Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas; Especialidad: Matemáticas.

Asignatura: Recursos Metodológicos para la Enseñanza de las Matemáticas. Curso 2009-2010

Sesión del día 22 de Febrero de 2010: Utilización de Recursos

————————————————

Contenidos de Geometría en Secundaria y Bachillerato

Curso Primero de ESO [3 Unidades de 13]

UNIDAD 9. ÁNGULOS Y RECTAS.

UNIDAD 10. POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIAS.

UNIDAD 11. PERÍMETROS Y ÁREAS.

Curso Segundo de ESO [2 Unidades de 11]

UNIDAD 9. ÁNGULOS Y MOVIMIENTOS.

UNIDAD 10. PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA.

Curso Tercero de ESO [4 Unidades de 17]

UNIDAD 11. MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

UNIDAD 12. SEMEJANZA. APLICACIONES.

UNIDAD 13. INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA.

UNIDAD 14. GEOMETRÍA CON COORDENADAS.

Curso Cuarto de ESO (Opción A) [3 Unidades de 12]

UNIDAD 4. SEMEJANZA.

UNIDAD 5. GEOMETRÍA EN LA ESFERA TERRESTRE.

UNIDAD 6. TRIGONOMETRÍA.

Curso Cuarto de ESO (Opción B) [4 Unidades de 14]

UNIDAD 5. SEMEJANZA.

UNIDAD 6. GEOMETRÍA EN LA ESFERA TERRESTRE.

UNIDAD 7. TRIGONOMETRÍA.

UNIDAD 8. GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Matemáticas I de Primer Curso de Bachillerato

Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.

Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.

Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.

Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de Primer Curso de Bachillerato

NO HAY UNIDADES DE GEOMETRÍA, sólo de Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística.

Matemáticas II de Segundo Curso de Bachillerato

Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de Segundo Curso de Bachillerato

NO HAY UNIDADES DE GEOMETRÍA, sólo de Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística.

Los Elementos de Euclides

- Sin duda, la Geometría, junto con la Aritmética, es la rama más antigua de la Matemática. Euclides, alrededor del año 300 antes de Cristo, escribió su principal obra *Los Elementos*, en los que recopila, sistematiza y extiende todo el saber anterior a él sobre Aritmética, Geometría y Axiomatización o Lógica matemática.

- Para Euclides, *elemento* es lo más sencillo en que se resuelve lo complejo, siendo elementos las cosas más primitivas que se establecen para un resultado.

- Los *Elementos* constan de trece Capítulos, llamados *Libros*, que se diferencian entre sí por su contenido. Los seis primeros estudian la geometría del plano. Los tres siguientes la teoría de números. El décimo es sobre los inconmensurables o irracionales y los tres últimos son sobre la geometría del espacio.

Libro	Definiciones	Proposiciones	Porismas	Lemas	Postulados comunes	Nociones
I	23	48	0	0	5	5
II	2	14	0	0	0	0
III	11	37	1	0	0	0
IV	7	16	1	0	0	0
V	18	25	2	0	0	0
VI	3	3	3	3	0	0
VII	22	39	1 0	0	0	
VIII	0	27	1	0	0	0
IX	0	36	1	0	0	0
X	16	115	4	11	0	0
XI	28	39	1	1	0	0
XII	0	18	2	2	0	0
XIII	0	18	2	3	0	0
Total	130	465	19	17	5	5

- Cada libro está dividido en apartados que pueden ser de seis tipos diferentes: definiciones, proposiciones, porismas, lemas, postulados y nociones comunes. Estos apartados no se diferencian mucho entre sí y en el texto no se explica por qué una afirmación se considera axioma y no postulado, ya que Euclides enuncia y justifica, pero no explica nada.

- Una *definición* es una frase que sirve para introducir un concepto matemático por ejemplo: *Un punto es lo que no tiene partes.*

- Los *postulados y los axiomas o nociones comunes* son dos series de propiedades de los objetos matemáticos que se aceptan sin discusión. Los que incluye Euclides en esta obra son en concreto:

  1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
  2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.
  3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
  4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
  5. El todo es mayor que su parte.

- Las *Proposiciones* son las aserciones que se logran demostrar partiendo de las proposiciones anteriores, las reglas aceptadas en axiomas y postulados y las propiedades que se suponen en las definiciones.

- Los *Porismas o Corolarios* son conclusiones interesantes que se deducen de una proposición ya demostrada.

- Con referencia a la Geometría, Euclides tuvo la visión de que todo lo que se sabía sobre ella se podía reducir a unas reglas básicas y, a partir de ellas, construir todo el edificio otra vez. Así, Euclides formuló **cinco postulados**, de los que se derivaría absolutamente toda la geometría. Son estos:

1. A partir de un punto, se puede trazar una recta a cualquier otro punto.

2. Toda recta puede prolongarse indefinidamente.

3. Dado cualquier centro y cualquier radio, puede construirse un círculo con esos datos.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una y solo una recta paralela a la anterior.

A la redacción de este último postulado se le suele llamar *axioma de Playfair*, ya que así es como lo interpretó John Playfair (científico escocés, 1748–1819). La formulación original de Euclides fue la siguiente:

Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.

Este último postulado no es tan simple como los demás y pronto se empezó a sospechar la posibilidad de que este postulado no fuese tal, sino que se pudiese deducir de los cuatro anteriores. Durante varios siglos fueron muchos los matemáticos que intentaron demostrarlo a partir de los cuatro anteriores, aunque sin ningún resultado.

No fue hasta el siglo XVIII, dos mil cien años después de Euclides, que un grupo de matemáticos (entre ellos, Gauss, Lobachevski, Bolyai, Riemann y otros) encontraron un resultado totalmente inesperado y sorprendente, mediante la técnica de la reducción al absurdo.

Así, tenemos las dos negaciones del axioma de Playfair:

5.1. Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela a la recta dada.

5.2. Por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas a la dada.

Vemos que estos dos anunciados chocan frontalmente con nuestro sentido común. Sin embargo, no dan lugar a ninguna contradicción matemática. De hecho, a partir de los cuatro axiomas de Euclides y una de las negaciones surgían teoremas de una manera totalmente natural sin llegar a contradicción alguna: nacía un nuevo tipo de geometría.

La *geometría hiperbólica* (o geometría Lobachevskiana) fue la primera geometría no euclídea que se descubrió, donde los ángulos de un triángulo suman menos que 180º (recordemos que éstos siempre suman 180º en la geometría Euclídea):

La *geometría Riemanniana* fue la segunda geometría no euclídea que se descubrió, en la que los ángulos de un triángulo suman más que 180º.

El Teorema de Pitágoras. Demostraciones

- En Google, *Teorema de Pitágoras* (en español), sobre 150000 entradas.
- En Google, *Pythagoras Theorem* (en inglés), sobre 1350000 entradas.
- Pitágoras de Samos (569 a.C. - 475 a.C.). Fue el fundador de la Escuela Pitagórica. Para esta Escuela, *el número es lo más importante, ya que en el Universo, todo está regido por los números.*
- ¿El Teorema de Pitágoras es realmente de Pitágoras? Todos los descubrimientos de cualquier miembro de la Escuela Pitagórica se atribuían a Pitágoras.
- Según algunos autores hay más de 1000 demostraciones del Teorema de Pitágoras. El matemático estadounidense E. S. Loomis catalogó 367 demostraciones diferentes de este teorema en su libro *The Pythagorean Proposition*, publicado en 1927.
- En ese mismo libro, Loomis clasificó las demostraciones del Teorema de Pitágoras en cuatro grandes grupos:
  1. Demostraciones algebraicas, basadas en las longitudes de los lados del triángulo.
  2. Demostraciones geométricas, en las que se realizan comparaciones de áreas.
  3. Demostraciones dinámicas, a través de las propiedades de fuerza y masa.
  4. Demostraciones cuaterniónicas, mediante el uso de vectores.
- Enunciados del Teorema de Pitágoras en inglés:
  1. The area of the square built upon the hypotenuse of a right triangle is equal to the sum of the areas of the squares upon the remaining sides.
  2. In right-angled triangles the square on the hypotenuse is equal to the sum of squares on the legs.

Puntos, Rectas, Triángulos y Circunferencias notables en el Triángulo

- **El Circuncentro**.

    1. Es el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo.
    2. Es el centro de la **circunferencia circunscrita** al triángulo.
    3. En el caso de un triángulo acutángulo, el circuncentro es ínterior al triángulo.

       En el caso de un triángulo obtusángulo, el circuncentro es exterior al triángulo.

       En el caso de un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

- **El Ortocentro**.

    1. Es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo.
    2. En triángulos rectángulos coincide con vértice que forman los dos catetos.

- **El Baricentro**.

    1. Es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo.
    2. Dista dos tercios de cada vértice y un tercio del lado opuesto.

- **El Incentro**.

    1. Es el punto de intersección de las tres bisectrices interiores del triángulo.
    2. Es el centro de la **circunferencia inscrita** al triángulo.

- **Los Exincentros**.

    1. Son los tres puntos exteriores a un triángulo que equidistan de las rectas que contienen a los lados del triángulo.
    2. Cada exincentro es el centro de la **circunferencia exinscrita** al triángulo, que es aquella circunferencia cuyo centro es un excincentro y es tangente a los lados del triángulo o a sus prolongaciones.

- **La Recta de Euler**.

  1. Es la recta que une el circuncentro, el ortocentro y el baricentro de un triángulo.
  2. En ella, el baricentro dista doble distancia del ortocentro que del circuncentro.
  3. En triángulos equiláteros, esta recta contiene también al incentro del triángulo.

- **La Recta de Simpson**.

  1. Es la recta que une los pies de las rectas perpendiculares a los lados de un triángulo trazadas desde cualquier punto arbitrario de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

- **El Triángulo Órtico**.

  1. El **Triángulo órtico** de un triángulo dado es el formado por los pies de sus alturas sobre sus lados.
  2. Obviamente, no existe el triángulo órtico de un triángulo rectángulo.
  3. Algunas de las propiedades de este triángulo órtico de un triángulo son:

     P1 Los lados de un triángulo acutángulo son las bisectrices exteriores de su triángulo órtico.

     P2 Los vértices de un triángulo son los exincentros de su triángulo órtico.

     P3 Ls alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices interiores de su triángulo órtico.

     P4 Si un triángulo es obtusángulo, sus alturas son una bisectriz interior y dos exteriores y sus lados son las restantes bisectrices de su triángulo órtico.

- **Circunferencia de 6 puntos**.

  1. La circunferencia circunscrita a un triángulo contiene seis puntos notables en un triángulo: los tres vértices y los tres puntos de intersección de la mediatriz de cada lado con la bisectriz que pasa por el vértice opuesto.

- **Circunferencia de 9 puntos: la Circunferencia de Fenerbach o de Euler**.

    1. La **circunferencia de Fenerbach o Circunferencia de Euler** es la circunferencia que contiene los siguientes nueve puntos notables en un triángulo: los pies de las álturas del triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre cada vértice y el ortocentro.

- **Circunferencia de Tucker**.

    1. La **circunferencia de Tucker** es la circunferencia que pasa por 6 puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 de un triángulo, siendo P_1 un punto cualquiera de un lado del triángulo y los restantes P_i los puntos obtenidos al trazar a partir de P_1 sucesivamente y alternadamente segmentos paralelos y antiparalelos a los lados.

- **Circunferencia de Taylor**.

    1. La **circunferencia de Taylor** es la circunferencia que pasa por los pies de las perpendiculares trazadas desde los pies de las alturas a los lados del triángulo.
    2. La circunferencia de Taylor es una circunferencia de Tucker.

- **Triángulos de Napoleón interior y exterior**.

    1. El **triángulo de Napoleón exterior** de un triángulo es el triángulo cuyos vértices son los baricentros de los tres triángulos equiláteros exteriores construidos sobre los lados del triángulo inicial.
    2. El **triángulo de Napoleón interior** de un triángulo es el triángulo cuyos vértices son los baricentros de los tres triángulos equiláteros interiores construidos sobre los lados del triángulo inicial.
    3. Los dos triángulos de Napoleón de un triángulo son triángulos equiláteros.
    4. La diferencia entre las áreas de los triángulos de Napoleón exterior e interuior de un triángulo dado es igual al área de dicho triángulo.

Relación de Ejercicios

A.- Buscar nuevas demostraciones del Teorema de Pitágoras.

B.- Con carácter general, demostrar todos los resultados que se han indicado en la sección de puntos y figuras notables de un triángulo, utilizando tanto la Geometría clásica como la Geometría Analítica, y comprobarlos gráficamente mediante cualquier programa de Geometría Dinámica, tipo Cabri o Geogebra, por ejemplo.

C.- Ejercicios variados:

1. ¿Qué ruta deberá seguir una persona P que desea ir a la ciudad A pasando primero por un río r para beber si pretende que el camino sea el más corto posible?

2. Sean r y s dos rectas secantes en el plano y A un punto exterior a ellas en el mismo plano. De todos los triángulos que tienen un vértice en A y los otros dos en puntos de r y s, respectivamente, encontrar el de perímetro mínimo.

3. Sean r y s dos rectas en el plano que se cortan en un punto no visible y A un punto cualquiera del plano no perteneciente a ninguna de ellas. Dibujar la recta que pasa por A y por el punto de corte de ambas.

4. Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto interior al mismo. Probar que la suma de las distancias de P a cada uno de los tres lados es una cantidad constante. ¿Qué cantidad es?

5. Sea ABC un triángulo isósceles de lados iguales AB y AC y P un punto situado sobre la base BC. Probar que la suma de las distancias de P a cada uno de los lados desiguales es una cantidad constante.

6. Inscribir un cuadrado en un triángulo dado, entendiendo por inscribir que el cuadrado tenga uno de sus lados sobre la base de dicho triángulo y sus otros dos vértices estén, respectivamente, sobre los otros dos lados del triángulo.

Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas; Especialidad: Matemáticas.

Asignatura: Recursos Metodológicos para la Enseñanza de las Matemáticas. Curso 2009-2010

Sesión del día 22 de Febrero de 2010: Utilización de Recursos

——————————————

Contenidos de Geometría en Secundaria y Bachillerato

Curso Primero de ESO [3 Unidades de 13]

UNIDAD 9. ÁNGULOS Y RECTAS.

UNIDAD 10. POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIAS.

UNIDAD 11. PERÍMETROS Y ÁREAS.

Curso Segundo de ESO [2 Unidades de 11]

UNIDAD 9. ÁNGULOS Y MOVIMIENTOS.

UNIDAD 10. PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA.

Curso Tercero de ESO [4 Unidades de 17]

UNIDAD 11. MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

UNIDAD 12. SEMEJANZA. APLICACIONES.

UNIDAD 13. INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA.

UNIDAD 14. GEOMETRÍA CON COORDENADAS.

Curso Cuarto de ESO (Opción A) [3 Unidades de 12]

UNIDAD 4. SEMEJANZA.

UNIDAD 5. GEOMETRÍA EN LA ESFERA TERRESTRE.

UNIDAD 6. TRIGONOMETRÍA.

Curso Cuarto de ESO (Opción B) [4 Unidades de 14]

UNIDAD 5. SEMEJANZA.

UNIDAD 6. GEOMETRÍA EN LA ESFERA TERRESTRE.

UNIDAD 7. TRIGONOMETRÍA.

UNIDAD 8. GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Matemáticas I de Primer Curso de Bachillerato

Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.

Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.

Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.

Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de Primer Curso de Bachillerato

NO HAY UNIDADES DE GEOMETRÍA, sólo de Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística.

Matemáticas II de Segundo Curso de Bachillerato

Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de Segundo Curso de Bachillerato

NO HAY UNIDADES DE GEOMETRÍA, sólo de Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística.

Los Elementos de Euclides

- Sin duda, la Geometría, junto con la Aritmética, es la rama más antigua de la Matemática. Euclides, alrededor del año 300 antes de Cristo, escribió su principal obra *Los Elementos*, en los que recopila, sistematiza y extiende todo el saber anterior a él sobre Aritmética, Geometría y Axiomatización o Lógica matemática.

- Para Euclides, *elemento* es lo más sencillo en que se resuelve lo complejo, siendo elementos las cosas más primitivas que se establecen para un resultado.

- Los *Elementos* constan de trece Capítulos, llamados *Libros*, que se diferencian entre sí por su contenido. Los seis primeros estudian la geometría del plano. Los tres siguientes la teoría de números. El décimo es sobre los inconmensurables o irracionales y los tres últimos son sobre la geometría del espacio.

Libro	Definiciones	Proposiciones	Porismas	Lemas	Postulados	Nociones comunes
I	23	48	0	0	5	5
II	2	14	0	0	0	0
III	11	37	1	0	0	0
IV	7	16	1	0	0	0
V	18	25	2	0	0	0
VI	3	3	3	3	0	0
VII	22	39	1 0	0	0	
VIII	0	27	1	0	0	0
IX	0	36	1	0	0	0
X	16	115	4	11	0	0
XI	28	39	1	1	0	0
XII	0	18	2	2	0	0
XIII	0	18	2	3	0	0
Total	130	465	19	17	5	5

- Cada libro está dividido en apartados que pueden ser de seis tipos diferentes: definiciones, proposiciones, porismas, lemas, postulados y nociones comunes. Estos apartados no se diferencian mucho entre sí y en el texto no se explica por qué una afirmación se considera axioma y no postulado, ya que Euclides enuncia y justifica, pero no explica nada.

- Una *definición* es una frase que sirve para introducir un concepto matemático por ejemplo: *Un punto es lo que no tiene partes.*

- Los *postulados y los axiomas o nociones comunes* son dos series de propiedades de los objetos matemáticos que se aceptan sin discusión. Los que incluye Euclides en esta obra son en concreto:

  1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
  2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.
  3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
  4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
  5. El todo es mayor que su parte.

- Las *Proposiciones* son las aserciones que se logran demostrar partiendo de las proposiciones anteriores, las reglas aceptadas en axiomas y postulados y las propiedades que se suponen en las definiciones.

- Los *Porismas o Corolarios* son conclusiones interesantes que se deducen de una proposición ya demostrada.

- Con referencia a la Geometría, Euclides tuvo la visión de que todo lo que se sabía sobre ella se podía reducir a unas reglas básicas y, a partir de ellas, construir todo el edificio otra vez. Así, Euclides formuló **cinco postulados**, de los que se derivaría absolutamente toda la geometría. Son estos:

1. A partir de un punto, se puede trazar una recta a cualquier otro punto.

2. Toda recta puede prolongarse indefinidamente.

3. Dado cualquier centro y cualquier radio, puede construirse un círculo con esos datos.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una y solo una recta paralela a la anterior.

A la redacción de este último postulado se le suele llamar *axioma de Playfair*, ya que así es como lo interpretó John Playfair (científico escocés, 1748–1819). La formulación original de Euclides fue la siguiente:

Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.

Este último postulado no es tan simple como los demás y pronto se empezó a sospechar la posibilidad de que este postulado no fuese tal, sino que se pudiese deducir de los cuatro anteriores. Durante varios siglos fueron muchos los matemáticos que intentaron demostrarlo a partir de los cuatro anteriores, aunque sin ningún resultado.

No fue hasta el siglo XVIII, dos mil cien años después de Euclides, que un grupo de matemáticos (entre ellos, Gauss, Lobachevski, Bolyai, Riemann y otros) encontraron un resultado totalmente inesperado y sorprendente, mediante la técnica de la reducción al absurdo.

Así, tenemos las dos negaciones del axioma de Playfair:

5.1. Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela a la recta dada.

5.2. Por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas a la dada.

Vemos que estos dos anunciados chocan frontalmente con nuestro sentido común. Sin embargo, no dan lugar a ninguna contradicción matemática. De hecho, a partir de los cuatro axiomas de Euclides y una de las negaciones surgían teoremas de una manera totalmente natural sin llegar a contradicción alguna: nacía un nuevo tipo de geometría.

La *geometría hiperbólica* (o geometría Lobachevskiana) fue la primera geometría no euclídea que se descubrió, donde los ángulos de un triángulo suman menos que 180º (recordemos que éstos siempre suman 180º en la geometría Euclídea):

La *geometría Riemanniana* fue la segunda geometría no euclídea que se descubrió, en la que los ángulos de un triángulo suman más que 180º.

El Teorema de Pitágoras. Demostraciones

- En Google, *Teorema de Pitágoras* (en español), sobre 150000 entradas.
- En Google, *Pythagoras Theorem* (en inglés), sobre 1350000 entradas.
- Pitágoras de Samos (569 a.C. - 475 a.C.). Fue el fundador de la Escuela Pitagórica. Para esta Escuela, *el número es lo más importante, ya que en el Universo, todo está regido por los números.*
- ¿El Teorema de Pitágoras es realmente de Pitágoras? Todos los descubrimientos de cualquier miembro de la Escuela Pitagórica se atribuían a Pitágoras.
- Según algunos autores hay más de 1000 demostraciones del Teorema de Pitágoras. El matemático estadounidense E. S. Loomis catalogó 367 demostraciones diferentes de este teorema en su libro *The Pythagorean Proposition*, publicado en 1927.

- En ese mismo libro, Loomis clasificó las demostraciones del Teorema de Pitágoras en cuatro grandes grupos:

  1. Demostraciones algebraicas, basadas en las longitudes de los lados del triángulo.
  2. Demostraciones geométricas, en las que se realizan comparaciones de áreas.
  3. Demostraciones dinámicas, a través de las propiedades de fuerza y masa.
  4. Demostraciones cuaterniónicas, mediante el uso de vectores.

- Enunciados del Teorema de Pitágoras en inglés:

  1. The area of the square built upon the hypotenuse of a right triangle is equal to the sum of the areas of the squares upon the remaining sides.
  2. In right-angled triangles the square on the hypotenuse is equal to the sum of squares on the legs.

Puntos, Rectas, Triángulos y Circunferencias notables en el Triángulo

- **El Circuncentro**.

  1. Es el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo.
  2. Es el centro de la **circunferencia circunscrita** al triángulo.
  3. En el caso de un triángulo acutángulo, el circuncentro es ínterior al triángulo.

     En el caso de un triángulo obtusángulo, el circuncentro es exterior al triángulo.

     En el caso de un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

- **El Ortocentro**.

  1. Es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo.
  2. En triángulos rectángulos coincide con vértice que forman los dos catetos.

- **El Baricentro**.
  1. Es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo.
  2. Dista dos tercios de cada vértice y un tercio del lado opuesto.
- **El Incentro**.
  1. Es el punto de intersección de las tres bisectrices interiores del triángulo.
  2. Es el centro de la **circunferencia inscrita** al triángulo.
- **Los Exincentros**.
  1. Son los tres puntos exteriores a un triángulo que equidistan de las rectas que contienen a los lados del triángulo.
  2. Cada exincentro es el centro de la **circunferencia exinscrita** al triángulo, que es aquella circunferencia cuyo centro es un excincentro y es tangente a los lados del triángulo o a sus prolongaciones.

- **La Recta de Euler**.
  1. Es la recta que une el circuncentro, el ortocentro y el baricentro de un triángulo.
  2. En ella, el baricentro dista doble distancia del ortocentro que del circuncentro.
  3. En triángulos equiláteros, esta recta contiene también al incentro del triángulo.
- **La Recta de Simpson**.
  1. Es la recta que une los pies de las rectas perpendiculares a los lados de un triángulo trazadas desde cualquier punto arbitrario de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

- **El Triángulo Órtico**.

  1. El **Triángulo órtico** de un triángulo dado es el formado por los pies de sus alturas sobre sus lados.
  2. Obviamente, no existe el triángulo órtico de un triángulo rectángulo.
  3. Algunas de las propiedades de este triángulo órtico de un triángulo son:

     P1 Los lados de un triángulo acutángulo son las bisectrices exteriores de su triángulo órtico.

     P2 Los vértices de un triángulo son los exincentros de su triángulo órtico.

     P3 Ls alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices interiores de su triángulo órtico.

     P4 Si un triángulo es obtusángulo, sus alturas son una bisectriz interior y dos exteriores y sus lados son las restantes bisectrices de su triángulo órtico.

- **Circunferencia de 6 puntos**.

  1. La circunferencia circunscrita a un triángulo contiene seis puntos notables en un triángulo: los tres vértices y los tres puntos de intersección de la mediatriz de cada lado con la bisectriz que pasa por el vértice opuesto.

- **Circunferencia de 9 puntos: la Circunferencia de Fenerbach o de Euler**.

  1. La **circunferencia de Fenerbach o Circunferencia de Euler** es la circunferencia que contiene los siguientes nueve puntos notables en un triángulo: los pies de las álturas del triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre cada vértice y el ortocentro.

- **Circunferencia de Tucker**.

  1. La **circunferencia de Tucker** es la circunferencia que pasa por 6 puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 de un triángulo, siendo P_1 un punto cualquiera de un lado del triángulo y los restantes P_i los puntos obtenidos al trazar a partir de P_1 sucesivamente y alternadamente segmentos paralelos y antiparalelos a los lados.

- **Circunferencia de Taylor**.

  1. La **circunferencia de Taylor** es la circunferencia que pasa por los pies de las perpendiculares trazadas desde los pies de las alturas a los lados del triángulo.
  2. La circunferencia de Taylor es una circunferencia de Tucker.

- **Triángulos de Napoleón interior y exterior**.

  1. El **triángulo de Napoleón exterior** de un triángulo es el triángulo cuyos vértices son los baricentros de los tres triángulos equiláteros exteriores construidos sobre los lados del triángulo inicial.
  2. El **triángulo de Napoleón interior** de un triángulo es el triángulo cuyos vértices son los baricentros de los tres triángulos equiláteros interiores construidos sobre los lados del triángulo inicial.
  3. Los dos triángulos de Napoleón de un triángulo son triángulos equiláteros.
  4. La diferencia entre las áreas de los triángulos de Napoleón exterior e interuior de un triángulo dado es igual al área de dicho triángulo.

Curso Primero de ESO [3 Unidades de 13]

UNIDAD 9. ÁNGULOS Y RECTAS.

Recta, semirrecta y segmento. Posiciones de dos rectas en el plano. Tipos de ángulos y relaciones entre ellos. Unidades de medida de ángulos y tiempos. Operaciones con ángulos. Ángulos complementarios, suplementarios, consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice. Suma y resta en el sistema sexagesimal.

UNIDAD 10. POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIAS.

Polígono. Tipos de polígonos. Triángulos: clasificación. Elementos de un triángulo. Teorema de Pitágoras Demostración gráfica. Puzzles. Cuadriláteros: clasificación. Paralelogramos: propiedades.

UNIDAD 11. PERÍMETROS Y ÁREAS. Perímetro de un polígono. Longitud de la circunferencia. Áreas de paralelogramos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. Área de un triángulo. Áreas de no paralelogramos: trapecios.

Curso Segundo de ESO [2 Unidades de 11]

UNIDAD 9. ÁNGULOS Y MOVIMIENTOS.

Ángulos en las figuras planas. Mediatrices, bisectrices, alturas y medianas. Movimientos directos e inversos.

UNIDAD 10. PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA.

Razón de segmentos. Segmentos proporcionales. Teorema de Thales. Aplicaciones. Triángulos en posición de Thales. Semejanza. Triángulos semejantes.

Curso Tercero de ESO [4 Unidades de 17]

UNIDAD 11. MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

Simetría, traslación, giro. Inversa de traslaciones. Eje de simetría. Ejes de simetría de una figura. Centro y ángulo de giro. Dirección, módulo y sentido de una traslación.

UNIDAD 12. SEMEJANZA. APLICACIONES.

Semejanza. Razón de semejanza. Teorema de Thales. Semejanza de triángulos. Semejanza de polígonos.

UNIDAD 13. INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA.

UNIDAD 14. GEOMETRÍA CON COORDENADAS.

Curso Cuarto de ESO (Opción A) [3 Unidades de 12]

UNIDAD 4. SEMEJANZA.

Teoremas de Pitágoras, la altura y el cateto. Teorema de Thales. Semejanza.

UNIDAD 5. GEOMETRÍA EN LA ESFERA TERRESTRE.

Planos horizontales y verticales. Radio de la tierra. Ecuador, meridianos y paralelos.

UNIDAD 6. TRIGONOMETRÍA.

Curso Cuarto de ESO (Opción B) [4 Unidades de 14]

UNIDAD 5. SEMEJANZA.

Teoremas de Pitágoras, la altura y el cateto. Teorema de Thales. Movimientos: traslaciones, giros y simetrías. Semejanza.

UNIDAD 6. GEOMETRÍA EN LA ESFERA TERRESTRE.

Planos horizontales y verticales. Radio de la tierra. Ecuador, meridianos y paralelos.

UNIDAD 7. TRIGONOMETRÍA.

UNIDAD 8. GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Matemáticas I de Primer Curso de Bachillerato

Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.

Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.

Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.

Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de Primer Curso de Bachillerato

> NO HAY UNIDADES DE GEOMETRÍA, sólo de Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística.

Matemáticas II de Segundo Curso de Bachillerato

> Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.
>
> Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de Segundo Curso de Bachillerato

> NO HAY UNIDADES DE GEOMETRÍA, sólo de Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística.

Geometría: – Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. – Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.