EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD DE ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

MATEMÁTICAS II

1. **Ejercicio 1**

   Sea f la función definida por:

   $$f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3} \quad \text{para } x \neq 0$$

   (a) [**1'25 puntos**] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

   (b) [**1'25 puntos**] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

2. **Ejercicio 2**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = (x-3)e^x$.

   (a) [**1 punto**] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

   (b) [**1'5 puntos**] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

3. **Ejercicio 3** Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por

   $$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

   (a) [**1 punto**] Determina las asíntotas de la gráfica de f.

   (b) [**1 punto**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

   (c) [**0'5 puntos**] Esboza la gráfica de f.

4. **Ejercicio 4** Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ para $x \neq a$.

   (a) [**1'5 puntos**] Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.

   (b) [**1 punto**] Para el caso $a = 2$, $b = 3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

5. **Ejercicio 5**

   Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

   (a) [**1'5 puntos**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

   (b) [**1 punto**] Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

6. **Ejercicio 6**

   Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \ln(x)$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

   (a) [**1'5 puntos**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

   (b) [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$.

7. **Ejercicio 7**

   Considera las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = e^{x-1}$ y $g(x) = e^{1-x}$.

   (a) [**1'25 puntos**] Esboza las gráficas de f y de g y determina su punto de corte.

   (b) [**1'25 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g.

8. **Ejercicio 8**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   (a) [**1'5 puntos**] Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

   (b) [**1 punto**] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

9. **Ejercicio 9 [2'5 puntos]**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

   $$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

   Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

10. **Ejercicio 10**

    Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

    $$f(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{y} \qquad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

    Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

    (a) [**2 puntos**] Calcula los valores de a, b y c.

    (b) [**0'5 puntos**] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

11. **Ejercicio 11 [2'5 puntos]**

    Sea f la función definida para $x \neq 0$, por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f.

12. **Ejercicio 12 [2'5 puntos]**

    Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

13. **Ejercicio 13**

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.

    (a) [**1'5 puntos**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

    (b) [**1 punto**] Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

14. **Ejercicio 14**

    Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x(senx + cosx)$.

    (a) [**1'25 puntos**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

    (b) [**1'25 puntos**] Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

15. **Ejercicio 15 [2'5 puntos]**

    Sea $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ la función definida por

    $$f(x) = \sqrt{x^2 + x} + x$$

    Determinar la asíntota de la gráfica de f.

16. **Ejercicio 16[2'5 puntos]**

    Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

    $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

    tiene extremos relativos en $(0, 0)$ y en $(2, 2)$. Calcular a, b, c y d.

    Problema

    Un dirigente de cierto partido político afirma que dimitirá si el porcentaje de votantes al partido no alcanza el 20 %. Se ha estimado que el porcentaje de participación en la consulta será, al menos, el 40 % y que el porcentaje de votantes al partido dependerá del porcentaje de participación según esta función (P indica el porcentaje de votantes y x el de participación):

    $$P(x) = -0,00025x^3 + 0,045x^2 - 2,4x + 50 \qquad 40 \leq x \leq 100$$

    (a) [**1'25 puntos**] Indica cuándo crece el porcentaje de votantes al partido y cuándo decrece. Según la función, ¿es posible que el dirigente no tenga que dimitir?

    (b) [**1'25 puntos**] Dibuja la gráfica de la función.