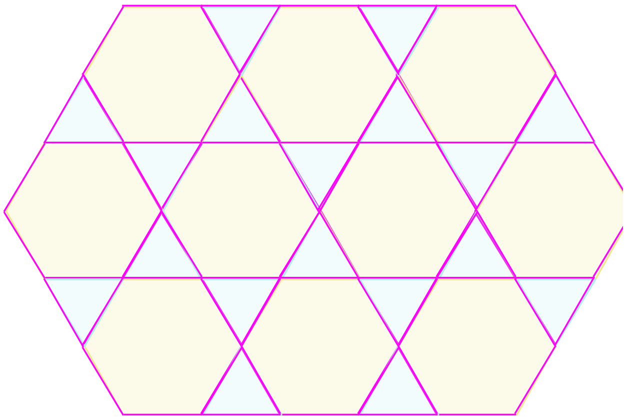
Mosaico semirregular 4,6,12

ACTIVIDAD VIII.

Y aquí los otros cuatro:

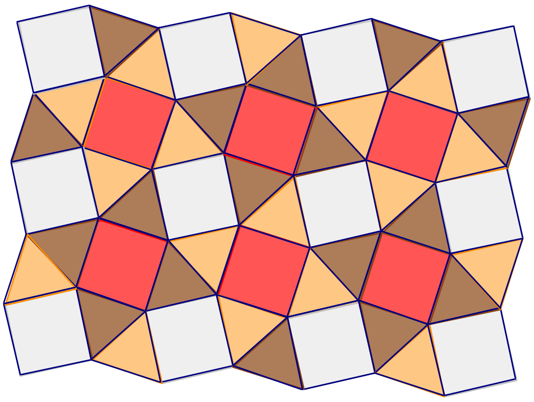


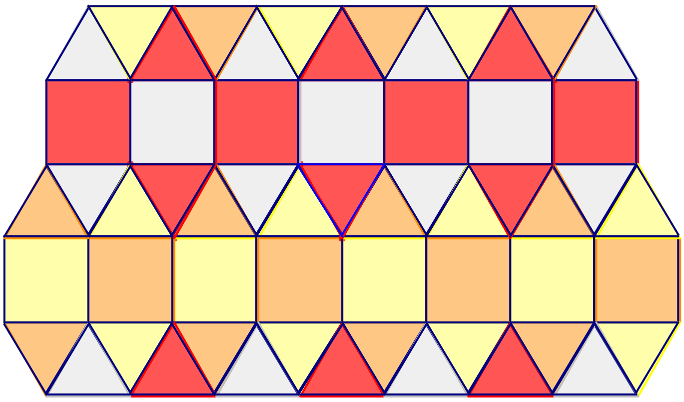
Mosaico semirregular 3,3,3,3,6



Mosaico semirregular 3,6,3,6

Mosaico semirregular 3,3,4,3,4





Mosaico semirregular 3,3,3,4,4