Recursos Metodológicos para la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas por la Universidad de Sevilla

Sesión 5: **Resolución de Problemas (I)**

Antonio J. Pérez Jiménez
Sevilla, 15-02-10

¿Existe en Andalucía dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

Si el máximo número de pelos está acotado por 100.000,
como en Andalucía hay más de 8 millones de personas, es
seguro que existen dos al menos con igual número de pelos en la cabeza.
(es más existirán, al menos, 80).

El Principio del palomar

► Si disponemos de n cajas para colocar n+k bolas hemos de colocar más de una bola en alguna caja.

► Cualquier aplicación de un conjunto de n+k (k>0) elementos en otro de n elementos no puede ser inyectiva.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

El Principio del palomar

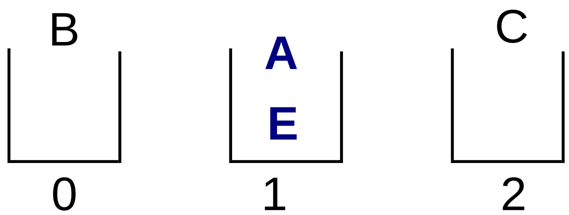
SALUDOS

A una fiesta asisten parejas de cónyuges. La anfitriona, **A**, observa que todos los demás han saludado a un número distinto de personas.
¿A cuántas personas ha saludado su cónyuge, **E**?

=========================

Caso particular de dos parejas.

Utilizando el **principio del palomar** y las hipótesis del problema, es obvio que tanto **A** como **E** están en la caja central:



Esto provoca , 'por simetría', una evidencia muy fuerte de la siguiente

Conjetura:
Tanto A como E están en la caja central.

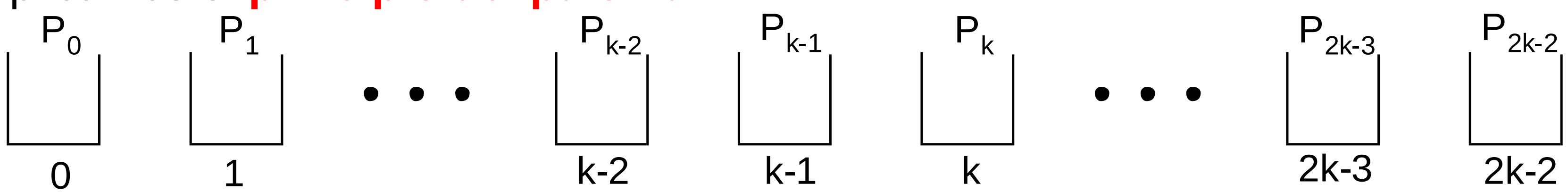
John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

El Principio del palomar

SALUDOS

Prueba:
Caso general. Designemos el problema por **PRO(k)**.

Aplicamos el **principio del palomar**:



● En cada caja habrá una persona salvo en una cierta caja en la que, <u>además</u>, estará **A**.

● P_{2k-2} ha saludado a <u>todos</u> salvo a su cónyuge.
Luego: en la caja 0 <u>sólo</u> está su cónyuge, P_0
y, por, tanto, en la caja *2k-2* <u>sólo</u> está P_{2k-2}

► Consecuencia: **A** y **E** no están en las cajas extremos 0, 2k-2 ◄

● ● Luego el problema **se reduce** a resolver “el problema anterior” **PRO(k-1)**.

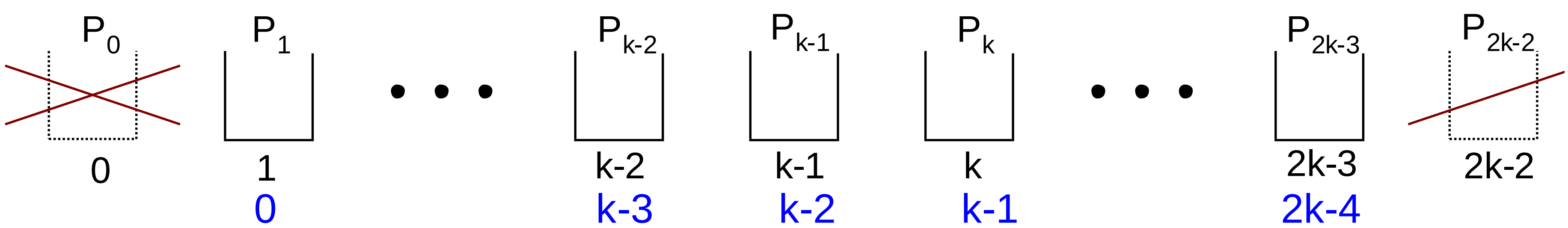
John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

El Principio del palomar

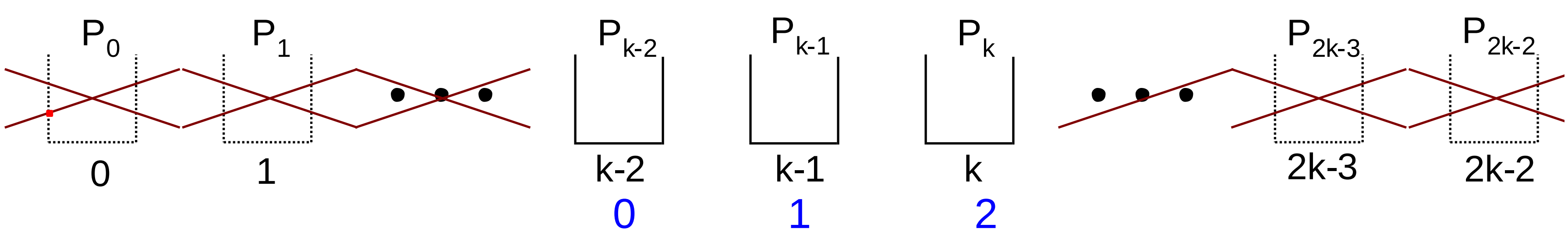
SALUDOS

Prueba:

- • El problema **se reduce** a resolver “el problema anterior” **PRO(k-1)**.



Razonando por **inducción** descentente, el problema se reduce al “primer caso” **PRO(1)**, que ya hemos resuelto:

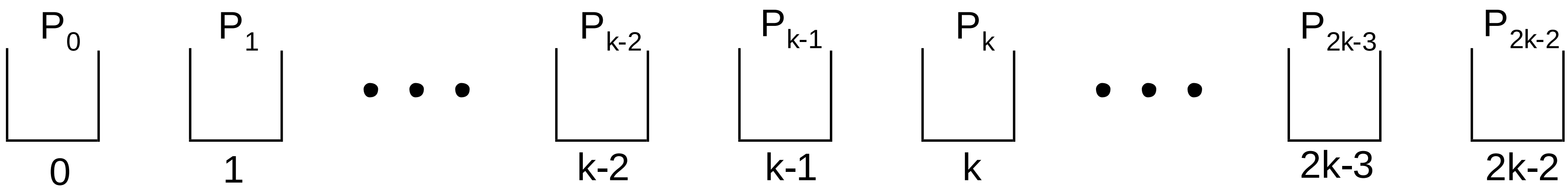


SOLUCIÓN: **E** ha saludado a ***k-1*** personas.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

El Principio del palomar

SALUDOS



Otras consecuencias:

► **E** es P_{k-1}

► **A** ha saludado también a k-1 personas

► Cada pareja está situada en sendas cajas, simétricas respecto de la caja central P_{k-1} (en otras palabras, la pareja de P_j es P_{2k-2-j})

► Tanto A como E han saludado exactamente a los situados en las cajas de la derecha, es decir, a $P_k, \ldots, P_{2k-2}$.

Dimitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg
Mathematical Circles
(Russian Experiencie)
American Mathematical Society. USA, 1996

El Principio del palomar

TORNEO

En un cierto torneo de tenis cada jugador ha de enfrentarse a todos los demás, jugando un partido en cada caso.
Probar que en cualquier momento del torneo existen dos jugadores que han jugado el mismo número de partidas.

·k jugadores
Cajas: 0, 1, 2, ···, k-1 (partidas posibles de un jugador)

- Si algún jugador ha jugado k-1 partidas, entonces nadie ha jugado 0 partidas, por tanto hay dos jugadores que han jugado el mismo número de partidas.
- Si ningún jugador ha jugado k-1 partidas, entonces hay dos jugadores que han jugado el mismo número de partidas

Dimitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg
Mathematical Circles
(Russian Experiencie)
American Mathematical Society. USA, 1996

El Principio del palomar

MÚLTIPLOS

Sea A={1,2,3, …, 1000} el conjunto de los mil primeros números naturales. Probar que en cualquier subconjunto de A con 501 elementos hay al menos dos números tales que uno es múltiplo del otro.

Tomemos **500 cajas** numeradas con los **números impares**.

- Un número n lo colocamos en la caja correspondiente a su mayor divisor impar. De esta manera distribuimos todos los números en las cajas (y dos números cualesquiera de una caja verificaran que uno es múltiplo del otro).

- Por tanto, cualquier subconjunto contendrá al menos dos número de alguna caja.

Dimitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg
Mathematical Circles
(Russian Experiencie)
American Mathematical Society. USA, 1996

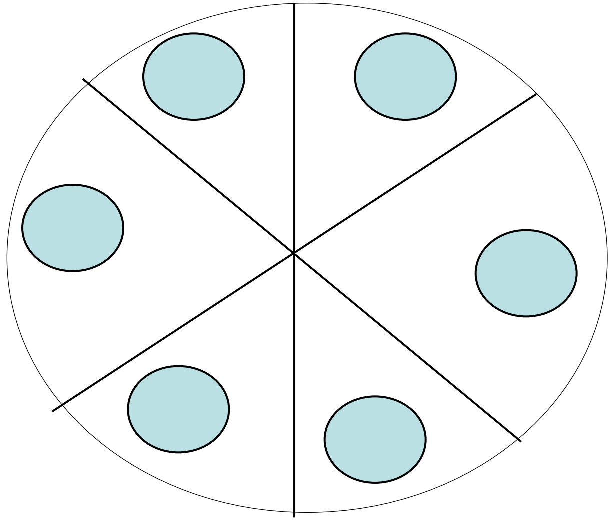
Invariantes

FICHAS EN SECTORES

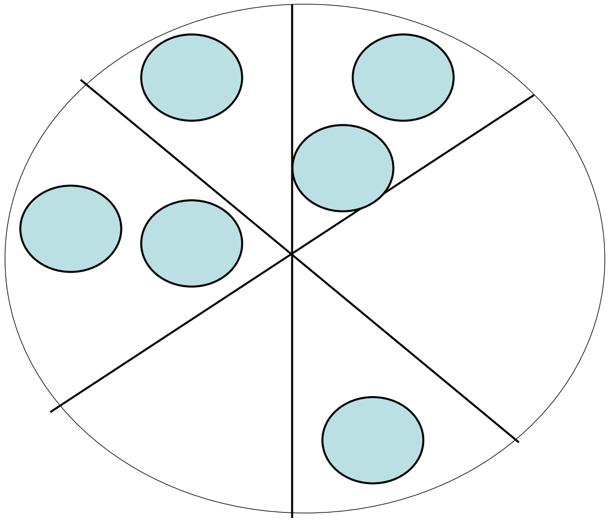
Se divide un círculo en seis sectores y se coloca una ficha en cada uno de ellos. Se mueven simultáneamente dos fichas colocando cada una en uno de los sectores adyacentes al que ocupa. Esta operación puede repetirse tantas cuantas veces se desee.

¿Puede conseguirse que todas las fichas acaben, en algún momento, en el mismo sector?

.



Inicio



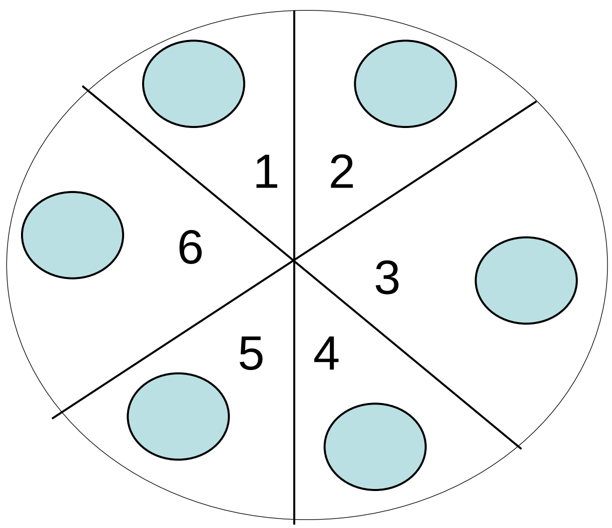
Un movimiento

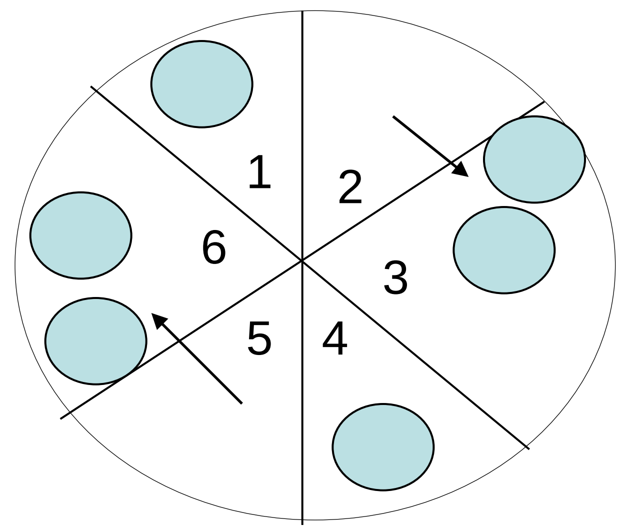
Dimitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg
Mathematical Circles
(Russian Experiencie)
American Mathematical Society. USA, 1996

Invariantes

FICHAS EN SECTORES

Numeramos los sectores del 1 al 6 y consideramos la **suma**.





$1+2+3+4+5+6 = 21$

$1+3+3+4+6+6 = 23$

En cada movimiento se conserva la paridad.
La situación inicial es **impar**. La situación objetivo pedida es **par**.
Luego no es posible.

George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Espacio por cinco planos en posición general?

Por 0, 1 plano.

n	E
0	**1**
1	**2**
2	
3	
4	
5	

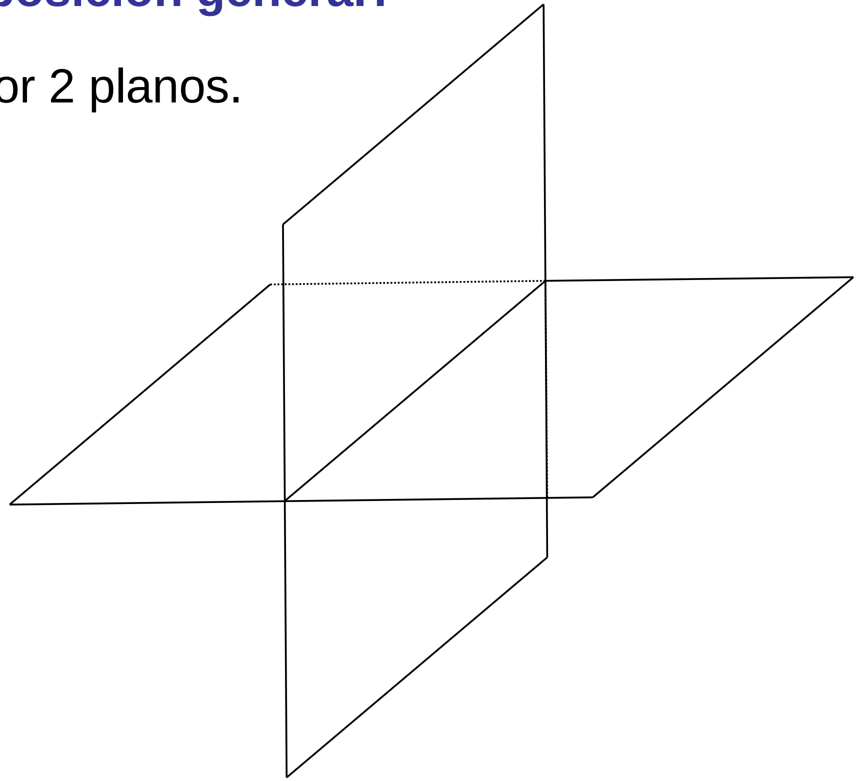
George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Espacio por cinco planos en posición general?

Por 2 planos.



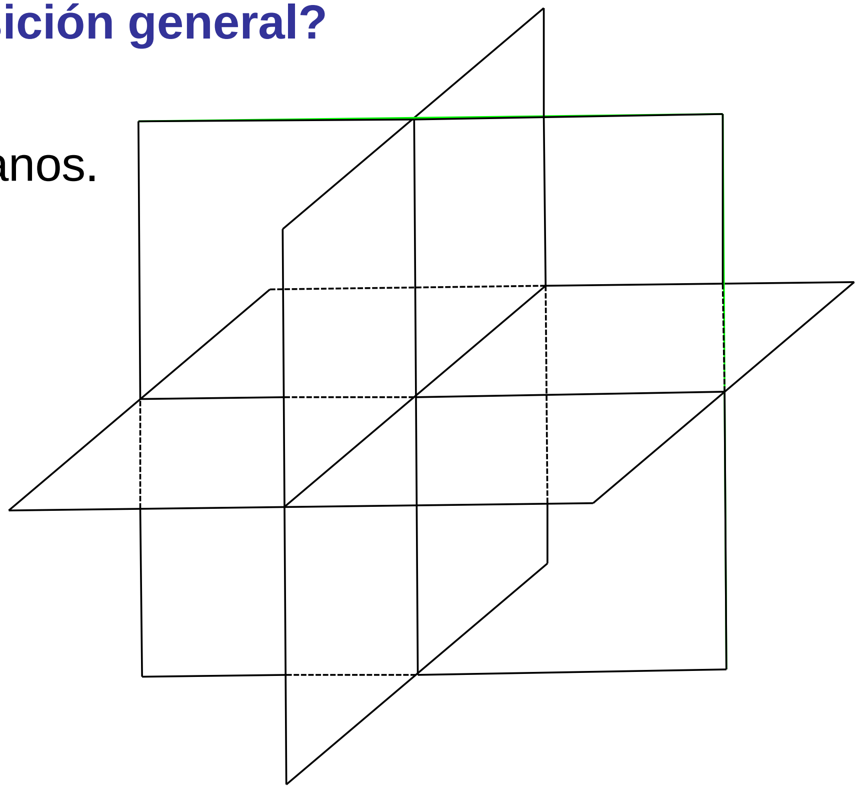
n	E
0	1
1	2
2	4
3	
4	
5	

George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

REGIONES
¿En cuántas partes queda dividida el Espacio por cinco planos en posición general?

Por 3 planos.



n	E
0	1
1	2
2	4
3	**8**
4	
5	32 ?

Conjetura 1: Solución 32 planos

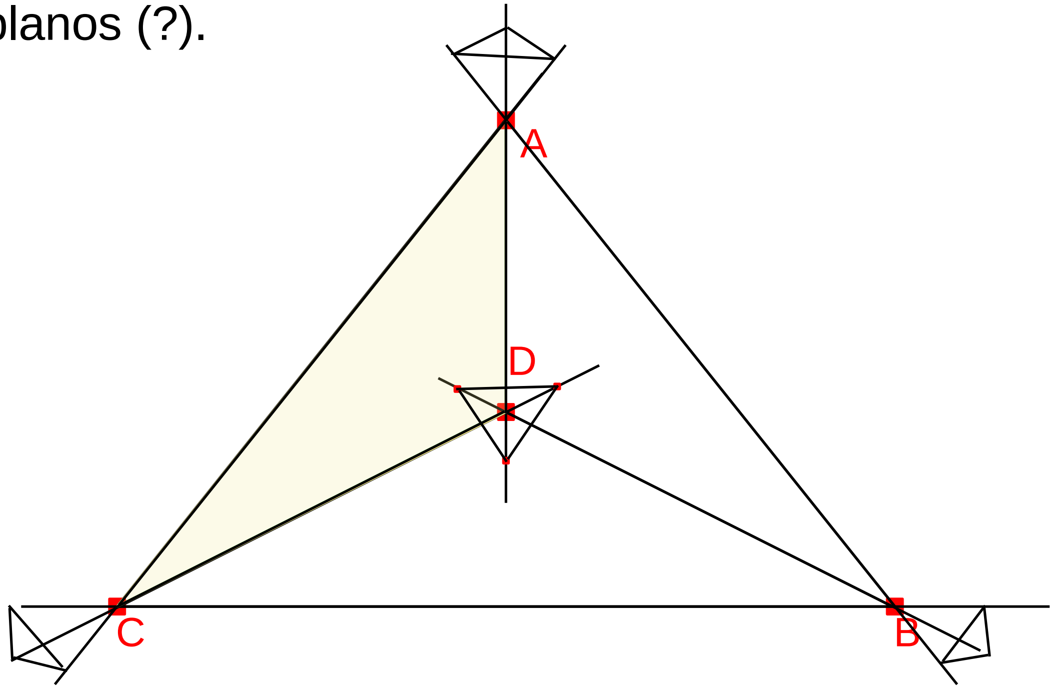
George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Espacio por cinco planos en posición general?

Por 4 planos (?).



n	E
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16 ?
5	

Veamos qué ocurre en el Plano.

George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

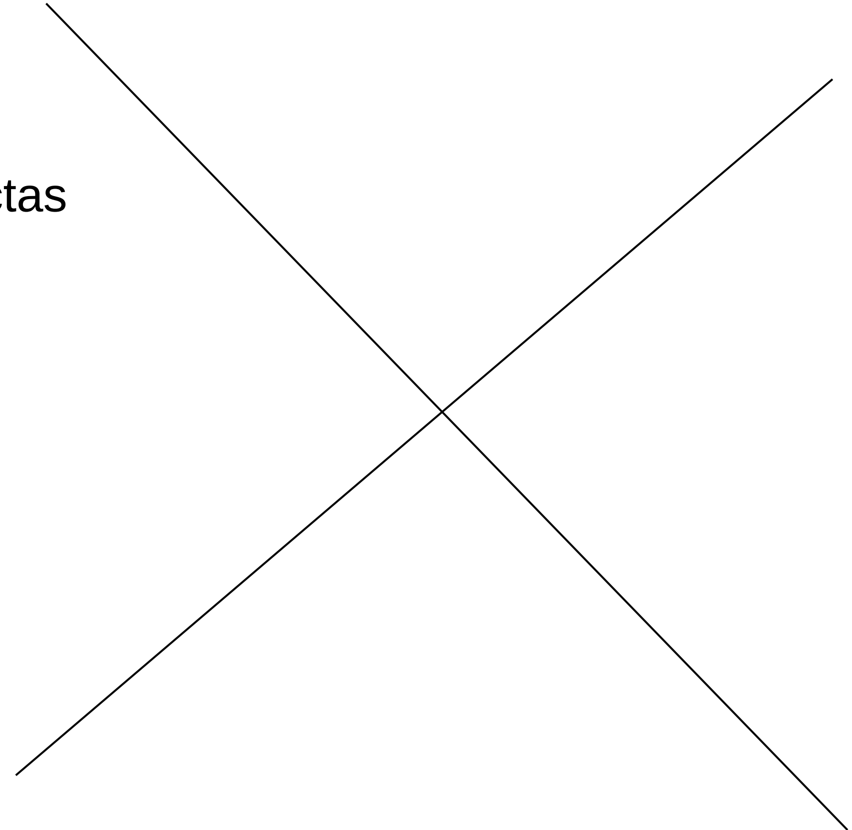
Analogías

En el Plano

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Plano por cinco rectas en posición general?

Por 0, 1, 2 rectas



n	E	P
0	1	**1**
1	2	**2**
2	4	**4**
3	8	
4	**?**	
5		

George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

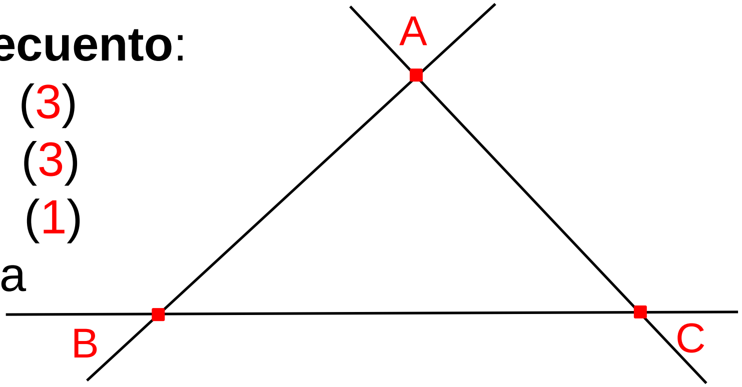
En el Plano

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Plano por cinco rectas en posición general?

Por tres rectas:

Organicemos el recuento:
1 por cada vértice. (3)
1 por cada lado. (3)
1 por cada cara. (1)
(región determinada
por el triángulo)



n	E	P
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	**7**
4	**?**	
5		

Trasvasemos esta organización al espacio (Analogía)

George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

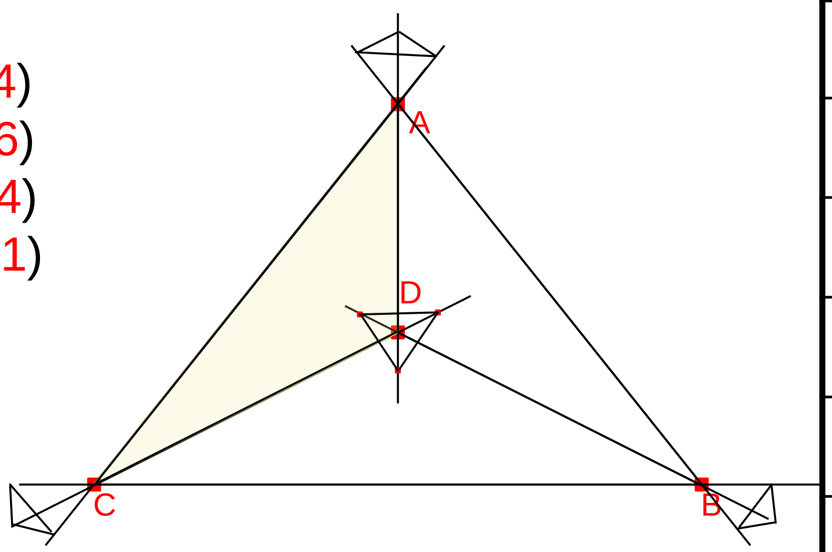
En el Espacio

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Espacio por cinco planos en posición general?

Organicemos el recuento:

1 por cada vértice. (4)
1 por cada lado. (6)
1 por cada cara. (4)
1 por el tetraedro (1)



n	E	P
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	7
4	**15**	
5		

Y la conjetura 1 es falsa.

George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

En el Espacio

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Espacio por cinco planos en posición general?

Emerge una nueva conjetura en la tabla:

n	E	P
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	**8**	**7**
4	**15**	
5		

Conjetura 2: **E(n) = E(n-1) + P(n-1)**

Sigamos, pues, con el Plano.

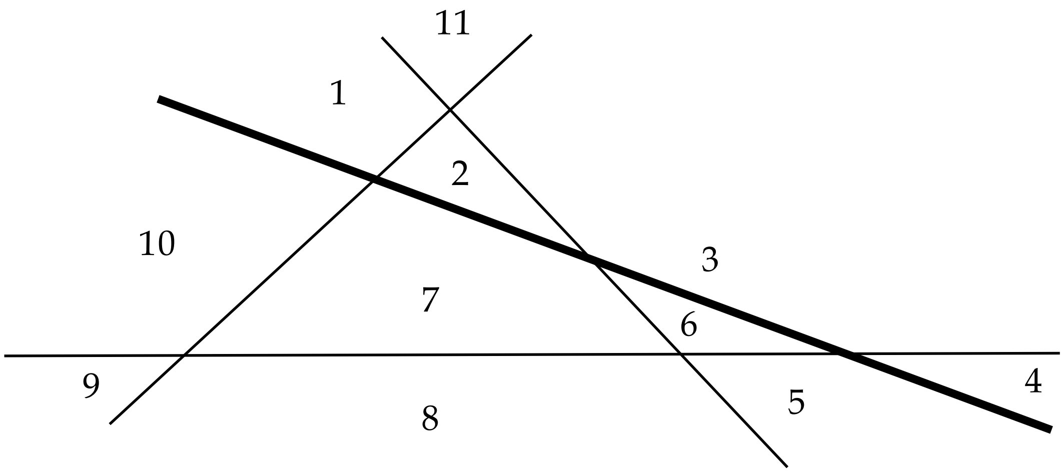
George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

En el Plano

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Plano por cuatro rectas en posición general?



n	E	P
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	7
4	15	**11**
5		

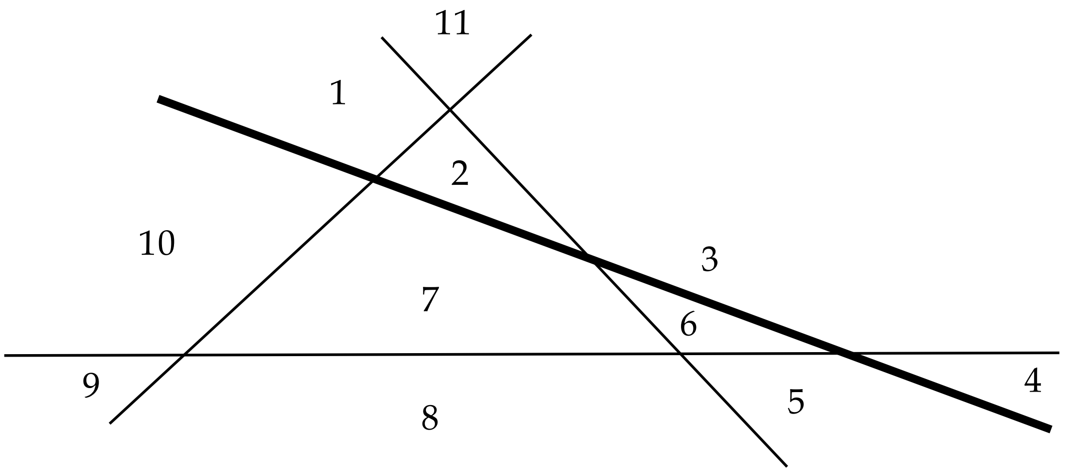
George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

En el Plano

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida el Plano por cinco planos en posición general?



n	E	P
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	7
4	**15**	**11**
5	**26**	

Y, según nuestra conjetura 2, la solución será **15 + 11** = **26**

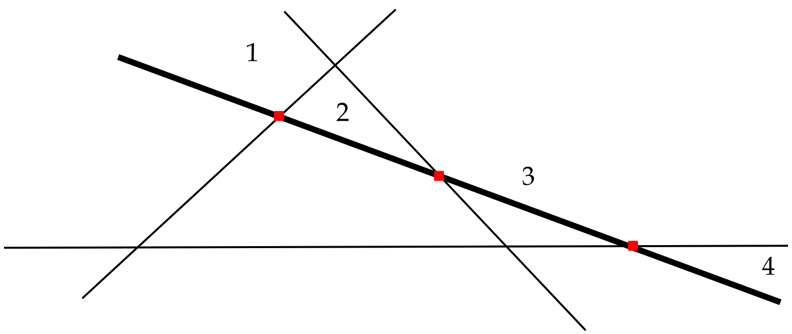
George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

En el Plano.
Generalización

REGIONES
¿En cuántas partes queda dividida el Plano por cinco planos en posición general?

Una cuarta recta añade 4 nuevas regiones
P(4) = P(3) +4 = 7 + 4 = 11



n	E	P
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	7
4	15	11
5	26	

4

La generalización es inmediata:
P(0)= 1; P(n) = P(n-1) + n para n>0;

O sea: $P(n) = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

George Polya
Matemáticas y razonamiento plausible
Editorial Tecnos S. A.
Madrid, 1966

Analogías

En a Recta y
Generalización de la tabla

REGIONES

¿En cuántas partes queda dividida la Recta por n puntos distintos?

Consideramos el problema sobre la Recta.
Obtenemos entonces la siguiente tabla:

n	E	P	R
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	11	5
5	**26**	**16**	6
6	42	22	7

Con las relaciones: **P(n) = P(n-1) + R(n-1)**
E(n) = E(n-1) + P(n-1)

Que nos permite ir completando la tabla
de una manera muy sencilla y conjeturamos que para
6 planos el espacio se divide en 42 regiones.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

Conjeturas. Pruebas. Teoremas

SUMA DE CONSECUTIVOS

Algunos números se pueden expresar como suma de una sucesión de enteros positivos consecutivos. Por ejemplo, observa que:

9 = 2+3+4
11=5+6
18=3+4+5+6

Exactamente, ¿qué números tienen esta propiedad?

Casos particulares:
1=1 no se puede
2= no se puede
3= 1 + 2
4= no se puede
5= 2+3

Conjetura 1: Los números pares no verifican la propiedad.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

Conjeturas. Pruebas. Teoremas

SUMA DE CONSECUTIVOS

Conjetura 1: Los números pares no verifican la propiedad.

Casos particulares:
1=1 no se puede
2= no se puede
3= 1 + 2
4= no se puede
5= 2+3

6 = 1+2+3

La conjetura 1 es falsa.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

Conjeturas. Pruebas. Teoremas

SUMA DE CONSECUTIVOS

Casos particulares:
1=1 no se puede
2= no se puede
3= 1 + 2
4= no se puede
5= 2+3
6 = 1+2+3
7 = 3 + 4
8 = no se puede
9 = 2+3+4 = 4+5

Teorema: La descomposición no es única

Conjetura 2: Los impares verifican la propiedad

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

Conjeturas. Pruebas. Teoremas

SUMA DE CONSECUTIVOS

Casos particulares:
1=1 no se puede
2= no se puede
3= 1 + 2
4= no se puede
5= 2+3
6 = 1+2+3
7 = 3 + 4
8 = no se puede
9 = 2+3+4 = 4+5
10 = 1+2+3+4
11= 5+6
12 = 3+4+5
13 = 6+7
14 = 2+3+4+5
15 = 1+2+3+4+5 = 4+5+6
16 = no se puede

Conjetura 2: Los impares verifican la propiedad

Se refuerza la conjetura 2

Conjetura 3: Las potencias de 2 no verifican.

Prueba de la conjetura 2: $2k+1 = k + (k+1)$
Teorema: Todos los números impares verifican la propiedad.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

Conjeturas. Pruebas. Teoremas

SUMA DE CONSECUTIVOS

Conjetura 3: Las potencias de 2 no verifican.

Conjetura 4: Los números con factor impar verifican.

Conjetura 5: Casi todos los números con factor impar **m** tienen **m** sumandos consecutivos.

Múltiplos de 3
3 = 1+2
3x2 = 1+2+3
3x3= 2+3+4
3x4= 3+4+5
3x5= 4+5+6
…………………

Y en general;
3k = (k-1) + k + (k+1)

Múltiplos de 5
5 = 2+3
5x2= 1+2+3+4
5x3= 1+2+3+4+5
5x4= 2+3+4+5+6
5x5= 3+4+5+6+7
5x6= 4+5+6+7+8
…………………
5k = (k-2) + (k-1) + k + (k+1) + (k+2)

Se refuerza la conjetura y parece clara la prueba.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

Conjeturas. Pruebas. Teoremas

SUMA DE CONSECUTIVOS

> Conjetura 5: Casi todos los números con factor impar **m** tienen **m** sumandos consecutivos.

3k = (k-1) + k + (k+1)   5k = (k-2) + (k-1) + k + (k+1) + (k+2)

Prueba:

(2n+1)K

K

K-1   K+1

K-2   K+2

…   …………………   …

K-n   K+n

(2n+1)K = (K-n) + [K-(n-1)] + ⋯ (K-1) + K + (K+1) + ⋯ + (K+(n-1)] + (K+n)

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

Conjeturas. Pruebas. Teoremas

SUMA DE CONSECUTIVOS

Conjetura 5: Casi todos los números con factor impar **m** tienen **m** sumandos consecutivos.

Prueba: **(2n+1)K = (K-n) + [K-(n-1)] + ··· (K-1) + K + (K+1) + ··· + (K+(n-1)] + (K+n)**

EJEMPLO:

.

18 = (2x4 +1)x2 = (2-4)+(2-3)+(2-2)+(2-1)+ 2+(2+1)+(2+2)+(2+3)+(2+4)

= **-2 + -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6**

= **3 + 4 + 5 + 6**

Cuando hay números negativos, se **clausura un número impar de sumandos**: (cada número negativo con el positivo correspondiente, más el cero).
Por tanto, **siempre queda más de un sumando**.

Queda probada, además, la
Conjetura 4: Los números con factor impar verifican.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

SUMA DE CONSECUTIVOS

Conjetura 3: Las potencias de 2 no verifican.

Prueba: 1) El número descompone en un **número impar de sumandos consecutivos**:

$$(K-n) + [K-(n-1)] + \cdots (K-1) + K + (K+1) + \cdots + (K+(n-1)] + (K+n) = (2n+1)K$$

y el número tiene un factor impar.

2) El número descompone en un **número par de sumandos consecutivos.**

Entonces, se continúa la sucesión hacia abajo, pasando por el cero, hasta conseguir una suma igual al número de partida, que tendrá un número impar de sumandos.
Por el apartado anterior el número tendrá un factor impar.

John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey.
Pensar matemáticamente
MEC-Labor. Barcelona, 1988

SUMA DE CONSECUTIVOS

Conjetura 3: Las potencias de 2 no verifican.

Otra prueba, utilizando progresiones aritméticas:

Prueba de la conjetura 3:

.

$$n + (n+1) + \cdots +(n+k) = (2n +k)(k+1)/2$$

- Si k es par, 2n+k es par, k+1 es impar y el número tiene un factor impar.
- Si k es impar, k+1 es par, 2n+k es impar y el número tiene un factor impar..