

PROBABILIDAD (1º E.S.O.)



Aprendizaje y Enseñanza de las materias de Matemáticas
(Bloque I)

Joaquín Candañedo Arancón

David Sánchez Bastia

Manuel José Sierra Hernández

JUSTIFICACIÓN: En el contexto de la programación

Esta unidad didáctica es una introducción a los conceptos de espacio muestral, suceso elemental, suceso compuesto, frecuencias absolutas y relativas, ley de los grandes números, probabilidad de un suceso y regla de Laplace. Está diseñada para los alumnos de 1º de ESO.

El procedimiento de enseñanza-aprendizaje seguirá pautas de metodología “constructivista”, desarrollando los conceptos en el orden anteriormente mencionado. Nosotros, como profesores actuaremos como mediadores entre los conocimientos que el alumno ya posee y los nuevos conocimientos ajustando los niveles de ayuda a las diferentes necesidades de nuestros alumnos.

JUSTIFICACIÓN: Conexión con la Realidad

La presente unidad didáctica referente a "Probabilidad" recoge aspectos relativos al tratamiento de la información referidos al azar.

En la vida real este concepto se encuentra involucrado en muchos actos que el alumnado puede indentificar en su vida cotidiana: el tirar un dado, el lanzar una moneda, la lotería, el sexo de un recién nacido, etc.

Con respecto a la probabilidad este tema se haya imbuido a menudo de ideas erróneas basadas incluso en la superstición. Frente a esto, hay que procurar el desarrollo de la capacidad crítica en el alumnado a la hora de analizar la información, instándoles y educándoles para admitir la posible variabilidad de los resultados experimentales de los sucesos probabilísticos.

JUSTIFICACIÓN: Conexión con la Realidad

En principio se abordarán unos conceptos mínimos, y en caso de que el alumnado lo vaya permitiendo se desarrollarán el resto de los mismos dentro de los máximos de esta unidad didáctica. Así pues quedarán organizados según se muestra a continuación:

Mínimos:

- Espacio muestral.
- Suceso elemental y suceso compuesto.
- Frecuencias absolutas y relativas.

Máximos:

- Ley de los grandes números.
- Probabilidad de un suceso.
- Regla de Laplace.

JUSTIFICACIÓN: Adecuación a los Decretos de Enseñanza

El marco normativo dentro al que responde la presente unidad didáctica es el siguiente:

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación
- LEY 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria
- Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía
- Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía
- Orden de 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa la educación básica en los centros docentes públicos de Andalucía

COMPETENCIAS

Competencia en comunicación lingüística:

- Que el niño o niña sea capaz de expresar pensamientos, emociones, vivencias y opiniones.
- Que el niño o niña sea capaz de producir textos escritos adecuados a cada situación de comunicación.
- Que el niño o niña sea capaz de interpretar y comprender los textos escritos.

Competencia matemática:

- Que el niño o niña sea capaz de emplear los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información.
- Que el niño o niña sea capaz de interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.
- Que el niño o niña sea capaz de utilizar los elementos y razonamientos matemáticos para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisen.

COMPETENCIAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico:

- Que el niño o niña sea capaz de poner en práctica los procesos y actitudes propios del análisis sistemático y de indagación científica.

Tratamiento de la información y competencia digital:

- Que el niño o niña sea capaz de evaluar y seleccionar nuevas fuentes de información.
- Que el niño o niña sea capaz de buscar, obtener, procesar y comunicar información para transformarla en conocimiento.

Autonomía e iniciativa personal:

- Que el niño o niña sea capaz de elegir con criterio propio.
- Ser capaz de relacionarse, cooperar y trabajar en equipo poniéndose en el lugar del otro, valorando las ideas de los demás, dialogando y negociando.

OBJETIVOS: Objetivos de etapa

De acuerdo con el Artículo 3 del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre.

- **B)** Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- **E)** Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- **F)** Concebir el conocimiento científico como un saber integrado que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- **G)** Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

OBJETIVOS: Objetivos de etapa

De acuerdo con el Decreto 231/2007. Artículo 4

- **Andalucía A)** Adquirir habilidades que les permitan desenvolverse con autonomía en el ámbito familiar y doméstico, así como en los grupos sociales con los que se relacionan, participando con actitudes solidarias, tolerantes y libres de prejuicios.
- **Andalucía B)** Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos y técnicos.

OBJETIVOS: Objetivos de área

De acuerdo con el Anexo 2 del Real Decreto 1631/2006

- **1.** Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
- **2.** Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- **3.** Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
- **6.** Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
- **7.** Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- **8.** Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
- **10.** Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

OBJETIVOS: Objetivos didácticos

- Comprender los conceptos de azar y probabilidad.
- Saber determinar el espacio muestral de un suceso.
- Diferenciar entre suceso probabilístico elemental y compuesto.
- Diferenciar entre frecuencia absoluta y relativa. Construcción correcta de la tabla de frecuencias.
- Diferenciar los experimentos aleatorios de los no aleatorios.
- Reconocer los diferentes sucesos aleatorios.
- Conocer la probabilidad de los sucesos aleatorios.
- Comprender la probabilidad de un suceso.
- Entender y reflexionar sobre ley de los grandes números.
- Comprensión y aplicación práctica de la regla de Laplace a un suceso.

CONTENIDOS: Contenidos conceptuales

- El espacio muestral.
- La frecuencia absoluta.
- La frecuencia relativa.
- Los experimentos aleatorios. El azar.
- Los tipos de sucesos aleatorios (elemental y compuesto).
- La probabilidad de un suceso.
- Regla de Laplace.
- Ley de los grandes números.

CONTENIDOS: Contenidos procedimentales

- Formular de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas.
- Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas.
- Comprender la tendencia en el comportamiento de sucesos aleatorios.
- Poder formular probabilidades como el número de casos posibles frente al de totales.
- Comprender que la probabilidad de un suceso compuesto es menor la intersección de la probabilidad de los sucesos elementales que lo componen y que por tanto es menor o igual que la menor probabilidad elemental.
- Representar correctamente el enunciado de los problemas de probabilidad.

CONTENIDOS: Contenidos actitudinales

- Reconocimiento de la presencia del azar en la vida cotidiana.
- Aceptación de la existencia de fenómenos aleatorios equiprobables.
- Aceptación de las opiniones ajenas valorándolas críticamente.
- Gusto por el rigor y el orden en la presentación y comunicación de resultados.
- Mostrar interés por el comportamiento de los sucesos probabilísticos.

CONTENIDOS: Secuenciación de contenidos en sesiones

7 sesiones:

- Sesión 1: Test de conocimientos previos, actividad de motivación, introducción de los conceptos de azar y suceso aleatorio
 - *Objetivo*: Toma de contacto de los alumnos con la probabilidad mediante la clarificación de los conceptos de azar y suceso aleatorio.
- Sesión 2: Suceso aleatorio y espacio muestral, suceso elemental y suceso compuesto.
 - *Objetivo*: Reafirmar los principales conceptos asociados a los sucesos.

CONTENIDOS: Secuenciación de contenidos en sesiones

- Sesión 3: Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace. Aplicación de la regla de Laplace.
 - *Objetivo*: Introducir al alumno en la Regla de Laplace.
- Sesión 4: Aplicación de la Regla de Laplace.
 - *Objetivo*: Reforzar al alumno en la Regla de Laplace.
- Sesión 5: Probabilidad de un suceso obtenida empíricamente, frecuencias absolutas y relativas.
 - *Objetivo*: Introducir al alumno en las frecuencias absolutas y relativas, y en la tabla de frecuencias.

CONTENIDOS: Secuenciación de contenidos en sesiones

- Sesión 6: Trabajo en el aula informática: frecuencias absolutas y relativas, Ley de los grandes números. Proposición de actividades refuerzo y ampliación.
 - *Objetivo*: Refuerzo general de los conceptos estudiados en la unidad didáctica, previo al examen.
- Sesión 7: Examen de la unidad didáctica.
 - *Objetivo*: Evaluar la adquisición de conceptos realizada por parte del alumno, a nivel procedimental y estructural.

METODOLOGÍA

Se deben tener en cuenta determinadas orientaciones metodológicas:

- Priorizar la funcionalidad del aprendizaje, ya que de esta manera se evita que el alumno piense que las matemáticas son un mundo aparte de la realidad cotidiana que le rodea
- Se realizarán técnicas de trabajo en grupo. Punto importante, dado que el alumnado se encuentra en el momento de desarrollo de sus habilidades sociales
- En los primeros años de la ESO se debe trabajar el aprendizaje inductivo a través de la manipulación y la observación (lanzamiento de dados, monedas, etc)

METODOLOGÍA

- **Punto previo de partida de construcción de los Aprendizajes**
- El aprendizaje significativo depende de los conocimientos previos, que dado que se trata de 1º de la ESO, son todavía muy incipientes. En primaria se aborda el concepto de azar y probabilidad de manera cualitativa, explicando los conceptos de manera manipulativa (dados, monedas).

METODOLOGÍA

- Se propondrán tanto la resolución de ejercicios como de problemas. Para la resolución de problemas, se hará incapié mediante orientaciones metodológicas, en la resolución mediante el método de Pólya.
- **1. Entender el problema.** Se realizarán preguntas para garantizar que el alumno se plantea cuestiones sobre las incógnitas del problema.
- **2. Configurar un plan.**
- **3. Ejecutar el plan**
- **4. Analizar el resultado.** Se propondrá que el alumno razone y explique si la solución es lógica o no lo es.

METODOLOGÍA

Herramientas Metodológicas

Se emplearán:

- Cuadernos de trabajo, que el alumno deberá entregar para ser corregidos por el profesor
- Se realizarán pruebas escritas, exámenes.
- Se realizarán actividades en casa y en clase, que junto a los cuadernos de trabajo, servirán para llevar a cabo la evaluación continua, que según la ley, debe ser preferente (Orden 10 de agosto 2007)

CLIMA DE CLASE

Con respecto al clima de clase se plantea una situación que favorezca el **aprendizaje colaborativo**, esto es, que los miembros del alumnado se apoyen los unos a los otros en la comprensión de los conceptos. Para ello, **se favorecerá que la mayoría de las actividades se realicen en grupo:**

- En el **aula ordinaria** se fomentarán grupos de **cuatro miembros** o como mucho cinco de tal modo que sean heterogéneos y donde queden integrados los alumnos y alumnas con necesidades educativas especiales.
- En el **aula de informática** los agrupamientos serán de **dos personas** buscando que el alumnado más adelantado apoye la comprensión del más retrasado o con mayores dificultades. Por supuesto, previamente se preguntará a los estudiantes si están de acuerdo con esta disposición.

CLIMA DE CLASE

Otro aspecto a remarcar son las **normas de clase** que tanto el profesorado como el alumnado han de tener en cuenta en su comportamiento:

- 1) Se deberá cumplir y respetar en todo momento las **normas del Centro**.
- 2) Se deberá cumplir y respetar en todo momento las normas designadas por el profesor o profesora para la **utilización y aprovechamiento del material e instrumental del Centro**, como por ejemplo los equipos informáticos.
- 3) **Se evitará y se sancionará todo tipo de discriminación** por sexo, origen, diferente nivel socioeconómico o discapacidad dentro y fuera del aula.
- 4) **Se evitará en lo posible y se sancionará cualquier tipo de conductas violenta o de menosprecio** por parte del alumnado a otros compañeros, profesores y personal no docente del centro dentro y fuera del aula.

Finalmente, para aquellos **alumnos y alumnas expulsados o con conductas disruptivas**, el Departamento de Matemáticas debe preparar una batería de contenidos adicionales consistentes en:

- Resúmenes de una o varias unidades didácticas
- Actividades complementarias referidas a una o varias unidades didácticas.

CONTENIDOS PREVIOS

La presente unidad didáctica tiene lugar al final del curso de 1º de ESO. Debido a esta circunstancia, se ha de tener que el alumnado ha recibido previamente los siguientes contenidos:

- Números naturales y operaciones básicas con los mismos
- Divisibilidad, fracciones y operaciones con fracciones
- Proporcionalidad numérica,
- Inicios de álgebra. Planteamiento y resolución de ecuaciones sencillas
- Perímetros y áreas de polígonos y círculos
- Funciones y gráficas

Aparte, en 6º de primaria, el currículo contiene el tema de “azar y probabilidad”. En otras palabras, éste no se trata del primer contacto con muchos de los contenidos de la unidad didáctica.

ACTIVIDADES: General

Como actividad general y común compartida con el resto de las unidades didácticas, los diez primeros minutos de cada sesión se dedicarán a fomentar la lectura en clase mediante alguno de los siguientes libros:

- ENZENSBERGER, H.M. (1997) *El diablo de los números*. Editorial Siruela, 1998.
- GUEDJ, D. (1998) *El teorema del loro*. Editorial Anagrama, 2002.
- FRABETTI, C. (1998) *El gran juego*. Editorial Santillana, 2000.
- MOLINA, M.I. (2004) *El señor del cero*. Editorial Alfaguara, 2004.
- OGAWA, Y. (2003) *La fórmula preferida del profesor*. Editorial Funambulista, 2008.
- SIERRA I FABRA, J. (2000) *El asesinato del profesor de matemáticas*. Editorial Anaya, 2001.

ACTIVIDADES: Test de conocimientos previos

a) Clasifica de entre los siguientes acontecimientos cuáles dependen del azar y cuáles no:

- Mañana me tocará la lotería.
- Amanecerá mañana.
- Al soltar una piedra caerá hacia el suelo.
- Hoy tocará en la lotería un número diferente del que ha tocado hoy.
- Mañana será un nuevo día.
- Hoy me voy a encontrar una moneda.
- Esta noche me va a picar un mosquito.

b) Imagina una bolsa en la que no se puede ver nada de lo que hay dentro que contiene seis bolas las cuales no puedes distinguir las unas de las otras mediante el tacto. Cinco de esas bolas son rojas y una es verde. Sin mirar sacas una bola y resulta que es roja. La metes de nuevo en la bolsa y procedes a extraer otra, ¿piensas que ahora es más fácil o más difícil que antes sacar la bola verde que otra roja?

Imagina que en vez de una bola roja hubieras sacado la verde y la introduces de nuevo en la bolsa. ¿Y ahora? ¿Es más fácil o más difícil sacar la bola verde que una roja?

c) Como muchas personas, es posible que en tu familia haya alguien que le guste jugar a la lotería, o a la primitiva, o compra cupones, o echa la quiniela. ¿Qué juegos de azar son los que conoces? ¿Ha ganado alguien de tu familia alguna vez? ¿Piensas que hay algún truco para ganar como elegir números que creas que dan buena suerte?

ACTIVIDADES: Actividad de motivación

Como actividad de motivación se invita al alumnado a contemplar el siguiente video:

http://www.youtube.com/watch?v=h_g_F68wpFE

Se trata de un video de **Juan Tamariz**, un magnífico cartomago que en esta grabación hace un truco de magia relacionado con encontrar cuatro cartas específicas dentro de la baraja. Se plantea al alumnado la siguientes preguntas:

- ¿Por qué este truco es un truco de magia?
- ¿Dónde radica la dificultad?
- ¿Por qué una persona que no se ha entrenado no puede realizar este truco?

Respecto a las dos últimas preguntas, concretamente en este truco se debe a la dificultad de sacar una carta de la baraja y que sea la que el mago exactamente quiere.

Y si alguien del alumnado no piensa que sea difícil **se hace la prueba**: se reparte por cada cuatro estudiantes una baraja francesa, y que comprueben la dificultad de sacar los cuatro ases al azar, siquiera un as.

Finalmente, se introduce el azar como una situación en la que no podemos prever exactamente lo que va a ocurrir, y un experimento aleatorio como aquel que depende del azar como el resultado de tirar a un dado o de sacar un carta de la baraja.

ACTIVIDADES: Suceso aleatorio y espacio muestral

Un suceso aleatorio es cada uno de los resultados posibles en un experimento aleatorio. El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles sucesos aleatorios.

La manera de expresar el espacio muestral puede ser mediante la letra “E” o la griega “Ω”. Por ejemplo, el espacio muestra de una moneda es:

$$E = \{C,X\}$$

Para introducir este concepto se plantea la siguiente actividad:

a) Al lanzar un dado de seis caras, ¿qué posibles resultados podemos obtener? Plantea el espacio muestral del dado.

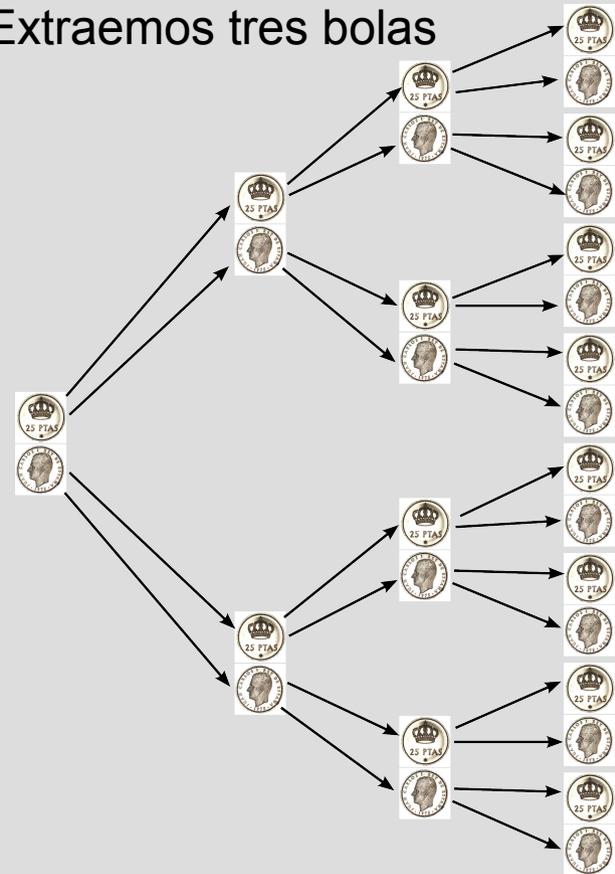
ACTIVIDADES: Suceso aleatorio y espacio muestral

Un espacio muestral no sólo se puede componer con los resultados directos de un experimento aleatorio, sino también con los resultados de realizar varias veces el experimentos. Con esto se conecta con las distintas combinaciones de sucesos en un experimento aleatorio. Para ello se plantea la siguiente actividad:

b) Tenemos una bolsa con bolas blancas y negras. Extraemos tres bolas consecutivamente. Plantea el espacio muestral.

Para introducir al alumnado en técnicas de representación como diagramas en árbol que les pueden ayudar a comprender mejor las probabilidades, se plantea la siguiente actividad:

c) Plantea mediante un diagrama en árbol el espacio muestral resultante de tirar cuatro veces seguidas una moneda.



ACTIVIDADES: Suceso elemental y suceso compuesto

Un **suceso elemental** es cada uno de los sucesos que forman parte de un espacio muestral. Un **suceso compuesto** es aquel formado por cualquier subconjunto de un espacio muestral. Para introducir esta diferenciación se plantean las siguientes actividades:

a) Si lanzamos un dado de seis caras, ¿qué diferencia existe entre el suceso A: sacar un 6, y el suceso B: sacar un número par?

b) Si consideramos el espacio muestral conformado por las combinaciones posibles al tirar cuatro veces seguidas una moneda, el suceso elemental A: sacar cuatro veces seguidas cara, se puede escribir $A = \{C,C,C,C\}$. Escribe el suceso compuesto B consistente en sacar tres veces seguidas cruz con cuatro tiradas.

$$B = \{(X,X,X,C), (C,X,X,X), (X,X,X,X)\}$$

c) Tenemos una baraja francesa en la que se retirado los comodines. Enumera los tipos de sucesos compuestos que se pueden conformar con la baraja francesa.

Cartas del mismo palo, cartas del mismo número, cartas de número impar, cartas de número par, cartas de número par/impar del mismo palo, cartas de mayor valor que..., cartas de menor valor que..., etc.

ACTIVIDADES: Probabilidad de un suceso

La probabilidad de un suceso se puede definir como: “el grado de confianza de que ese suceso ocurra”. O dicho de otro modo, “la facilidad o dificultad de que un determinado suceso tenga lugar”.

Para introducir esta noción se plantea la siguiente actividad:

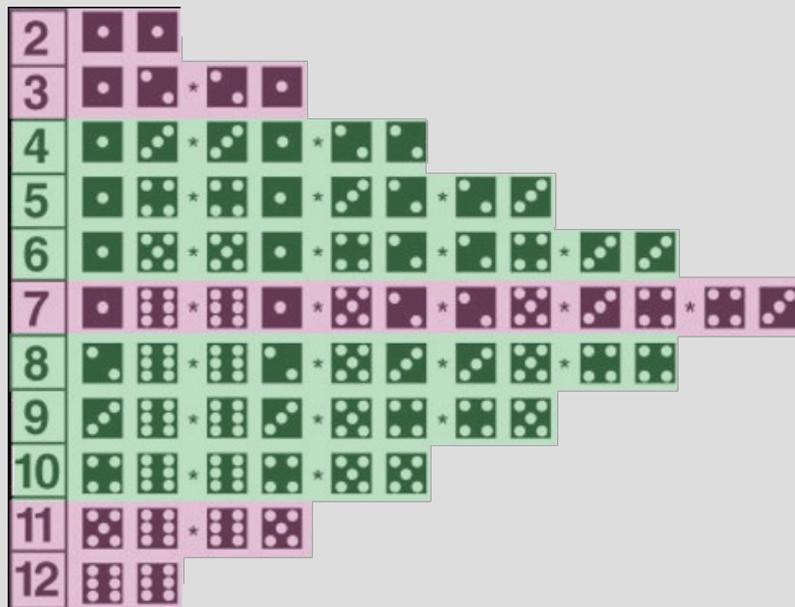
- a)** En la siguiente lista se proponen una serie de posibles situaciones aleatorias. Ordénalas según confíes más o menos en que puedan ocurrir.
- Que un décimo de lotería que hemos comprado vaya a tocar
 - Que salga un uno al lanzar un dado de seis caras
 - Que salga cara al lanzar una moneda
 - Sacar la carta de un as de una baraja sin mirar

ACTIVIDADES: Regla de Laplace

La **regla de Laplace** desarrolla la manera de calcular esta probabilidad. $P(S)$ es la probabilidad del suceso S , que según la regla de Laplace acoge valores entre 0 y 1 (o entre 0 y 100 si hablamos de porcentajes):

$$P(S) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables al suceso}}{N^{\circ} \text{ de casos posibles}}$$

Para introducir esta fórmula se propone la siguiente actividad:



b) Tenemos un dado de seis caras perfecto, es decir, no está trucado ni tiene imperfecciones que hagan que un número salga más que otro.

- En estas condiciones, ¿cada cuántas tiradas piensas que va a salir un uno? Plantealo con una fracción
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado sacáramos menos de 4?
- Si tiráramos dos veces el dado y sumamos lo obtenido, ¿qué resultado es más probable que salga? Confecciona una tabla donde se relacionen los resultados de las dos tiradas con lo que suman. Posteriormente, mediante la regla de Laplace, calcula las probabilidades de obtener cada resultado.

ACTIVIDADES: Regla de Laplace

Una vez introducido el concepto se procede a plasmar las distintas aplicaciones de la regla de Laplace.

En primer lugar, para practicar que la regla de Laplace no sólo se puede hacer en un sentido, sino también en el recíproco, se propone la siguiente actividad:

c) En la lotería de “el gordo” de navidad hay números desde el 00000 hasta el 99999.

- Si compras un décimo de lotería, ¿cuál es la probabilidad de que te toque “el gordo”? ¿Y si compraras dos décimos del mismo número? ¿Y de distinto número?
- Si un décimo de lotería cuesta 20 euros, ¿cuánto tendrás que gastarte para tener una probabilidad de 0,001 para que te toque “el gordo”?

ACTIVIDADES: Regla de Laplace

La regla de Laplace también puede emplearse para analizar tablas de contingencia, tablas que definen relaciones entre los elementos de un conjunto respecto a una serie de categorías.

d) La siguiente tabla muestra la distribución de alumnos y alumnas en las dos clases, A y B, de un curso de 1º de ESO.

	Alumnos	Alumnas
Clase A	12	10
Clase B	8	18

1) Si escribimos todos sus nombres en una tira de papel y los metemos en una bolsa, calcula mediante la regla de Laplace:

- La probabilidad de que al sacar un nombre sea alguien de la clase A.
- La probabilidad de que al sacar un nombre sea un chico.
- La probabilidad de que al sacar un nombre sea una chica de la clase B.

2) Un profesor de otro instituto acude al aula y os indica que en su curso:

- En mi instituto en 1º de ESO tenemos también dos clases, A y B, siendo el número total de alumnos y alumnas entre las dos de 48.
- La probabilidad de que un nombre sea de la clase A es 0,5.
- La probabilidad de que un nombre sea el de un chico es de 0,625.
- La probabilidad de que un nombre sea el de una chica de la clase B es 0,125.

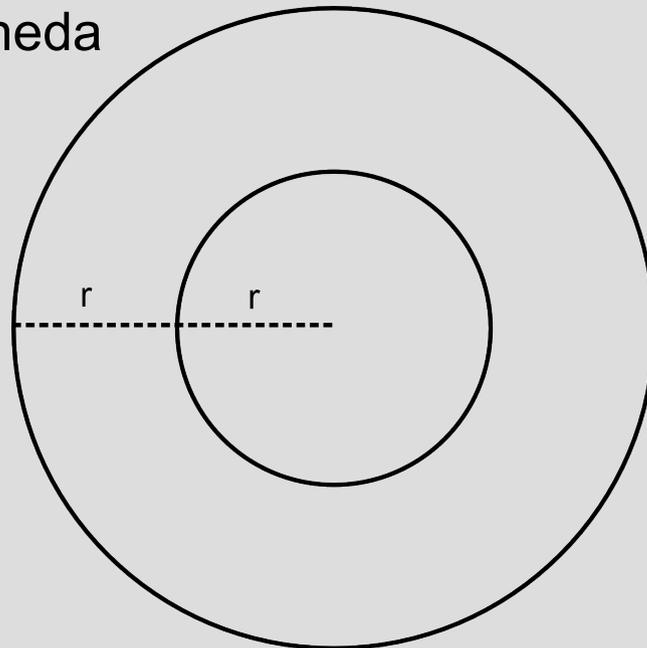
Plantea la tabla de contingencia de ese curso.

ACTIVIDADES: Regla de Laplace

El siguiente problema trata sobre la interpretación geométrica de la regla de Laplace.

e) Con tus amigos y amigas os inventáis un juego que consiste en pintar dos círculos concéntricos sobre el suelo de tal modo que gana quien más veces logre lanzar la moneda con la condición de que su centro esté dentro del círculo central. ¿Cuál es la probabilidad según la regla de Laplace de que al lanzar una moneda su centro se encuentre en el círculo interior?

“ r ” es el radio de la moneda



ACTIVIDADES: Regla de Laplace

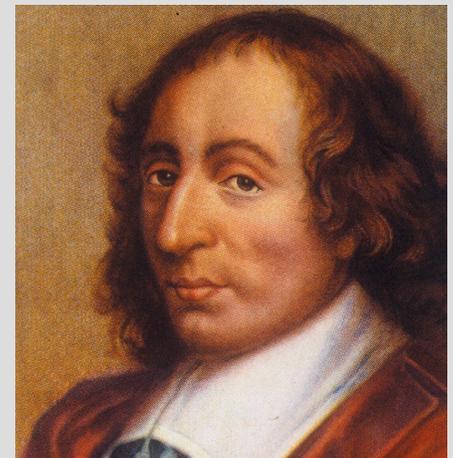
La siguiente actividad trata sobre un experimento donde los sucesos elementales son equiprobables pero los compuestos no.

f) Tres famosos matemáticos franceses del siglo XVII: Gilles de Roberval, Pierre de Fermat y Blaise Pascal, se plantearon un problema similar al siguiente:

Imagina que tienes que tomar una difícil decisión entre dos opciones y vas a hacerlo tirando a cara o cruz. Pero hay una opción que te gusta ligeramente más que la otra, entonces decides que si al tirar varias veces la moneda sale dos veces cara primero, optas por la que más te gusta, y si tres veces cruz por la otra.

- ¿Qué probabilidad existe de sacar dos veces cara antes que tres veces cruz?
- Y al revés, ¿qué probabilidad existe de sacar tres veces cruz antes que dos veces cara?

Calcula estas probabilidades con la regla de Laplace y teniendo en cuenta el diagrama en árbol realizado anteriormente.



ACTIVIDADES: Regla de Laplace

El siguiente problema trata de demostrar que las probabilidades se pueden emplear en un juego, así como se puede jugar con las probabilidades. Para esta actividad se divide al aula en grupos de cuatro, se realiza con sus ultraportátiles y se les entrega a cada grupo una baraja francesa. A continuación se les plantea el siguiente problema:

g) Buscad en Internet las reglas del sistema Texas Hold'em para el póquer. Vamos a jugar a una variante donde se consideran las siguientes reglas:

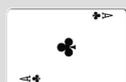
- No hay apuestas.
- Se retiran los comodines de la baraja.
- Cada jugador se encarga de barajar y repartir las cartas por turno, en el sentido de las agujas del reloj.
- Se empieza a repartir con el que se tiene a la derecha.
- Al comienzo de la partida se reparte a cada jugador dos cartas que se ponen boca arriba, estas dos cartas no se pueden cambiar. A continuación se les da otras tres cartas que no deben mostrar al resto de los jugadores.
- Si no les gustan las cartas pueden cambiar una, dos o tres con las que quedan en el mazo. No se pueden mirar las cartas en el mazo, se cogen las de arriba que estarán boca abajo. Igualmente ningún jugador podrá mirar ni tomar las cartas que otros descarten.
- Sólo habrá una ronda de descarte.
- Tras esta ronda se muestran las cartas. Gana el que tenga una combinación más valiosa de cartas según las reglas del Texas Hold'em.

ACTIVIDADES: Regla de Laplace

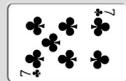
En grupos de cuatro solucionad el siguiente problema. Imaginad que estáis ante esta situación, ¿qué jugada realizaríais? Razonadlo calculando las probabilidades según la regla de Laplace.



Descarta 3 cartas



Descarta 2 cartas



Descarta 3 cartas

¿Te toca jugar a ti!



h) A continuación con tus compañeros o compañeras de grupo, juega varias partidas tratando de calcular las probabilidades en cada jugada. Finalmente, entre los cuatro, plantead un problema con una situación de una partida tal como se ha hecho en el ejercicio anterior.

ACTIVIDADES: Probabilidad obtenida empíricamente

A la hora de obtener la probabilidad de un suceso se puede realizar de tres maneras distintas:

- *A priori: juzgando que los sucesos de un determinado experimento aleatorio son más o menos equiprobables.*
- *A posteriori: realizando una investigación empírica experimentando sucesivas veces con el fin de obtener la probabilidad de los diferentes sucesos*
- *Por suposición.*

Como se ha dicho el calcular las probabilidades a priori es factible cuando los hechos se suponen más o menos equiprobables.

No obstante, cuando los sucesos no son equiprobables, para obtener la probabilidad hay que actuar empíricamente repitiendo el experimento sucesivas veces.

ACTIVIDADES: Probabilidad obtenida empíricamente

a) A continuación se muestra una lista de distintos experimentos aleatorios. ¿En cuáles de ellos piensas que los sucesos no son equiprobables, es decir, no tienen la misma probabilidad de ocurrir?

- Un dado
- Un dado trucado
- Una chincheta (al arrojar una chincheta pueden caer dos sucesos: de costado o de pié).
- Que esta noche se cene pescado en tu casa.
- Que al escoger un número de teléfono al azar sea de alguien del Real Madrid, del Barcelona o de otro equipo de fútbol.
- Que un recién nacido vaya a ser niño o niña.



ACTIVIDADES: Probabilidad obtenida empíricamente

Para introducir la obtención de la probabilidad a posteriori se plantea el siguiente experimento.

b) En grupos de cuatro que cada uno realice por turnos uno de los siguientes experimentos aleatorios: tirar un dado de seis caras, tirar una moneda con cara y cruz, tirar una chincheta, barajar un mazo de cartas y sacar al azar una carta de un determinado palo (esto es, cuatro posibles sucesos: corazones, diamantes, tréboles y picas). Realizad 60 pruebas de cada uno y anotad los resultados.

ACTIVIDADES: Frecuencias absolutas y frecuencias relativas

Las actividades que se proponen a continuación para las frecuencias absolutas, frecuencias relativas y la ley de los grandes números se realizan en el aula de informática con la hoja de cálculo del OpenOffice y se llevarán a cabo en grupos de dos.

Se explican los siguientes conceptos:

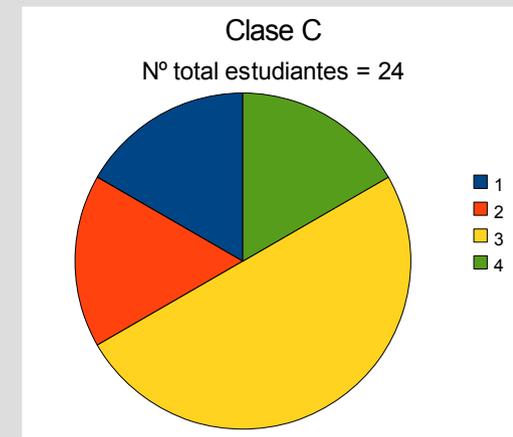
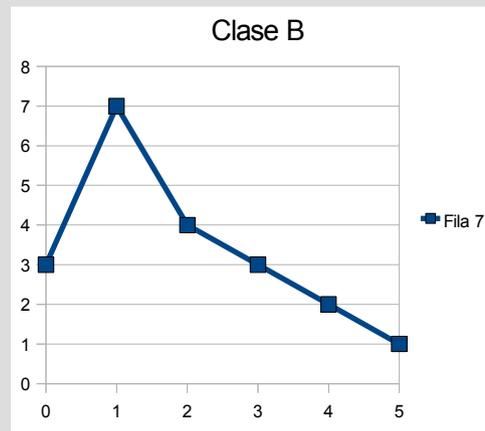
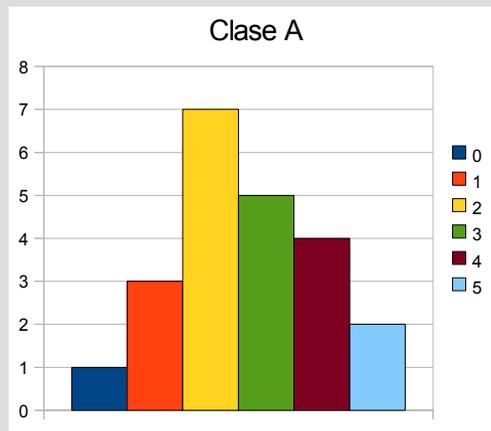
- *La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que tiene lugar.*
- *La **frecuencia relativa** de un suceso es la relación entre la frecuencia absoluta de dicho suceso y el número total de veces que se ha realizado el experimento.*

Para introducir dichos conceptos se emplean los recursos de diagrama de sectores, de barras y de líneas.

ACTIVIDADES: Frecuencias absolutas y frecuencias relativas

a) Los siguientes diagramas expresan los resultados que se han obtenido en las tres clases de un curso de 1º de ESO respecto a un examen de física donde las notas pueden acoger valores desde 0 (peor resultado) a 5 (mejor resultado).

- Desarrolla una tabla por cada una de las tres clases donde se relacionen los diferentes sucesos con su frecuencia absoluta y su frecuencia relativa. Este tipo de tablas recibe el nombre de “tablas de frecuencias”.
- Suma los resultados de las tres clases y construye la tabla de frecuencias para el curso al completo.
- Desarrolla para los resultados del curso al completo el diagrama de barras, de líneas y de sectores.



ACTIVIDADES: Frecuencias absolutas y frecuencias relativas

b) Construye las tablas de frecuencias para los experimentos que se han realizado con el dado, la moneda, la chincheta y la baraja. A continuación dibuja los diagramas de barras, líneas y sectores para cada uno.

¿Se corresponde la frecuencia relativa en el caso del dado, de la moneda y de la baraja con la probabilidad teórica según la regla de Laplace?

c) Dada la siguiente tabla de frecuencias relativas, rellenar parte correspondiente a las frecuencias, rellenarla parte correspondiente a las acumuladas.

x_i	n_i	f_i	p_i	N_i	F_i	P_i
1	16	8/25	32%			
2	20	2/5	40%			
3	9	9/50	18%			
4	5	1/10	10%			
Total	50	1	100%	50	1	100%

ACTIVIDADES: Ley de los grandes números

Un posible resultado obtenido del anterior experimento es que la frecuencia relativa de los distintos sucesos no se corresponde con la probabilidad teórica según la regla de Laplace.

A continuación, para explicar la razón se plantea la siguiente actividad:

a) Comunica los resultados obtenidos de los experimentos en tu grupo al resto de los grupos de la clase. Con todos los datos obtenidos de los experimentos, volved a realizar las tablas de frecuencias y los diagramas. ¿Observáis diferencias en cuanto a las frecuencias relativas con los resultados obtenidos anteriormente?

*Se introduce la “**ley de los grandes números**” consistente en que conforme se incrementa el número de experiencias la frecuencia relativa va asemejándose a la probabilidad teórica del suceso.*

Asimismo, esta ley no solamente sirve para experimentos donde los sucesos equiprobables. Con respecto a experimentos donde los sucesos no son equiprobables, cuanto mayor es el número de veces que se repite el experimento la frecuencia relativa tiende a un determinado número que se puede considerar como la “probabilidad de ese suceso”.

b) Con respecto al experimento aleatorio consistente en tirar una chincheta, plantea el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los sucesos.

ACTIVIDADES: Ley de los grandes números

c) Cuando una persona lanza una moneda unas pocas veces es posible que salga algunas veces más cara que cruz, o viceversa, sin que esto perjudique a que cuantas más veces se tire la moneda, más probable es que salga el 50% de las veces cara y el otro 50% cruz.

Un matemático experimentado, se ha entretenido en comprobar mediante la Regla de Laplace, que una moneda rallada, que se encontraba en su cartera, cumple la siguiente fórmula:

$$P(\text{cara}) = \frac{N+1}{2N}$$

Donde N es el número de veces que se ha tirado la moneda a partir del segundo intento.

Comprobad ahora vosotros, que aunque una moneda esté un poco rallada y al principio salga más cara que cruz, a medida que vayamos aumentando el número de intentos, se aproxima a la mitad de las veces.

RECURSOS

Ordenadores:

- *Aula de informática*: el aula de informática se empleará en la última sesión referente a la interpretación y creación de diagramas.
- *Pizarra digital u ordenador conectado a video-proyector*: para el resto de las sesiones, que se realizan en el aula ordinaria, se requiere uno de estos dos elementos para introducir los contenidos, guiar la búsqueda de información de Internet por parte del alumnado, exposición de videos y plantear los enunciados de las actividades.
- *Ultraportátiles del alumnado*: en estas sesiones se pedirá la utilización puntual de los ultraportátiles por parte del alumnado con el fin de buscar información en Internet para las tareas de clase.

Material:

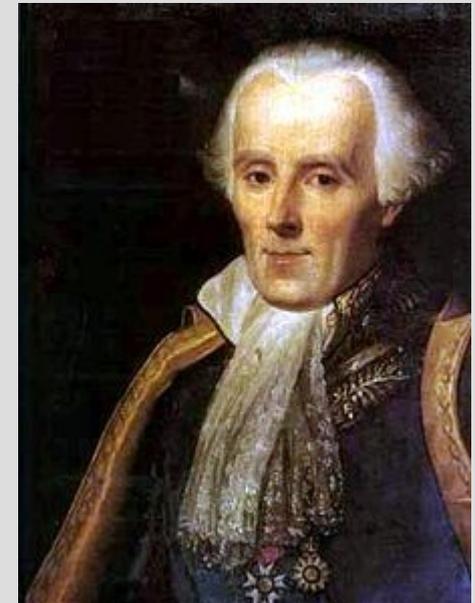
- Cuadernos, lápices y bolígrafos
- Útiles de dibujo
- Calculadora
- Material para experimentos aleatorios:
 - Barajas francesas para cada grupo de cuatro o cinco alumnos
 - Dados de seis caras para cada grupo de cuatro o cinco alumnos
 - Chinchetas

RECURSOS: Historia

- **El estudio de la probabilidad comenzó con el análisis de los juegos de azar.** En especial en el siglo XVI **Niccolo Fontana “Tartaglia”** (1499-1557) y **Girolamo Cardano** (1501-1576) estudiaron los juegos de dados. Cardano hizo una reflexión sobre las combinaciones posibles en las tiradas de dos dados de seis caras denominando “recorrido” a lo que hoy conocemos como “espacio muestral”.
- En el siglo XVII, un escritor francés bastante aficionado al juego, **el caballero De Méré**, propuso a los mejores matemáticos de la época, como **Gilles de Roberval** (1602-1675), **Blaise Pascal** (1623-1662) y **Pierre de Fermat** (1601-1665), problemas con respecto a cuál era la mejor opción para apostar ante determinadas situaciones. Uno de los problemas más famosos se enunciaba de la siguiente manera: *“Dos jugadores A y B se apostaron el uno contra el otro la misma cantidad, 32 monedas, al mejor de siete partidas. Pero el juego queda interrumpido cuando A había ganado dos y B una. ¿Cómo repartir el dinero consecuentemente entre los dos dado estos resultados?”* Pascal y Fermat resolvieron este problema empleando métodos diferentes. El método desarrollado por Fermat sería el que más adelante acabaría definiéndose como el que determinó el nacimiento de la teoría de la probabilidad.

RECURSOS: Historia

- **Jacob Bernoulli** (1654-1705) fue un famoso y genial matemático suizo miembro de una familia de matemáticos que entre otras cosas enunció la “**ley de los grandes números**” o teorema de Bernoulli que indica que conforme se incrementa el número de experiencias sucesivas en un experimento aleatorio la frecuencia relativa tiende a asemejarse a la probabilidad teórica. Uno de los cráteres de la Luna ha sido bautizado como cráter Bernoulli en honor a Jacob y a su hermano Johann.
- **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827) fue un matemático, físico y astrónomo francés. Entre otros muchos temas se dedicó a la probabilidad enunciando la famosa “**regla de Laplace**” y otros muchos resultados dentro de la teoría de probabilidades. Laplace también trabajó sobre las frecuencias absolutas y relativas, y realizó un famoso experimento en el que comparó los nacimientos de niños y niñas llegando a la conclusión de que la probabilidad P de que un recién nacido en Francia fuera varón era de 0,513513.



ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- Para atender a las diferentes capacidades, motivaciones e intereses de los alumnos los centros establecen medidas de atención a la diversidad. Según el RD 1631/2006 se proponen las siguientes medidas de atención a la diversidad:
- Agrupamientos flexibles
- Apoyo en grupos ordinarios
- Apoyo individual o en pequeño grupo
- Desdoblamientos de grupo

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Programas de Atención a la Diversidad

- Oferta de materias
- Medidas de refuerzo
- Adaptaciones del currículo
- Integración de materias en ámbitos
- Programas de diversificación curricular
- Programas de cualificación profesional inicial
- Otros programas de tratamiento personalizado para el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- **Ejemplo:** presencia de un alumno ciego en clase.

Actuaciones a llevar a cabo:

- Se solicitará la ayuda de un **profesor itinerante de la ONCE** que asesorará al profesorado para que éstos puedan llevar a cabo la adaptación del programa y la organización de los materiales.
- El profesor itinerante de la ONCE será el **nexo de unión entre profesores y padres** para lograr que el proceso sea continuo y estable.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Materiales en el Aula: el centro dispondrá para atender las necesidades del alumno ciego de materiales específicos como:

- **Caja aritmética**, para realizar todo tipo de operaciones
- **Ábaco** para realizar operaciones matemáticas
- En el caso de realizar los **conjuntos de sucesos** se puede utilizar cordones y el interior estar formado de legumbres, botones, arandelas.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- **Caja Aritmética**



ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- Otros materiales que puede disponer el centro:
- **Horno esteroscópico:** mediante calentamiento da relieve a las líneas impresas en un papel especial
- **Máquina Perkins**
- **Maquina de Braille Hablado**, que permite escuchar lo que se ha escrito en braille.



EVALUACIÓN: Aprendizaje del alumnado

- **Evaluación del Aprendizaje de los Alumnos**

Inicial: permite conocer el nivel cognitivo de partida, así como las ideas previas. Esto es importante en el cálculo de probabilidades, dado que sobre la incertidumbre existen determinados prejuicios.

Se realizará mediante test de conocimientos previos.

- **Formativa:** es referente a los progresos y dificultades que configuran el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es el conjunto de observaciones que el profesor realiza. Esta evaluación la realiza el profesor mediante las observaciones directas del desarrollo de la enseñanza-aprendizaje.

EVALUACIÓN: Aprendizaje del alumnado

- **Sumativa:** referente a los objetivos didácticos. se realizará al final de la fase de aprendizaje, e implica una evaluación de todo lo que se ha aprendido.

Según el Decreto 1631/2006 los criterios de evaluación de la parte de probabilidad y estadística en 1º de ESO son:

- Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica.
- Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.

EVALUACIÓN: Aprendizaje del alumnado

Los anteriores criterios de evaluación se plasmarán en los resultados obtenidos de:

- Observación de las intervenciones en el aula
- Trabajos personales y en grupo
- Control de las actividades realizadas en clase y de las enviadas para realizar en casa
- Preguntas en clase dirigidas a alumnos en concreto
- Exámenes

EVALUACIÓN: Aprendizaje del alumnado

Estos criterios aplicados a la presente unidad didáctica se pueden resumir en:

- Ser capaces de elaborar un espacio muestral.
- Calcular una frecuencia absoluta y relativa y ser capaz de construir una tabla de frecuencias
- Ser capaz de diferenciar entre sucesos aleatorios y no aleatorios
- Ser capaz de aplicar la Ley de Laplace en aquellos casos que sean oportunos
- Ser capaz de entender la Ley de los Grandes Números como una tendencia de sucesos.

EVALUACIÓN: Unidad didáctica

b) Evaluación de la Unidad Didáctica

El profesor a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica tomara nota del resultado docente de la misma, de manera que anotará determinadas cosas como:

- Idoneidad de los recursos utilizados (materiales, de organización del tiempo y del espacio, etc)
- El efecto que ha causado sobre el alumno las actividades desarrolladas a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje: el interés despertado, las reflexiones que han causado en el alumnado
- Si la secuenciación ha sido apropiada.

BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

- Libro de texto de matemáticas editorial Edelvives
- Libro de texto de matemáticas editorial SM
- BERGASA, J. (2003) *Laplace. El matemático de los cielos*. Nivola libros y ediciones, Tres Cantos, Madrid, 1º edición, junio de 2003.
- SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C. (2003) *Kolmogórov. El zar del azar*. Nivola libros y ediciones, Tres Cantos, Madrid, 1º edición, abril de 2003.
- TORRECILLAS, B. (2003) *Fermat. El mago de los números*. Nivola libros y ediciones, Tres Cantos, Madrid, 1º edición, 2003.

FIN



por vuestra atención