Aprendizaje y Enseñanza de las materias de Matemáticas

Resolución de problemas

Antonio Aranda Plata

Departamento de Álgebra
Universidad de Sevilla

30 de enero de 2012

http://asignatura.us.es/apenmates/

La propuesta de G. Pólya

George Pólya

13 / diciembre / 1887 Budapest (Hungría)

7 / septiembre / 1985 Palo Alto, California (USA)

"Si no puedes resolver un problema, es porque existe un problema más fácil que tú no sabes resolver: encuéntralo"

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

G. Pólya. "*Cómo plantear y resolver problemas*". Trillas. México, 1976.

I) Comprender el problema

- Desear resolver el problema.
- Entender el enunciado.
- Responder a las preguntas:
    - ¿Qué nos piden? ¿Cuál es la incógnita?
    - ¿Cuáles son los datos?
    - ¿Cuáles son las condiciones?
- Notación adecuada.
- Dibujar la figura, si hay alguna relacionada con el problema.

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

II) Concebir un plan

- ¿Conocemos algún problema relacionado?
- Si tenemos un problema relacionado con el nuestro, ya resuelto, ¿podemos hacer uso de él?
- ¿Puede enunciarse el problema de forma diferente?
- ¿Hemos empleado todos los datos? ¿Hemos hecho uso de todas las condiciones?

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

III) Ejecución del plan

- Verificar cada paso del plan.
- Efectuar las operaciones que nos llevan a la solución.

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

III) Ejecución del plan

- Verificar cada paso del plan.
- Efectuar las operaciones que nos llevan a la solución.

IV) Examinar la solución obtenida

- Verificar el resultado.
- Número de soluciones.
- ¿Puede obtenerse el resultado de un modo distinto?
- ¿Puede utilizarse el resultado, o el método, para resolver algún otro problema?

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

III) Ejecución del plan

- Verificar cada paso del plan.
- Efectuar las operaciones que nos llevan a la solución.

IV) Examinar la solución obtenida

- Verificar el resultado.
- Número de soluciones.
- ¿Puede obtenerse el resultado de un modo distinto?
- ¿Puede utilizarse el resultado, o el método, para resolver algún otro problema?

¿Puede hacerse así a cualquier nivel? Un ejemplo interesante.

Algunos ejemplos

Áreas de cuadriláteros

Algunos ejemplos

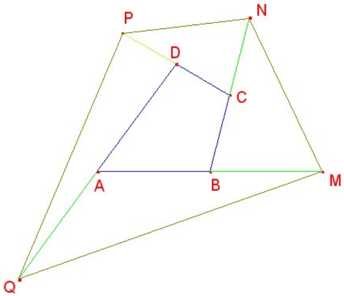
Áreas de cuadriláteros

A partir de un cuadrilátero ABCD que mide k unidades de área se alargan los lados, todos "en el mismo sentido", hasta que la longitud sea el doble de la inicial y se unen los puntos que resultan: M, N, P, Q. ¿Cuál es el área del cuadrilátero MNPQ?

Algunos ejemplos

Áreas de cuadriláteros

A partir de un cuadrilátero ABCD que mide k unidades de área se alargan los lados, todos "en el mismo sentido", hasta que la longitud sea el doble de la inicial y se unen los puntos que resultan: M, N, P, Q. ¿Cuál es el área del cuadrilátero MNPQ?

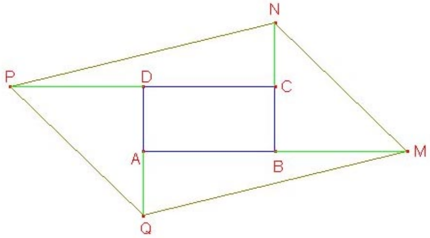


Un caso más sencillo

¿Será más fácil en un caso particular?

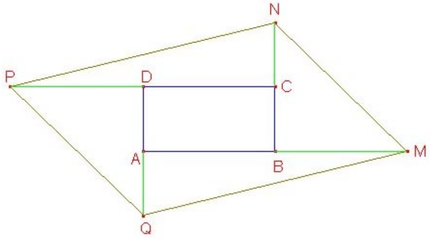
Un caso más sencillo

¿Será más fácil en un caso particular?



Un caso más sencillo

¿Será más fácil en un caso particular?



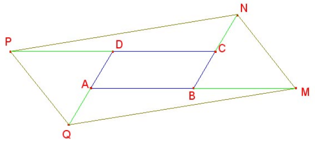
Las áreas de los triángulos son iguales a la del rectángulo. Por lo tanto el área total es $5k$.

Vamos a complicarlo un poco

¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?

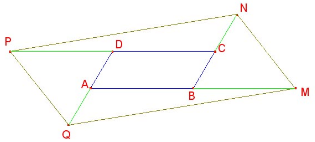
Vamos a complicarlo un poco

¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?



Vamos a complicarlo un poco

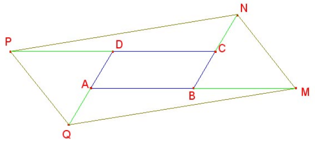
¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?



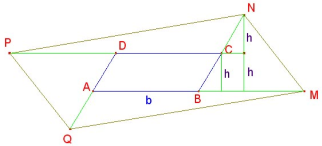
Aunque ahora hay que hacer algo más, también es fácil ver que el área es $5k$.

Vamos a complicarlo un poco

¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?



Aunque ahora hay que hacer algo más, también es fácil ver que el área es $5k$.

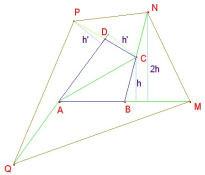


Volvamos al caso general

El área, en el caso general, ¿será también $5k$?

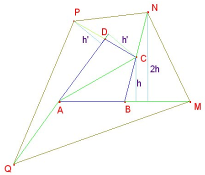
Volvamos al caso general

El área, en el caso general, ¿será también $5k$?



Volvamos al caso general

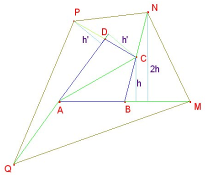
El área, en el caso general, ¿será también $5k$?



$$\begin{aligned}[BMN] &= 2[ABC]\\ [PQD] &= 2[ACD]\\ [BMN]+[PQD] &= 2[ABCD]\end{aligned}$$

Volvamos al caso general

El área, en el caso general, ¿será también $5k$?



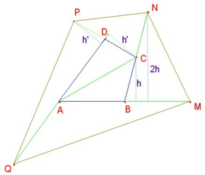
$$\begin{aligned}
[BMN] &= 2[ABC] \\
[PQD] &= 2[ACD] \\
[BMN]+[PQD] &= 2[ABCD]
\end{aligned}$$

Análogamente con la otra diagonal:

$$\begin{aligned}
[AQM] &= 2[ABD] \\
[PCN] &= 2[BCD] \\
[AQM]+[PCN] &= 2[ABCD]
\end{aligned}$$

Volvamos al caso general

El área, en el caso general, ¿será también $5k$?



$$\begin{aligned}[BMN] &= 2[ABC]\\ [PQD] &= 2[ACD]\\ [BMN]+[PQD] &= 2[ABCD]\end{aligned}$$

Análogamente con la otra diagonal:

$$\begin{aligned}[AQM] &= 2[ABD]\\ [PCN] &= 2[BCD]\\ [AQM]+[PCN] &= 2[ABCD]\end{aligned}$$

Es decir, $[PQMN] = 4[ABCD] + [ABCD] = 5[ABCD]$

Leer con atención

Leer con atención

Cuando iba para San Lucas
me encontré con un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
cada saco tenía siete gatos,
y cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿cuántos iban a San Lucas?

Leer con atención

Cuando iba para San Lucas
me encontré con un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
cada saco tenía siete gatos,
y cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿cuántos iban a San Lucas?

¡A San Lucas iba yo solo!

Ahora, uno de números

Hallar la suma de todos los números naturales desde 1 hasta 10n que no sean múltiplos de 2 ni de 5. (Se supone conocimiento de progresiones aritméticas).

Ahora, uno de números

Hallar la suma de todos los números naturales desde 1 hasta $10n$ que no sean múltiplos de 2 ni de 5. (Se supone conocimiento de progresiones aritméticas).

Cuando se ha planteado este problema a los alumnos (Olimpiada) lo han enfocado de TRES maneras diferentes.

Ahora, uno de números

Hallar la suma de todos los números naturales desde 1 hasta 10n que no sean múltiplos de 2 ni de 5. (Se supone conocimiento de progresiones aritméticas).

Cuando se ha planteado este problema a los alumnos (Olimpiada) lo han enfocado de TRES maneras diferentes.

- Hallando la suma de todos los números, quitando la suma de los múltiplos de 2, quitando la suma de los múltiplos de 5 y añadiendo la suma de los múltiplos de 10, porque se había quitado dos veces.

Ahora, uno de números

Hallar la suma de todos los números naturales desde 1 hasta 10n que no sean múltiplos de 2 ni de 5. (Se supone conocimiento de progresiones aritméticas).

Cuando se ha planteado este problema a los alumnos (Olimpiada) lo han enfocado de TRES maneras diferentes.

- Hallando la suma de todos los números, quitando la suma de los múltiplos de 2, quitando la suma de los múltiplos de 5 y añadiendo la suma de los múltiplos de 10, porque se había quitado dos veces.
- Hallando la suma de todos los números impares y quitando la suma de todos los múltiplos de 5 impares (los que terminan en 5).

Ahora, uno de números

Hallar la suma de todos los números naturales desde 1 hasta 10n que no sean múltiplos de 2 ni de 5. (Se supone conocimiento de progresiones aritméticas).

Cuando se ha planteado este problema a los alumnos (Olimpiada) lo han enfocado de TRES maneras diferentes.

- Hallando la suma de todos los números, quitando la suma de los múltiplos de 2, quitando la suma de los múltiplos de 5 y añadiendo la suma de los múltiplos de 10, porque se había quitado dos veces.
- Hallando la suma de todos los números impares y quitando la suma de todos los múltiplos de 5 impares (los que terminan en 5).
- Pero la inmensa mayoría de los alumnos resolvieron el problema de una forma muy diferente:

Qué hicieron la mayoría de los alumnos

Los números que hay que sumar son los terminados en $1, 3, 7$ y 9.
$1 + 3 + 7 + 9 = 20$.

Qué hicieron la mayoría de los alumnos

Los números que hay que sumar son los terminados en $1, 3, 7$ y 9.
$1 + 3 + 7 + 9 = 20$.

De esta manera la suma pedida será: $(1 + 3 + 7 + 9) + (11 + 13 + 17 + 19)+$

$+(21 + 23 + 27 + 29) + \cdots + [(10n - 9) + (10n - 7) + (10n - 3) + (10n - 1)]$.

Qué hicieron la mayoría de los alumnos

Los números que hay que sumar son los terminados en $1, 3, 7$ y 9.
$1 + 3 + 7 + 9 = 20$.

De esta manera la suma pedida será: $(1 + 3 + 7 + 9) + (11 + 13 + 17 + 19)+$

$+(21 + 23 + 27 + 29) + \cdots + [(10n - 9) + (10n - 7) + (10n - 3) + (10n - 1)]$.

Los últimos sumandos pueden escribirse así:
$(10(n - 1) + 1) + (10(n - 1) + 3) + (10(n - 1) + 7) + (10(n - 1) + 9)$.

Qué hicieron la mayoría de los alumnos

Los números que hay que sumar son los terminados en $1, 3, 7$ y 9.
$1 + 3 + 7 + 9 = 20$.

De esta manera la suma pedida será: $(1 + 3 + 7 + 9) + (11 + 13 + 17 + 19)+$

$+(21 + 23 + 27 + 29) + \cdots + [(10n - 9) + (10n - 7) + (10n - 3) + (10n - 1)]$.

Los últimos sumandos pueden escribirse así:
$(10(n - 1) + 1) + (10(n - 1) + 3) + (10(n - 1) + 7) + (10(n - 1) + 9)$.

Entonces, la suma total es:

$$= \sum_{x=0}^{n-1} [(10x + 1) + (10x + 3) + (10x + 7) + (10x + 9)] =$$

Qué hicieron la mayoría de los alumnos

$$= \sum_{x=0}^{n-1} (40x + 20) = \sum_{x=0}^{n-1} 40x + \sum_{x=0}^{n-1} 20 =$$

Qué hicieron la mayoría de los alumnos

$$= \sum_{x=0}^{n-1}(40x+20) = \sum_{x=0}^{n-1} 40x + \sum_{x=0}^{n-1} 20 =$$

$$= 40\sum_{x=0}^{n-1} x + 20n = 40 \times \frac{0+(n-1)}{2} \times n + 20n =$$

Qué hicieron la mayoría de los alumnos

$$= \sum_{x=0}^{n-1}(40x + 20) = \sum_{x=0}^{n-1} 40x + \sum_{x=0}^{n-1} 20 =$$

$$= 40\sum_{x=0}^{n-1} x + 20n = 40 \times \frac{0 + (n-1)}{2} \times n + 20n =$$

$$= (20n - 20)n + 20n = 20n^2 - 20n + 20n = \mathbf{20n^2}.$$

J. Mason, L.Burton, K. Stacey. "*Pensar matemáticamente*". Editorial Labor. MEC. 1988.

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
  - ¿Qué es lo que SÉ?
  - ¿Qué es lo que QUIERO?
  - ¿Qué puedo USAR?

J. Mason, L.Burton, K. Stacey. "*Pensar matemáticamente*". Editorial Labor. MEC. 1988.

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
  - ¿Qué es lo que SÉ?
  - ¿Qué es lo que QUIERO?
  - ¿Qué puedo USAR?
- Las preguntas del profesor.
  - Empezar por preguntas generales y sugerencias simples.
  - Ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas.
  - La lista de preguntas debe ser corta, para que se repitan en circunstancias diversas, convirtiéndolas así en un hábito mental.
  - Hay buenas y malas preguntas.

J. Mason, L.Burton, K. Stacey. "*Pensar matemáticamente*". Editorial Labor. MEC. 1988.

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
  - ¿Qué es lo que SÉ?
  - ¿Qué es lo que QUIERO?
  - ¿Qué puedo USAR?
- Las preguntas del profesor.
  - Empezar por preguntas generales y sugerencias simples.
  - Ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas.
  - La lista de preguntas debe ser corta, para que se repitan en circunstancias diversas, convirtiéndolas así en un hábito mental.
  - Hay buenas y malas preguntas.
- Fase de ataque: estados de ánimo.
  - ¿ATASCADO? ¡Escribe! Y, al cabo de un rato, vuelve a ver qué habías hecho.
  - ¡AJÁ! ¡Enhorabuena! ¡A por otro!

J. Mason, L.Burton, K. Stacey. “*Pensar matemáticamente*”. Editorial Labor. MEC. 1988.

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
  - ¿Qué es lo que SÉ?
  - ¿Qué es lo que QUIERO?
  - ¿Qué puedo USAR?
- Las preguntas del profesor.
  - Empezar por preguntas generales y sugerencias simples.
  - Ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas.
  - La lista de preguntas debe ser corta, para que se repitan en circunstancias diversas, convirtiéndolas así en un hábito mental.
  - Hay buenas y malas preguntas.
- Fase de ataque: estados de ánimo.
  - ¿ATASCADO? ¡Escribe! Y, al cabo de un rato, vuelve a ver qué habías hecho.
  - ¡AJÁ! ¡Enhorabuena! ¡A por otro!
- Fase de revisión:
  - COMPROBAR la solución.
  - REFLEXIONAR en las ideas y momentos claves.
  - GENERALIZAR a conceptos más amplios.

A modo de final

Un experimento que dura 12 minutos.