Recursos metodológicos para la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas por la Universidad de Sevilla

Sesión 8

Utilización de recursos: enseñanza experimental II.

Antonio J. Pérez Jiménez
Sevilla, 24-02-10

El Problema de los Repartos (Pascal -1623/1662-)

Dos jugadores, interrumpiendo de común acuerdo el juego antes de su final, quieren hacer entre ellos un justo reparto de la apuesta, de acuerdo con la probabilidad que cada uno tiene de ganar.

Blaise Pascal
OBRAS
Ediciones Alfaguara, S.A. - Madrid, 1981

El Problema de los Repartos (Pascal -1623/1662-)

Dos jugadores, interrumpiendo de común acuerdo el juego antes de su final, quieren hacer entre ellos un justo reparto de la apuesta, de acuerdo con la probabilidad que cada uno tiene de ganar.

Blaise Pascal
1623-1662

?

1651

Antoine Gombard
(Caballero de Meré)

El Problema de los Repartos
(Pascal -1623/1662-)

Dos jugadores, interrumpiendo de común acuerdo el juego antes de su final, quieren hacer entre ellos un justo reparto de la apuesta, de acuerdo con la probabilidad que cada uno tiene de ganar.

Blaise Pascal
1623-1662

Pierre Fermat
1601-1665

El Problema de los Repartos (Pascal -1623/1662-)

Dos jugadores, interrumpiendo de común acuerdo el juego antes de su final, quieren hacer entre ellos un justo reparto de la apuesta, de acuerdo con la probabilidad que cada uno tiene de ganar.

Blaise Pascal
1623-1662

PASCALINA

Museo de Zwinger (Dresde, Alemania)

El Problema de los Repartos (Pascal -1623/1662-)

Comencemos por un juego concreto:

A y B apuestan 32 euros cada uno en un juego de partidas a Cara-Cruz. A apuesta por Cara (C) y B por Cruz (+)
Gana el primero que consiga TRES partidas.

Cuando A ha ganado DOS partidas y B UNA, se interrumpe el juego, ¿cómo repartir, entonces, la apuesta?

El Problema de los Repartos

***A* gana la apuesta en cuanto obtenga TRES Caras.**
***B* gana en cuanto salgan TRES Cruces.**

Cuando han salido DOS Caras y UNA Cruz se interrumpe el juego, ¿cómo repartir, entonces, la apuesta?

Una respuesta

Hay dos casos a favor de A

Hay un caso a favor de B

Por tanto, la probabilidad de que gane A es 2/3 y la de B es 1/3

¿? ¡ INTÉNTALO OTRA VEZ . . . . !

El Problema de los Repartos

A y B apuestan un total de 64 p. (32 p. cada uno).
El juego se interrumpe y a A le falta 1 partida para ganar y a B, 2

PASCAL:

Si se jugase una partida más:

- Si A gana se lo lleva todo.
- Si B gana estarían igualados.

Dice A:

"Estoy seguro de tener 32 porque incluso la pérdida me las da. En cuanto a las otras 32, tal vez yo las consiga, tal vez vos: la probabilidad es la misma; repartamos pues estas 32 por la mitad y dadme, además, las 32 que tengo seguras"

A => 32 + (64 - 32)/2 = 48; B => 16

El Problema de los Repartos

A y B apuestan un total de 64 p. (32 p. cada uno).
El juego se interrumpe y a A le falta 1 partida para ganar y a B, 3

PASCAL:

Si se jugase una partida más:

- Si A gana se lo lleva todo.
- Si B gana estarían **en el caso anterior**

Dice A:

"Estoy seguro de tener 48 porque incluso la pérdida me las da.
En cuanto a las otras 16, tal vez yo las consiga, tal vez vos: la probabilidad es la misma; repartamos pues estas 16 por la mitad y dadme, además, las 48 que tengo seguras"

$$\mathbf{A \Rightarrow 48 + (64 - 48)/2 = 56; \quad B \Rightarrow 8}$$

El Problema de los Repartos

A y B apuestan un total de 64 p. (32 p. cada uno).
El juego se interrumpe y a A le faltan 2 partidas para ganar y a B, 3

PASCAL:

Si se jugase una partida más:

- Si A gana estaría **en el caso anterior**.
- Si B gana estarían igualados**.**

Dice A:

"Estoy seguro de tener 32 porque incluso la pérdida me las da, y repartamos el resto de 56 (= 56 - 32) por la mitad":

A => 32 + (56 - 32)/2 = 44;   B => 20

El Problema de los Repartos

El juego se interrumpe y a A le falta 2 partidas para ganar y a B, 4

PASCAL:

Razonemos sobre la **ganancia** de A: P(2, 4)

Si se jugase una partida más:

- Si A gana se llevaría P(1, 4)
- Si B gana se llevaría P(2,3).

Dice A:

"Estoy seguro de tener P(2, 3) porque incluso la pérdida me las da. Pero, tal vez yo gane, tal vez vos: la probabilidad es la misma; me corresponden, pues, además, la mitad de la diferencia: P(1, 4) - P(2, 3)".

$$P(2,4) = P(2,3) + \frac{P(1,4) - P(2,3)}{2} = \frac{P(1,4) + P(2,3)}{2}$$

El Problema de los Repartos

A y B apuestan un total de 64 p. (32 p. cada uno).
El juego se interrumpe y a A le falta 1 partida para ganar y a B, 2

FERMAT:
El juego termina, a lo sumo, tras dos partidas más. Puede ocurrir:

AA, AB, BA, BB

Luego hay que repartir en la proporción 3:1 (=> 3/4 y 1/4)

A => 3/4 de 64 = 48; B => 1/4 de 64 = 16

Objeción de Roberval: "En cuanto A gana, se acaba la partida:

A, BA, BB

Luego debe repartirse en la proporción 2:1 (=> 2/3 y 1/3)

El Problema de los Repartos

El juego se interrumpe y a A le falta 2 partidas para ganar y a B, 4

FERMAT:

El juego termina, a lo sumo, tras cinco partidas más. Puede ocurrir:

Casos que favorecen a A:				Casos a favor de B:	
AAAAA,	AAAAB,	AAABB,	AABBB	ABBBB,	BBBBB
1	5	10	10	5	1

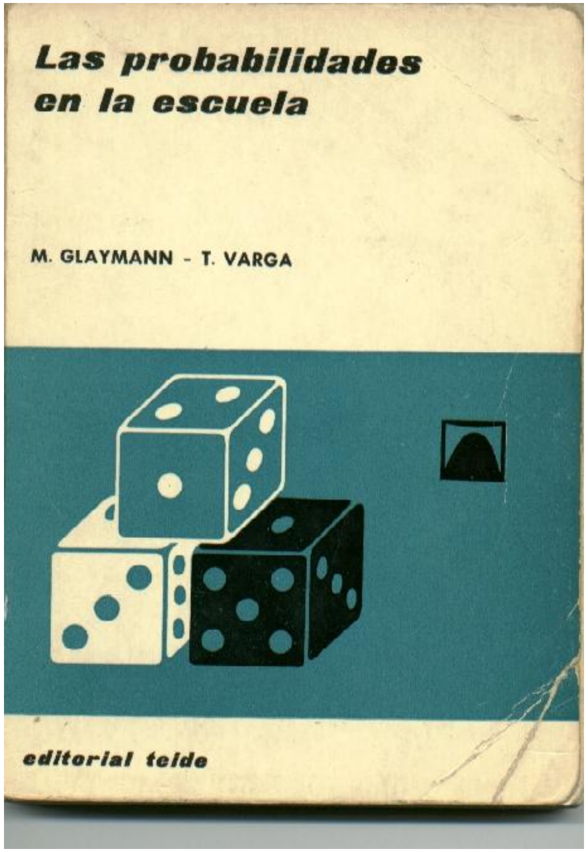
Reparto: (1+5+10+10):(5+1) = 26:6   p(A) = 26/32; p(B) = 6/32

Si cada jugador apuesta una cantidad **a**, la **ganancia** de A será:

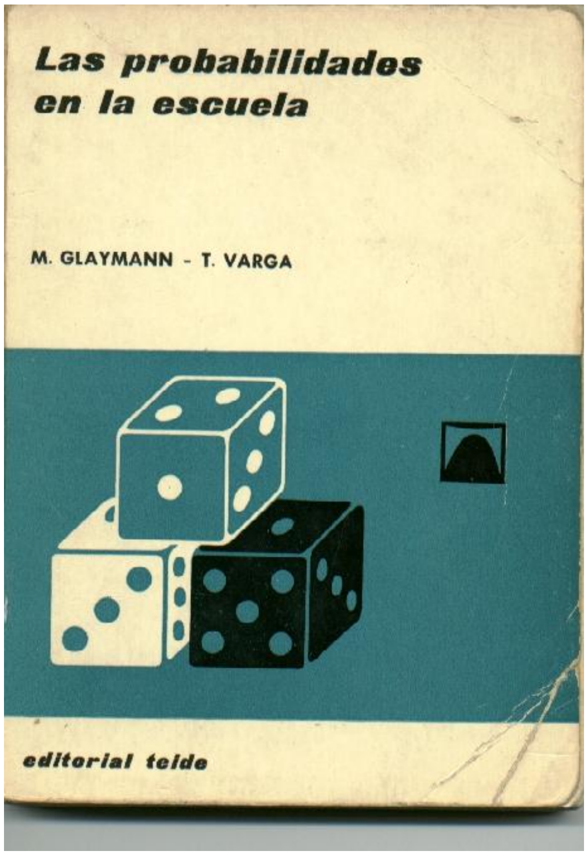
$$F(2,4) = 2ap(A) - a = a[\,p(A) - p(B)]$$

Las probabilidades en la escuela

El objetivo principal de las probabilidades es el estudio de los fenómenos aleatorios (o no deterministas). En el mundo en que vivimos, los sucesos seguros o imposibles son casos extremos; de hecho se dan raras veces. Es importante que el niño se familiarice cuanto antes con la idea de que un suceso puede ser posible pero no seguro.



Las probabilidades en la escuela

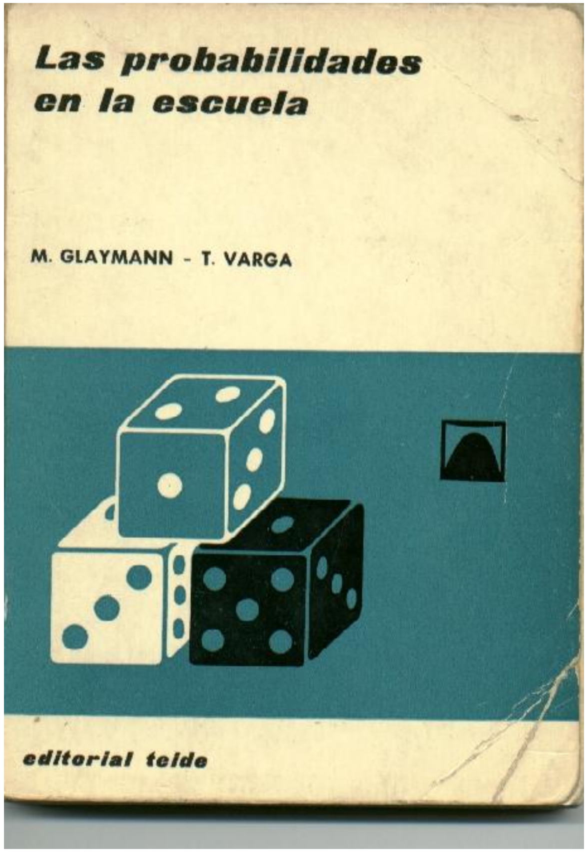


¿Cómo enseñar Probabilidades?

. Mediante experiencias y ejercicios controlados que guíen al niño hacia la intuición de que el azar tiene leyes.

. Mediante técnicas sencillas e intuitivas que le permitan expresar fácilmente las posibilidades y calcular las probabilidades asociadas.

Las probabilidades en la escuela



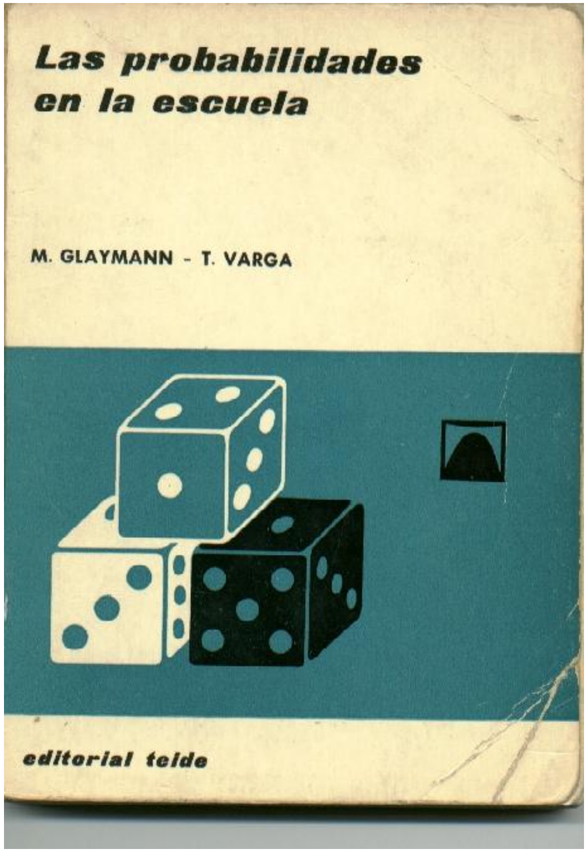
¿Cómo enseñar Probabilidades?

1.- Experimentación

2.- Razonamiento elemental

3.- Medida de probabilidad

Las probabilidades en la escuela



¿Cómo enseñar Probabilidades?

1.- Experimentación

. Manipulaciones con material variado
dados, peonzas, monedas, bolas,..

.Repetición de una experiencia.

.Observaciones de fenómenos aleatorios

1.- Experimentación

dado que marca el *mayor* número (si hay más de uno, retiran uno de los que marcan el número mayor). Así, si obtienen

retiran el dado que marca 4.
Y si obtienen

retiran uno cualquiera de los dados que señala 4.

En cada tirada los niños anotan la suma de los dos dados que quedan.

¿Tenemos resultados análogos o no a los que tendríamos calculando la suma de los puntos obtenidos al lanzar solamente dos dados?

2.7 ¿CARRERAS JUSTAS O INJUSTAS?

Dos jugadores *A* y *B* tienen cada uno una ficha que zar de casilla en casilla a lo largo de una pista, les es favorable la suerte. Lanzan, por ejemplo, y el jugador *A* avanza una casilla si sale *una* cara, *B* avanza una casilla si salen *dos* caras. Si no sale se quedan ambos donde están. El primero que lle gana.

Salida	1	2	3		30	31	3

C Z El primero avanza una casilla | C C El segundo avanza una casilla | Z Se qu su

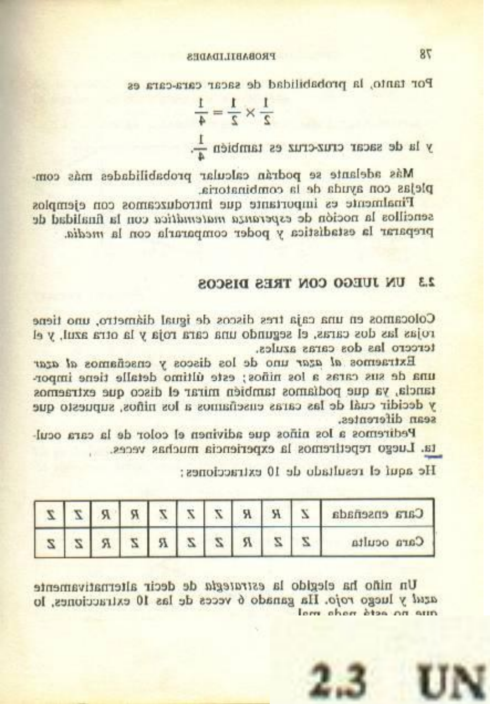
2.7 ¿CARRERAS JUSTAS O INJUSTAS?

Dos jugadores *A* y *B* tienen cada uno una ficha que hacen avanzar de casilla en casilla a lo largo de una pista, cada vez que les es favorable la suerte. Lanzan, por ejemplo, dos monedas y el jugador *A* avanza una casilla si sale *una* cara, mientras que *B* avanza una casilla si salen *dos* caras. Si no sale *ninguna* cara se quedan ambos donde están. El primero que llega a la meta gana.

Salida	1	2	3		30	31	32	meta

C Z	C C	Z Z
El primero avanza una casilla	El segundo avanza una casilla	Se quedan en su sitio

1.- Experimentación


78 PROBABILIDADES

Por tanto, la probabilidad de sacar cara-cara es

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

y la de sacar cruz-cruz es también $\frac{1}{4}$.

Más adelante se podrán calcular probabilidades más complejas con ayuda de la combinatoria.

Finalmente es importante que introduzcamos con ejemplos sencillos la noción de esperanza matemática con la finalidad de preparar la estadística y poder compararla con la media.

2.3 UN JUEGO CON TRES DISCOS

Colocamos en una caja tres discos de igual diámetro, uno tiene rojas las dos caras, el segundo una cara roja y la otra azul, y el tercero las dos caras azules.

Extraemos al azar uno de los discos y enseñamos al azar una de sus caras a los niños; este último detalle tiene importancia, ya que podíamos también mirar el disco que extraemos y decidir cuál de las caras enseñamos a los niños, supuesto que sean diferentes.

Pedíremos a los niños que adivinen el color de la cara oculta. Luego repetiremos la experiencia muchas veces.

He aquí el resultado de 10 extracciones:

Cara enseñada	Z	R	R	Z	Z	Z	R	R	Z	Z
Cara oculta	Z	Z	R	Z	Z	R	Z	R	Z	Z

Un niño ha elegido la estrategia de decir alternativamente azul y luego rojo. Ha ganado 6 veces de las 10 extracciones, lo que no está nada mal.

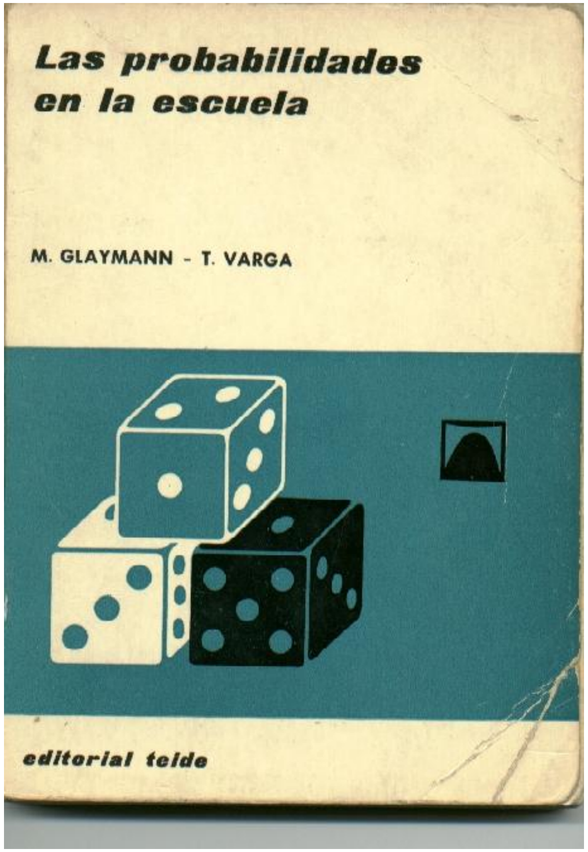
2.3 UN JUEGO CON TRES DISCOS

Colocamos en una caja tres discos de igual diámetro, uno tiene rojas las dos caras, el segundo una cara roja y la otra azul, y el tercero las dos caras azules.

Extraemos *al azar* uno de los discos y enseñamos *al azar* una de sus caras a los niños; este último detalle tiene importancia, ya que podíamos también mirar el disco que extraemos y decidir cuál de las caras enseñamos a los niños, supuesto que sean diferentes.

Pediremos a los niños que adivinen el color de la cara oculta. Luego repetiremos la experiencia muchas veces.

Las probabilidades en la escuela



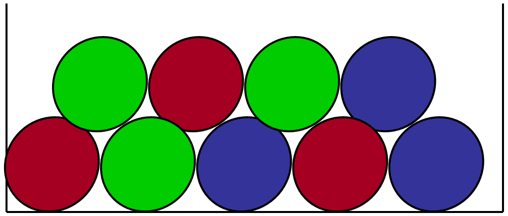
¿Cómo enseñar Probabilidades?

2.- Razonamiento elemental

.Comparar **cualitativamente** las probabilidades de ciertos sucesos

. “Más probable”, “Menos probable”

2.- Razonamiento elemental



1) Efectuamos sucesivas extracciones de cuatro bolas con reposición.

¿pueden ser del mismo color?

¿pueden ser de cuatro colores?

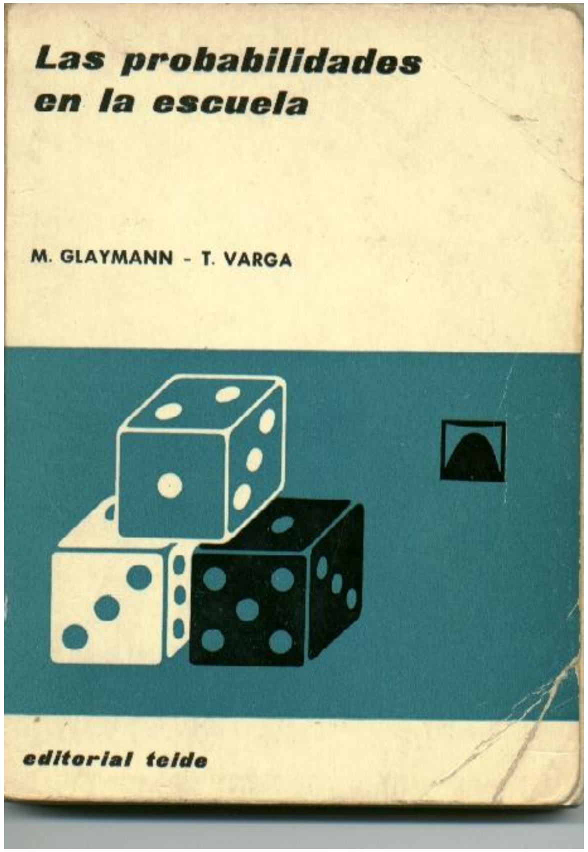
¿pueden ser de dos o tres colores. ¿cuál es el caso más probable?

¿cuántas bolas hemos de sacar para estar seguro de obtener tres colores?

2) Si las bolas están en una bolsa y extraemos con reposición una bola, repitiendo la experiencia cuantas veces queramos,

¿podríamos adivinar la composición de la bolsa?

Las probabilidades en la escuela



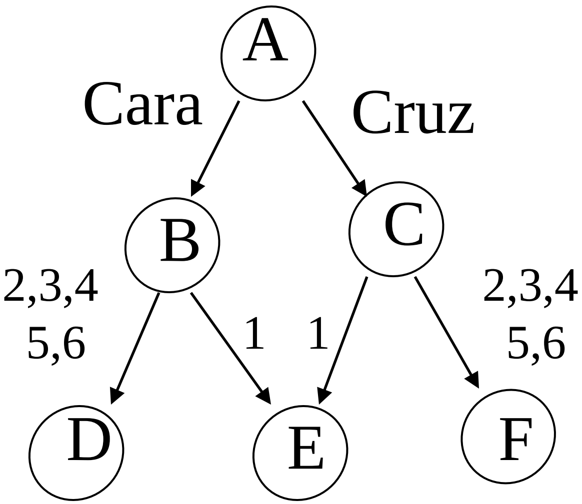
¿Cómo enseñar Probabilidades?

3.- Medida de probabilidad.

.A través de la frecuencia relativa
.Mediante situaciones sencillas en las que los niños vayan evaluando las Probabilidades.
.Con técnicas intuitivas para el cálculo.

3.- Medida de probabilidad

[Técnica: Máquina de Galton]

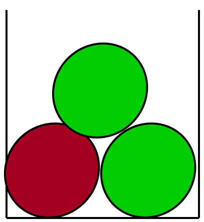


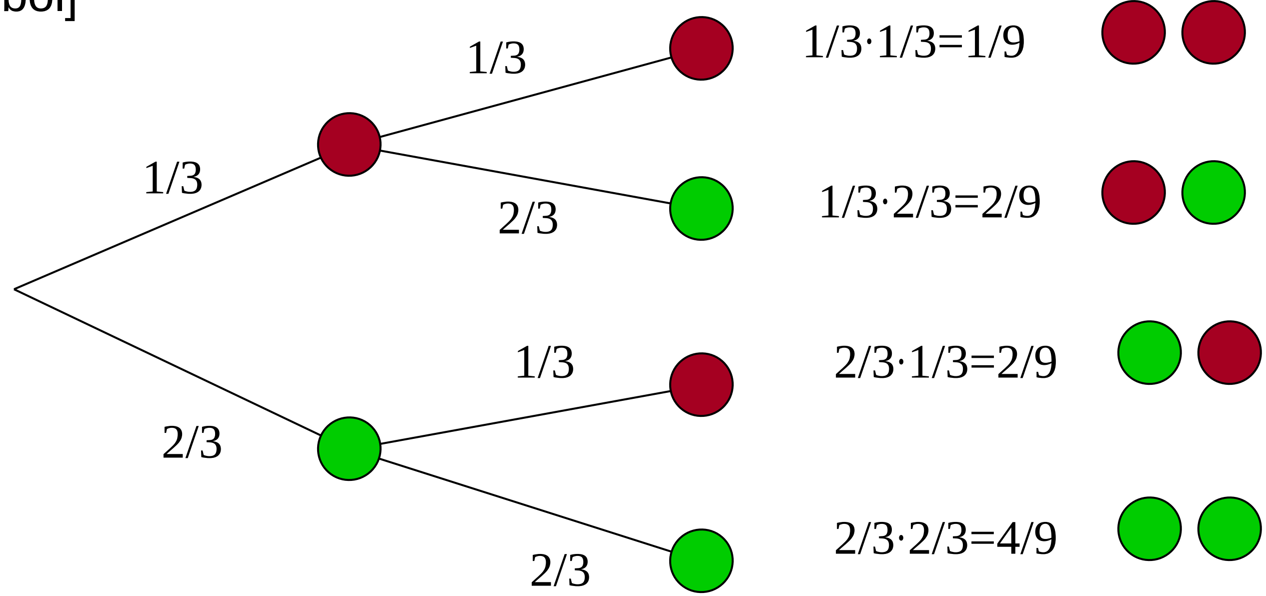
Se colocan 120 fichas en A.

¿Cuántas fichas llegarán a D y a E?

¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a F?

[Técnica: Diagrama en árbol]





3.- Medida de probabilidad

[Técnica: Diagrama en árbol]

Volviendo al problema planteado al principio en el que intervenían 19 bolas, un estudio combinatorio demuestra que hay

$$\frac{19 \times 18}{2} \quad \text{o sea} \quad 171$$

maneras de sacar dos bolas, de las que

8×6 o sea 48 corresponden al par (amarillo, azul)
8×5 o sea 40 corresponden al par (amarillo, rojo)
6×5 o sea 30 corresponden al par (azul, rojo)
$\frac{8 \times 7}{2}$ o sea 28 corresponden al par (amarillo, amarillo)
$\frac{6 \times 5}{2}$ o sea 15 corresponden al par (azul, azul)
y $\frac{5 \times 4}{2}$ o sea 10 corresponden al par (rojo, rojo)

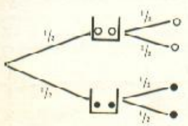
2.5 LA BOLA O LA VIDA

Esta es la historia del señor que, cansado de su astrólogo y de sus vanas promesas, decide hacerlo ejecutar. Sin embargo, buen príncipe en el fondo, le da una última oportunidad. Autoriza al astrólogo a repartir cuatro bolas, dos blancas y dos negras entre dos urnas. El verdugo elige una de las urnas y saca una bola: si es negra el astrólogo es ejecutado, si no, salva la vida.

¿Cómo pondrá el astrólogo las bolas en las urnas para asegurar la máxima probabilidad de salvarse?

Veamos los árboles que permiten analizar la situación:

1) *El astrólogo coloca dos bolas en cada urna:*



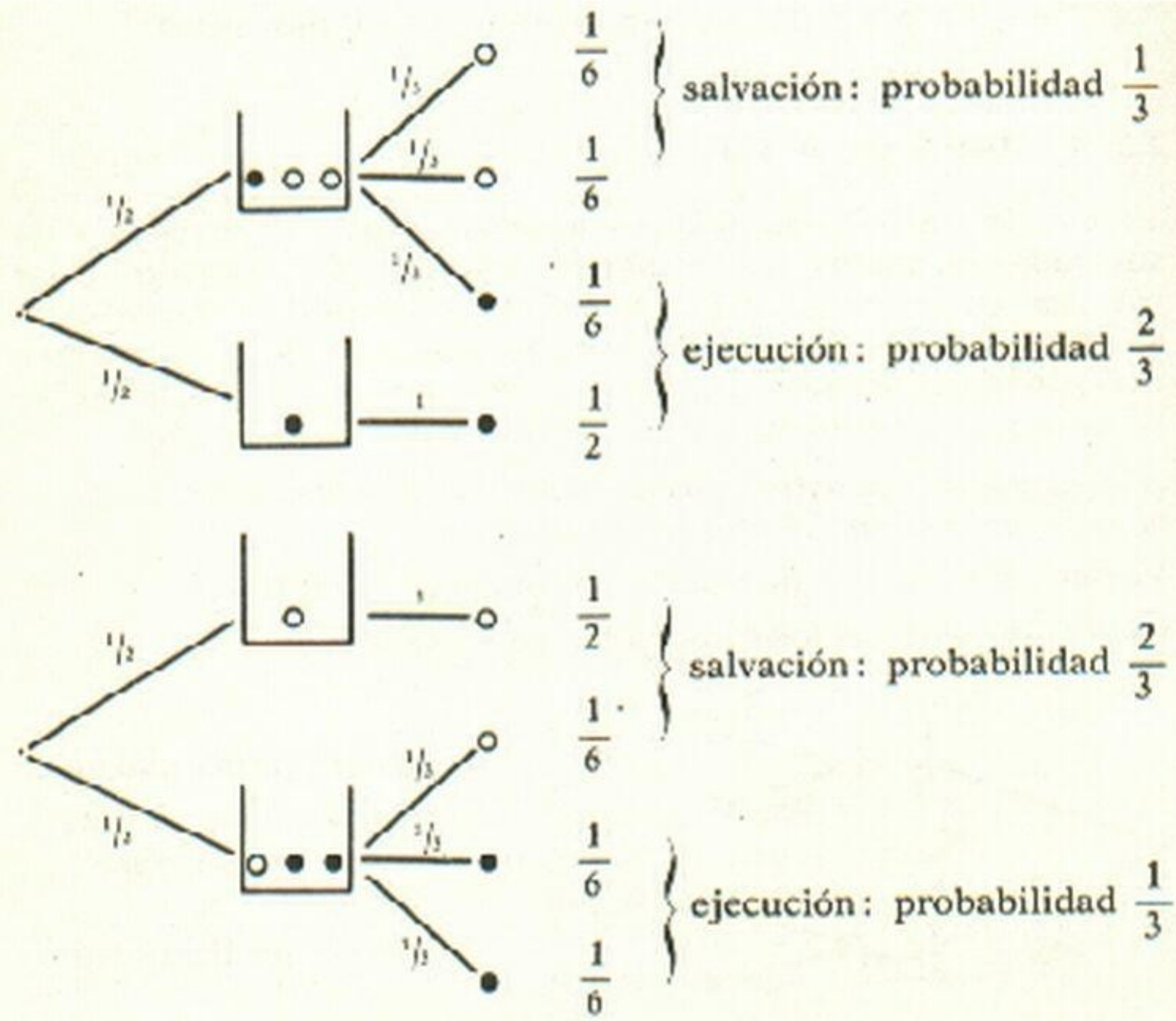
$\left.\begin{matrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{matrix}\right\}$ salvación: probabilidad $\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{matrix}\right\}$ ejecución: probabilidad $\frac{1}{2}$

2.5 LA BOLA O LA VIDA

Esta es la historia del señor que, cansado de su astrólogo y de sus vanas promesas, decide hacerlo ejecutar. Sin embargo, buen príncipe en el fondo, le da una última oportunidad. Autoriza al astrólogo a repartir cuatro bolas, dos blancas y dos negras entre dos urnas. El verdugo elige una de las urnas y saca una bola: si es negra el astrólogo es ejecutado, si no, salva la vida.

¿Cómo pondrá el astrólogo las bolas en las urnas para asegurar la máxima probabilidad de salvarse?



1/2
1/2
1/3
1/3
1/3
1
1/6
1/6
1/6
1/2
salvación: probabilidad 1/3
ejecución: probabilidad 2/3
1/2
1/2
1
1/3
1/3
1/3
1/2
1/6
1/6
1/6
salvación: probabilidad 2/3
ejecución: probabilidad 1/3

3.- Medida de probabilidad

[Técnica: Simulación]

Esta situación que ahora proponemos se debe a A. ENGEL y es análoga a la anterior:

Dos cazadores muy hábiles hacen blanco a cada tiro. Se da suelta simultáneamente a seis pichones; cada cazador dispara una vez.

¿Cuántos pichones quedan vivos por término medio?

Hay dos casos posibles:

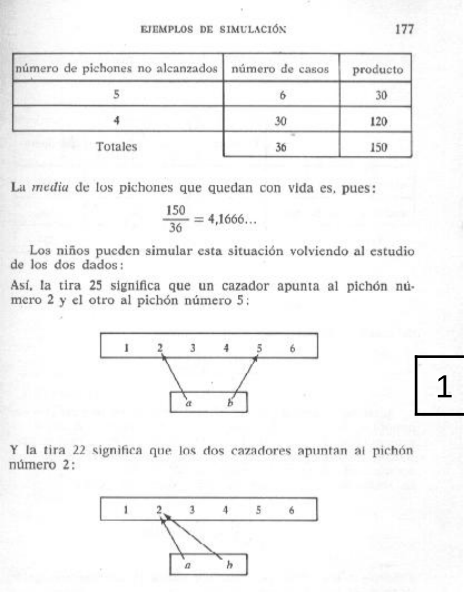
los dos cazadores apuntan al mismo pichón o bien a pichones distintos:

Dos tiradores muy hábiles hacen blanco a cada tiro.
Se lanzan simultáneamente 6 platos; cada cazador dispara una vez.
¿Cuántos platos quedarán intactos por término medio?

Simulación

0655	8453	4467	3384	5320
5255	5161	4889	7429	4647
6314	8951	2335	0174	6993
3157	9764	4862	5848	6919
9052	9565	4635	0653	2254
4105	4105	3187	4312	1596
1437	2851	6727	5580	0368
4064	4171	7013	4631	8288
1037	5765	1562	9869	0756
5718	8791	0754	2222	2013
5127	2302	1392	4413	9651
9401	2423	6301	2611	0650
4064	5228	4153	2544	4125
5458	1402	9849	9886	5579
2461	3497	9785	5678	4471
4320	4558	2545	4436	9265
3466	8269	9926	7429	7516
9313	7489	2464	2575	9284
5179	8081	3361	0109	7730
3010	5081	3300	9979	1970
9599	9828	8740	6666	6692
4242	3961	6247	4911	7264
3585	9123	5014	6328	9659
5950	3384	0276	4503	3333
8462.	3145	6582	8605	7300
0456	0944	3058	2545	3756
0672	1281	8697	5409	0653
5163	9690	0413	3043	1014
4995	9115	5273	1293	7894
6751	6447	4991	6458	9307

(tabla aleatoria)


EJEMPLOS DE SIMULACIÓN 177

número de pichones no alcanzados	número de casos	producto
5	6	30
4	30	120
Totales	36	150

La *media* de los pichones que quedan con vida es, pues:

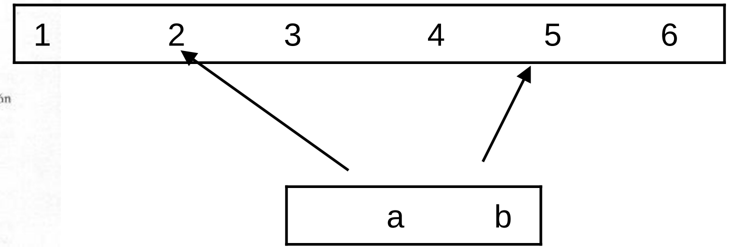
$$\frac{150}{36} = 4{,}1666\ldots$$

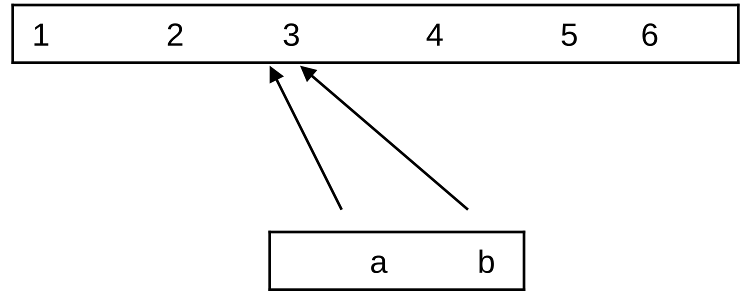
Los niños pueden simular esta situación volviendo al estudio de los dos dados:

Así, la tira 25 significa que un cazador apunta al pichón número 2 y el otro al pichón número 5:

Y la tira 22 significa que los dos cazadores apuntan al pichón número 2:

Dos tiradores muy hábiles hacen blanco a cada tiro.
Se lanzan simultáneamente 6 platos; cada cazador dispara una vez.
¿Cuántos platos quedarán intactos por término medio?



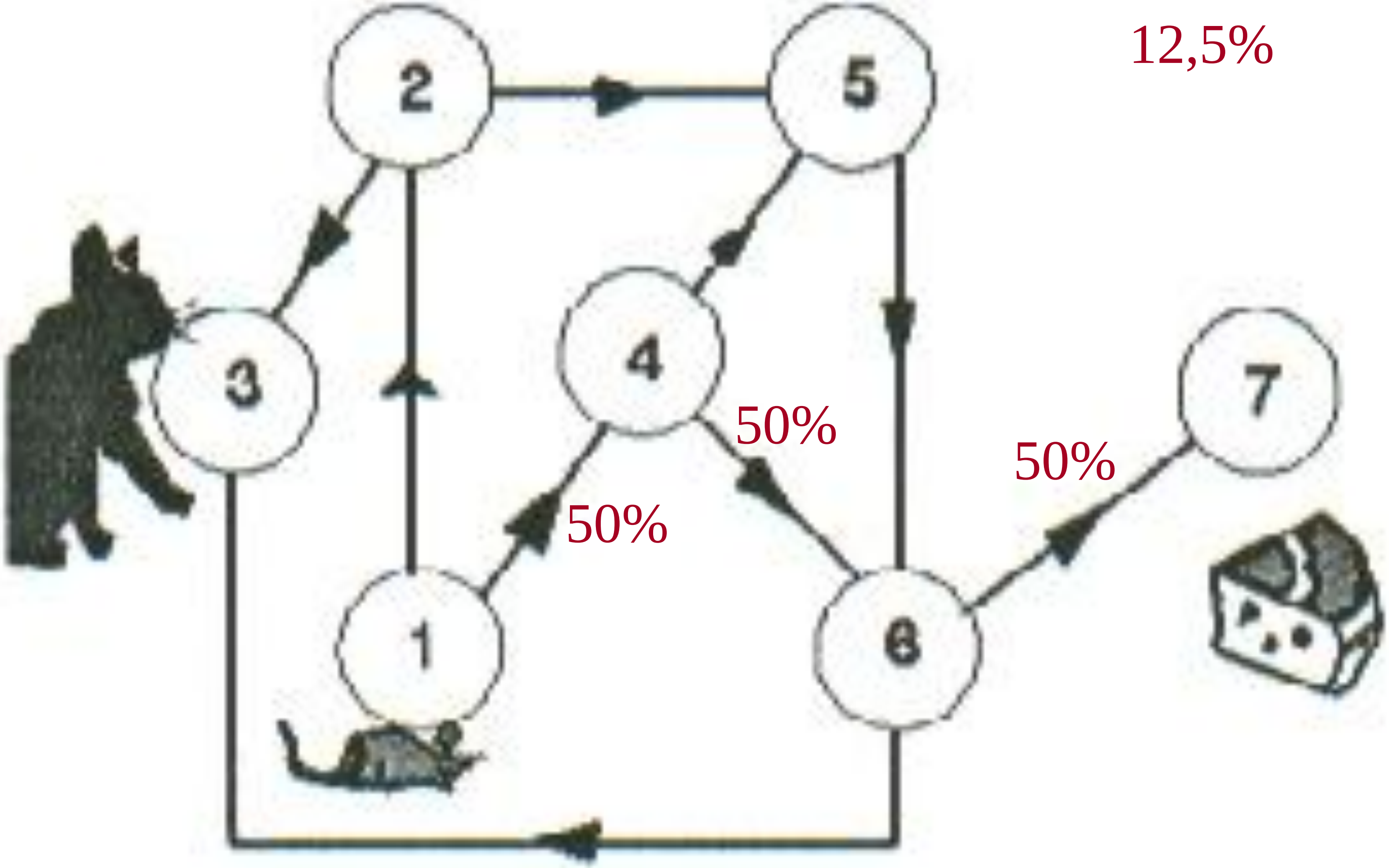


Número de platos no alcanzados	Número de casos	Producto
5	6	30
4	30	120
Totales:	36	150

150/36 = 4,166…

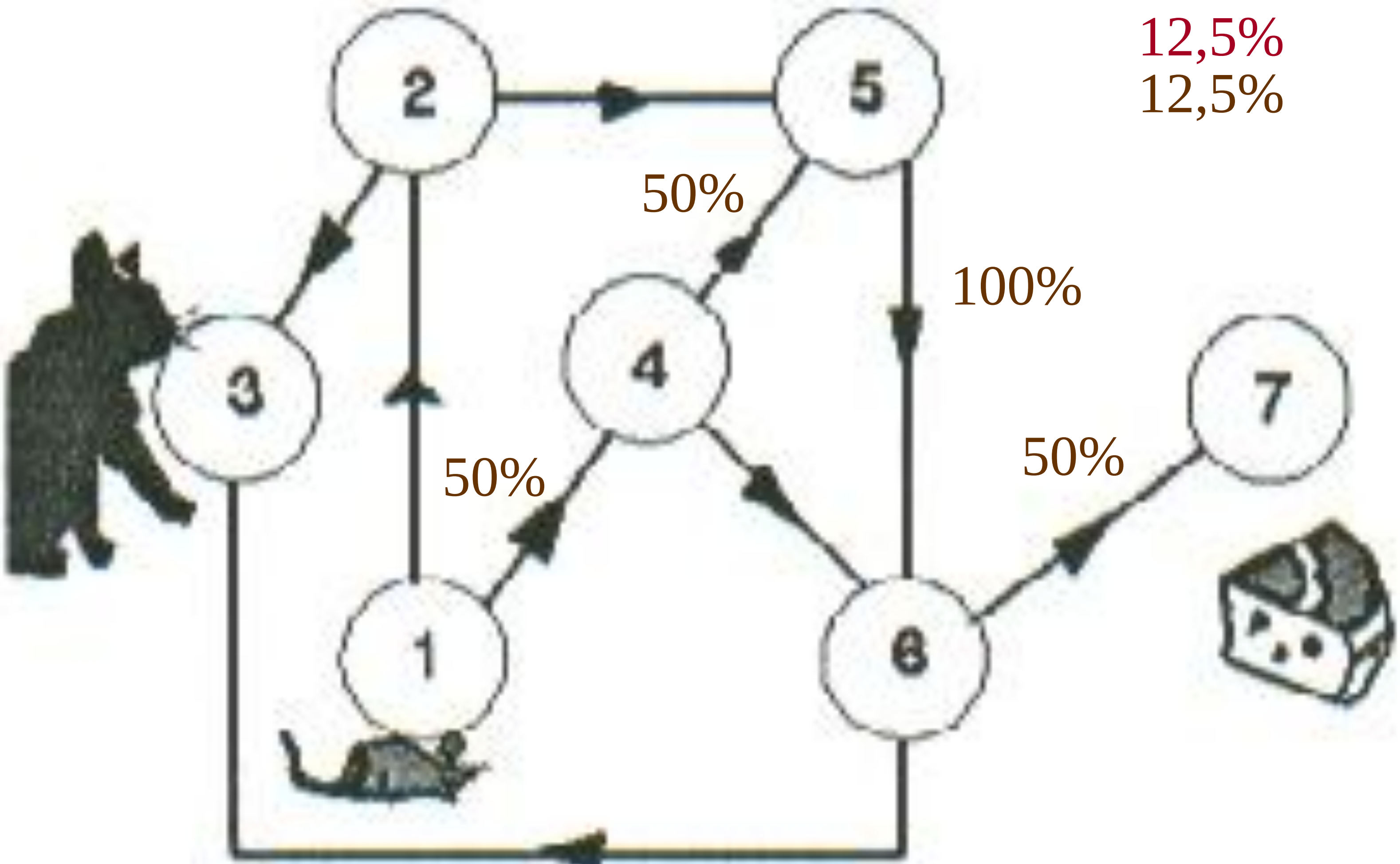
[Técnica: recuento en grafos]

50%*50%*50% =
12,5%



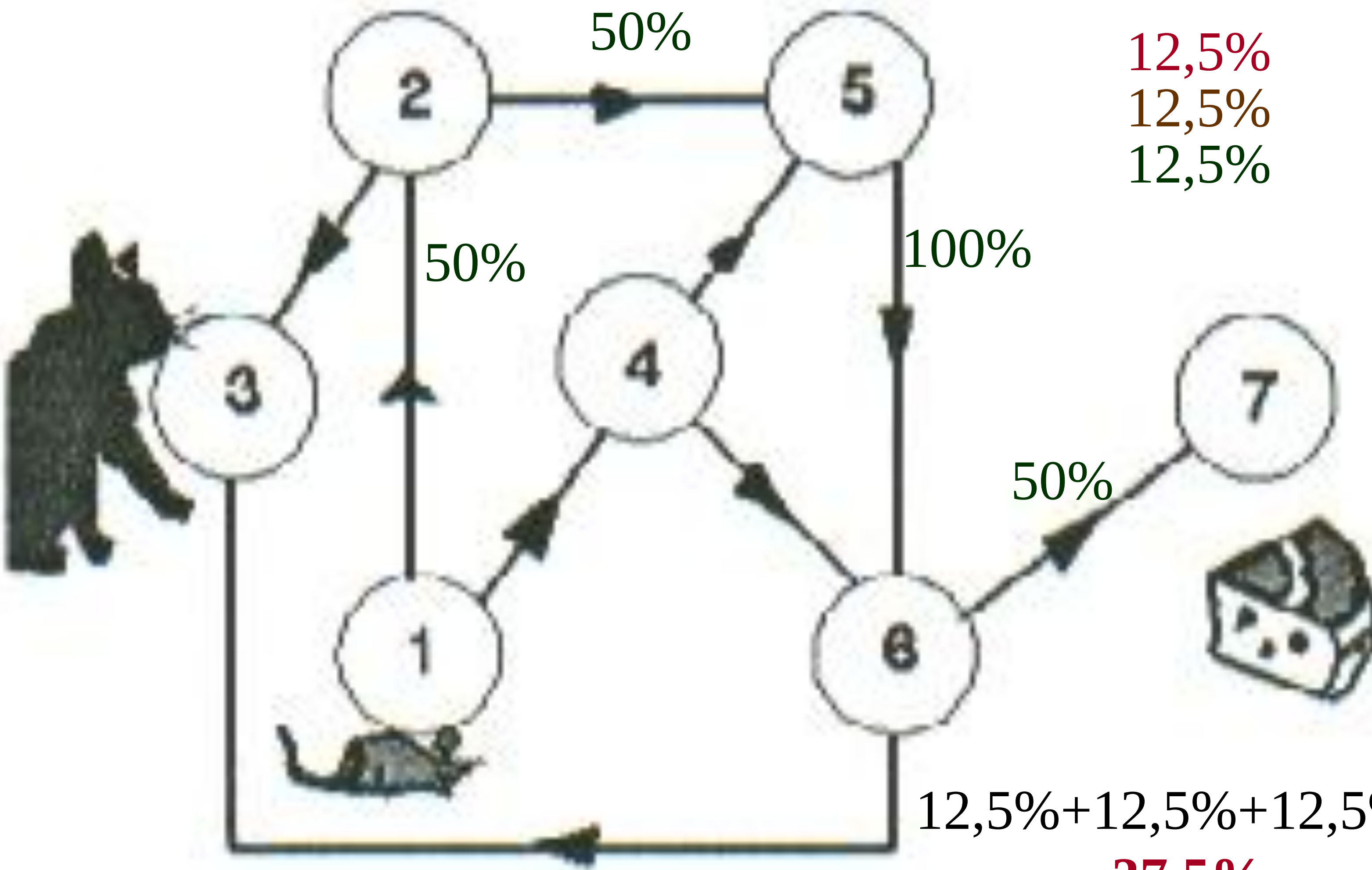
¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se coma el queso?

[Técnica: recuento en grafos]



¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se coma el queso?

[Técnica: recuento en grafos]

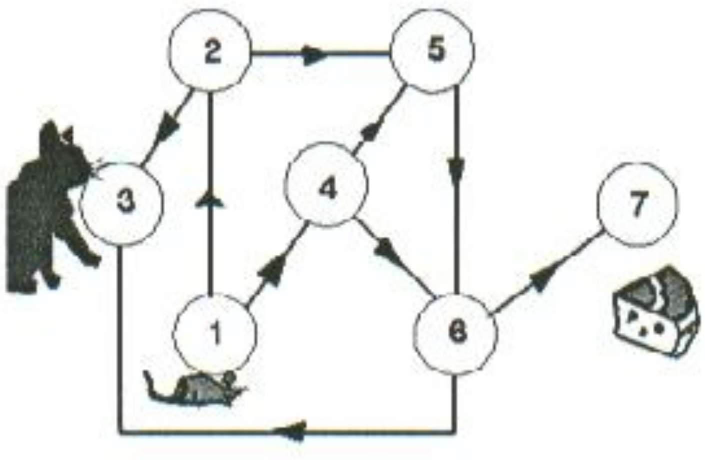


12,5%+12,5%+12,5%=

37,5%

¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se coma el queso?

[Técnica: recuento en grafos]



CAMINOS:

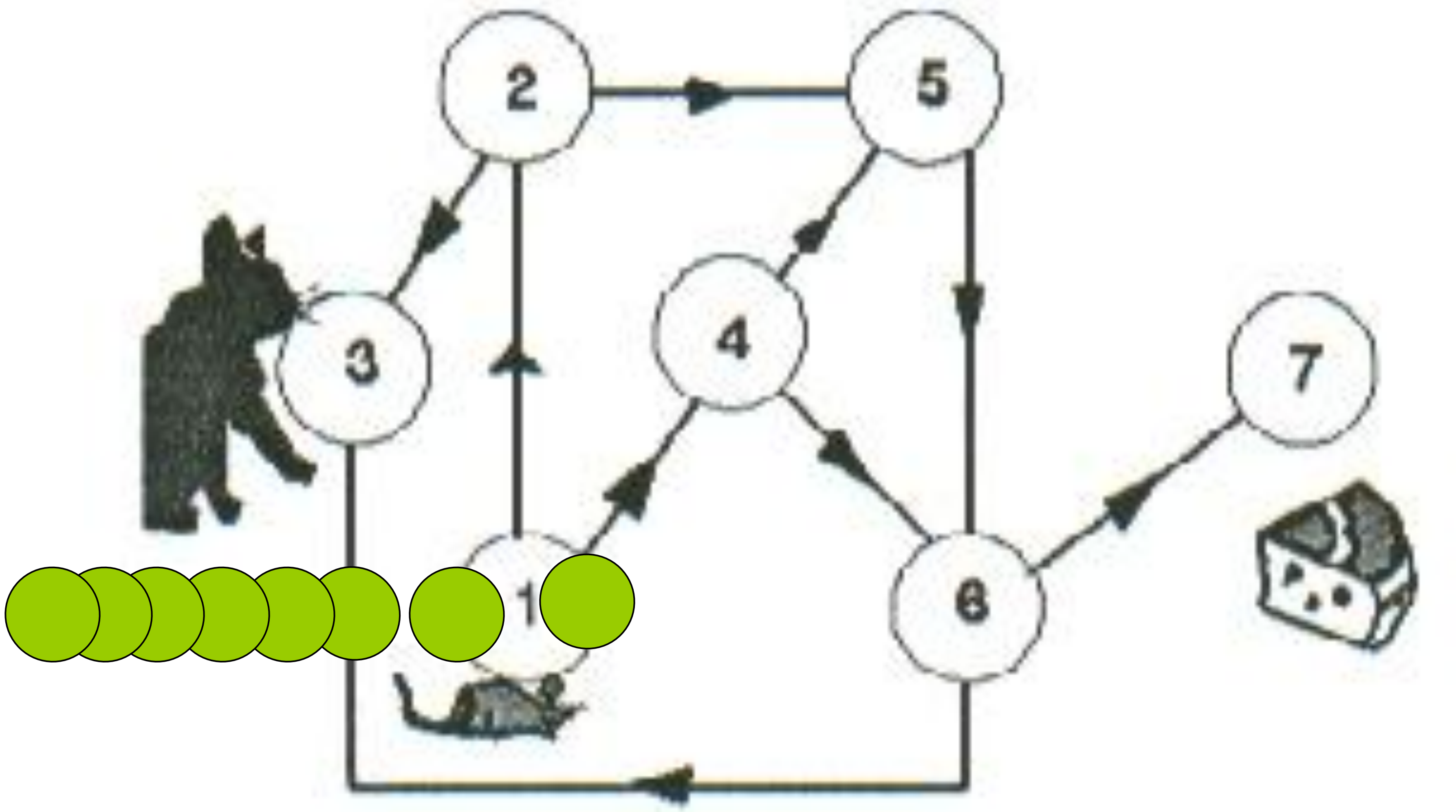
123
12563
12567
14563
14567
1467
1463

Que conducen al queso: 3

Probabilidad: 3/7 **??!**

Que conducen al gato: 4

[Técnica: ábaco probabilístico]



Si entran 8 ratones, ¿cuántos llegan al queso? ¿cuántos al gato?