UNIVERSIDAD DE SEVILLA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE E.S.O., BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATERIAS DE MATEMÁTICAS

BLOQUE I

UNIDAD DIDÁCTICA:

- Razones trigonométricas.
- Relaciones métricas en los triángulos.
- Aplicación a la resolución de problemas métricos en el mundo físico.

ALUMNOS:

Antonio González de Herrera Carrillo

Beatriz Moreno Parodi

Pablo Núñez de la Torre

0. UN POCO DE HISTORIA

Geometría: "medición de la tierra". Trigonometría: "medición de triángulos".

ANTIGUO EGIPTO: Nace la geometría como necesidad de volver a medir las tierras con exactitud cuando el Nilo se desbordaba y borraba las lindes de las tierras cultivables. **NECESIDAD DE LA POBLACIÓN**.
Papiro de Rhind: problemas relacionados a las pirámides (56 o 59b).

GRECIA: Desarrolla los conocimientos geométricos mediante procedimientos de abstracción, generalización, síntesis y análisis. **PROCEDIMIENTOS DEDUCTIVOS**.
Thales, Pitágoras y Aristóteles en una primera época, pero sobre todo la terna de Euclides (sistematizador), Arquímedes (investigador) y Apolonio (virtuosismo) son figuras destacadas de la época.

RENACIMIENTO: Da Vinci o Durero. **GEOMETRÍA COMO EXPLICACIÓN DE LA BELLEZA**. Aplicación al urbanismo y desarrollo de ciudades.

SIGLO XVII: René Descartes, Pierre de Fermat y Blaise Pascal. **GEOMETRÍA ANALÍTICA** (cartesiana + diferencial + algebraica): explicar las figuras geométricas mediante técnicas del análisis matemático y el álgebra.

Sebald Beham (1500-1550): Geometría

1. CONEXIÓN CON LA REALIDAD

La geometría interpreta el entorno físico mediante una visión idealizada y modelizada del mismo. La trigonometría facilita la medición del entorno próximo (topografía) y del lejano (astronomía) con métodos precisos y eficaces.

- **Topografía**: medición de alturas, distancias o áreas.

- La triangulación mediante **GPS** consiste en averiguar la distancia de cada una de las tres señales respecto al punto de medición. Conocidas las tres distancias se determina fácilmente la propia posición relativa respecto a los tres satélites. Además es indispensable conocer las coordenadas o posición de cada uno de los satélites. De esta forma se obtiene la posición absoluta o coordenadas reales del punto de medición.

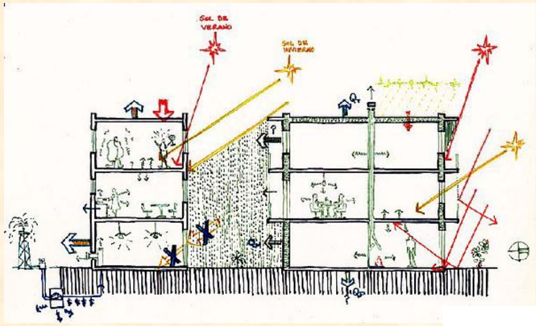
1. CONEXIÓN CON LA REALIDAD

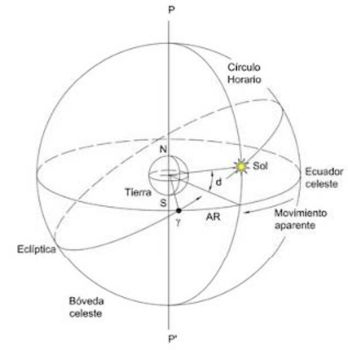
- **Arte y arquitectura**: estudio de perspectivas, espacios creados, áreas y volúmenes, sombras proyectadas, etc.

- **Ingenierías**: diseños de vehículos aerodinámicos, fuentes de energía sostenibles (placas solares cada vez más eficientes que buscan un ángulo determinado para aprovechar la energía solar el mayor tiempo posible), etc.

- **Husos horarios**: en función del grado de inclinación de los rayos del sol sobre la tierra.

En base a estos temas surgirán los problemas de las actividades planteadas en las sesiones.





2. LA UNIDAD DIDÁCTICA EN EL CONTEXTO DE LA PROGRAMACIÓN

1º ESO:	2º ESO:	3º ESO:
GEOMETRÍA PLANA		
PRIMEROS CONCEPTOS DE GEOMETRÍA EN EL PLANO: RECTAS, ÁNGULOS, POLÍGONOS	ESCALAS: MAPAS Y PLANOS	MOVIMIENTOS EN EL PLANO: TRASLACIÓN, GIRO, SIMETRÍA LUGARES GEOMÉTRICOS
TRIGONOMETRÍA		
PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO IGUALDAD DE TRIÁNGULOS	TEOREMA DE THALES: SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS TEOREMA DE PITÁGORAS: CÁLCULOS DE DISTANCIAS	ÁNGULOS EN FIGURAS PLANAS THALES:FIGURAS SEMEJANTES

4º ESO (OPCIÓN B):	MATEMÁTICAS I (1º BACH):	MATEMÁTICAS I (2º BACH):
GEOMETRÍA PLANA		
SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA: SISTEMAS DE COORDENADAS ECUACIONES DE LA RECTA	GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA: PRODUCTO ESCALAR POSICIONES RELATIVAS RECTAS LUGARES GEOMÉTRICOS: CÓNICAS	PROBLEMAS MÉTRICOS: DISTANCIAS ÁREAS LUGARES GEOMÉTRICOS
TRIGONOMETRÍA		
RAZONES TRIGONOMÉTRICA: DEFINICIÓN, RELACIONES RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: TEOREMA DEL SENO Y COSENO TEOREMA DE ADICIÓN ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS	

(*) En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II no se presentan contenidos de Geometría.

3. ADECUACIÓN A LOS DECRETOS DE ENSEÑANZA

ESTATAL: DECRETO DE ENSEÑANZAS MÍNIMAS DE LA E.S.O. (R.D. 1631/2006 del 29 de diciembre)

Anexo II: Matemáticas.

*"La geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, **describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas**. […]. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención."*

*"La **utilización de recursos manipulativos** que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría […]. **Especial interés presentan los programas de geometría dinámica** al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos […]".*

Contenidos: (4º CURSO OPCIÓN B)

Bloque 4. Geometría.

- *Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.*
- *Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.*
- *Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.*

Objetivos de la materia:

5. ***Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas** y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.*

6. ***Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos** (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.*

3. ADECUACIÓN A LOS DECRETOS DE ENSEÑANZA

ANDALUCÍA: ORDEN 10-08-2007 POR EL QUE SE DESARROLLA EL CURRÍCULO DE LA E.S.O. EN ANDALUCÍA

Anexo I: ENSEÑANZAS PROPIAS DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE ANDALUCÍA PARA LA E.S.O. : hechos diferenciadores.

Núcleos temáticos:

Núcleos temáticos transversales	Resto de núcleos temáticos
- Resolución de problemas	- Desarrollo del sentido numérico y la simbolización matemática.
- Uso de los recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje	- Las formas y figuras y sus propiedades
- Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas	- Interpretación de fenómenos [...] a través de funciones, [...], estadísticas y probabilidad.

Resolución de problemas:

- ***Esencia fundamental** del pensamiento y el saber matemático.*
- *Fomenta la **autonomía e iniciativa personal**, promueve la perseverancia en la búsqueda de alternativas de trabajo y contribuye a la flexibilidad para modificar puntos de vista.*

Sugerencias metodológicas y de utilización de recursos:

- *Los **conocimientos geométricos deben relacionarse con la resolución de problemas**, a través de planteamientos que requieran la **construcción de modelos o situaciones** susceptibles de ser representados a través de figuras o formas geométricas.*
- *El reconocimiento, representación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos se debe abordar a través del **proceso de descomposición de formas complejas en formas elementales**, a partir de cuyo estudio se podrán deducir propiedades de las figuras más complicadas.*

Criterios de evaluación:

- *La evaluación debe **evitar planteamientos memorísticos**.*
- *Es conveniente **fomentar y valorar los procesos de investigación y deducción realizados**, a la vez que se valoran los procesos seguidos en el análisis, planteamiento y resolución de las situaciones y problemas de la vida cotidiana.*

4. CONTRIBUCIÓN A LAS COMPETENCIAS BÁSICAS

1. **COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA**: uso de la **expresión oral y escrita** en la formulación y expresión de las ideas.

2. **COMPETENCIA MATEMÁTICA**: posibilidad real de **aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento** o situaciones de la vida cotidiana.

3. **COMPETENCIA EN EL CONOCIMIENTO Y LA INTERACCIÓN CON EL MUNDO FÍSICO**: en las explicaciones dadas por el profesor en clase y en el planteamiento de problemas se buscará su **utilidad para comprender el mundo que nos rodea**.

4. **COMPETENCIA EN TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y COMPETENCIA DIGITAL**: incorporando las **herramientas tecnológicas como recurso didáctico**.

5. **COMPETENCIA SOCIAL Y CIUDADANA**: a través de la **participación democrática en clase, exponiendo y defendiendo ideas y conjeturas**.

6. **COMPETENCIA CULTURAL Y ARTÍSTICA**: la geometría, bajo nuestro entender, proporciona un **entendimiento y gusto por la estética de las formas puras que después podrá trasladarse a las artes**.

7. **COMPETENCIA DE APRENDER A APRENDER:** el alumno dispondrá de nuevas **habilidades y herramientas para continuar aprendiendo de una manera más eficaz y autónoma**.

8. **AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL**: **afrontando los problemas planteados y trabajando en su resolución** el alumno irá adquiriendo capacidad trabajo, demora en la necesidad de satisfacción inmediata y de aprender de los errores, y por tanto **aumentará su responsabilidad, perseverancia y autoestima**.

5. OBJETIVOS

OBJETIVOS MÍNIMOS

- Conocer el **origen de la trigonometría y el porqué de su estudio**.
- Conocer las **diferentes unidades de medida de ángulos y la relación entre ellas**.
- Identificar la **semejanza entre figuras** planas por aplicación del Teorema de **Thales**.
- Conocer las razones trigonométricas, identificándolas en situaciones reales sencillas, y calculándolas por asimilación al triángulo rectángulo.

OBJETIVOS MEDIOS

- Deducir algebraica y gráficamente los **teoremas del cateto y la altura**.
- **Utilizar** adecuadamente **la calculadora y otras herramientas informáticas** para efectuar cálculos trigonométricos.
- **Resolver triángulos** cualesquiera y otras figuras planas por descomposición en otras más simples con ayuda del triángulo rectángulo y sus razones trigonométricas.
- **Identificar en la vida cotidiana** situaciones en las que puedan ser útiles los conocimientos trigonométricos adquiridos, **con el fin de resolver problemas**: efectuar mediciones de longitudes o ángulos en situaciones reales, calcular superficies y áreas,…

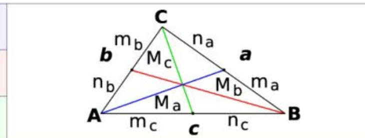
OBJETIVOS MÁXIMOS

- Descubrir las **relaciones entre las razones trigonométricas** de un mismo ángulo y entre parejas de ángulos complementarios, suplementarios, que difieren en 180,…
- Identificar y relacionar las razones trigonométricas entre ángulos en los diferentes cuadrantes de la circunferencia unidad.
- Conocer algebraica y gráficamente los **teoremas del seno y el coseno**.

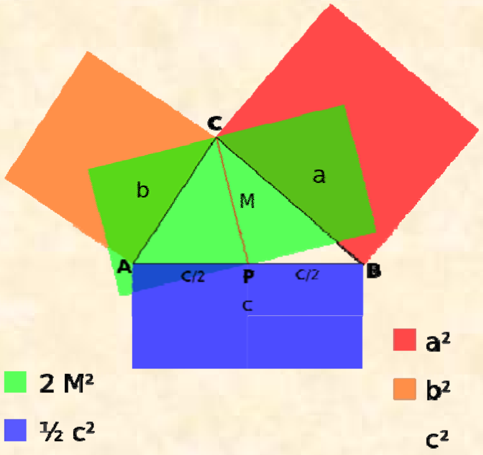
6. CONTENIDOS

ACLARACIÓN

- Qué son las Relaciones Métricas en los Triángulos.
- Cuáles entendemos forman parte de la E.S.O.

$M_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$		
$M_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$		
$M_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$		
$a = \sqrt{2(b^2+c^2)-4M_a^2}$	$b = \sqrt{\frac{a^2}{2}-c^2+2M_a^2}$	$c = \sqrt{\frac{a^2}{2}-b^2+2M_a^2}$
$a = \sqrt{\frac{b^2}{2}-c^2+2M_b^2}$	$b = \sqrt{2(a^2+c^2)-4M_b^2}$	$c = \sqrt{-a^2+\frac{b^2}{2}+2M_b^2}$
$a = \sqrt{-b^2+\frac{c^2}{2}+2M_c^2}$	$b = \sqrt{-a^2+\frac{c^2}{2}+2M_c^2}$	$c = \sqrt{2(a^2+b^2)-4M_c^2}$

(Lados: a, b y c) — (Medianas: M_a, M_b y M_c)[1] — (Semilados: $m_a=n_a=½a$, $m_b=n_b=½b$ y $m_c=n_c=½c$).



CONCEPTUALES

Unidades de medida de ángulos: el grado sexagesimal y el radián.

Razones trigonométricas principales en un triángulo rectángulo: seno, coseno y tangente.

Ecuación fundamental de la trigonometría.

Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos,…

Razones trigonométricas secundarias: cosecante, secante y cotangente.

Teoremas del **seno** y el **coseno**.

6. CONTENIDOS

PROCEDIMENTALES

Conversión entre las diferentes unidades de medida de ángulos.

Identificación de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y su relación con Pitágoras.

Valor y signo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera a través de la circunferencia unidad.

Aplicación de la ecuación fundamental de la trigonometría.

Utilización de la calculadora en modo sencillo y avanzado.

Resolución de triángulos obtusángulos por descomposición en dos triángulos rectángulos.

Cálculo de perímetros y áreas de diferentes **figuras planas** por descomposición.

Utilización de los **conceptos teóricos de ángulo y razón trigonométrica** para realizar **mediciones**.

Resolución de problemas mediante formación de **modelos matemáticos** a partir de situaciones reales.

ACTITUDINALES

Reconocimiento de la **utilidad de la trigonometría** para resolver problemas reales.

Curiosidad por conocer las **aplicaciones de la trigonometría** en la propia Matemática y en otras disciplinas.

Adquisición de **hábitos y métodos de trabajo** adecuados.

Confianza del alumno para **resolver problemas de carácter geométrico**.

7. SECUENCIACIÓN DE CONTENIDOS

La Unidad Didáctica se organiza según la siguiente secuenciación. Es conveniente aclarar que las sesiones no se corresponden directamente con horas de clase, ya que el ritmo de las mismas estará en función de cómo vaya respondiendo el alumnado en la asimilación de contenidos.

1. Sondeos de **ideas previas**: se repasarán y evaluarán los conocimientos de cursos anteriores en relación a la geometría y los triángulos.
2. Sesiones de **exposición de contenidos** conceptuales que se completarán con la **realización de ejercicios procedimentales** y algorítmicos para reforzar estos conocimientos. Los contenidos se han dividido en 4 sesiones: razones trigonométricas, unidades de medida de ángulos, relaciones entre las razones trigonométricas y circunferencia goniométrica.
3. **Resolución directa** de triángulos rectángulos en situaciones reales. Una sesión, de modo que se afiancen los conocimientos adquiridos, y a modo de preparación de las sesiones posteriores.
4. Sesiones de **resolución de problemas** de aplicación en el mundo físico. Se han organizado en 3 grupos, uno de resolución no directa de triángulos rectángulos, otro de triángulos oblicuángulos, y un tercero de aplicación a figuras planas. En relación con los problemas propuestos se introducirán los contenidos finales de la unidad.
5. Sesión de **evaluación**: prueba final escrita, análisis de resultados y repaso.

8. RECURSOS METODOLÓGICOS

Trabajo de campo: “*la utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico*”.

Instrumentos de dibujo: papel milimetrado, regla graduada, medidor de ángulos, compás,…, con el fin de construir de modelos o situaciones susceptibles de ser representadas a través de figuras o formas geométricas.

Calculadora científica: nivel sencillo y avanzado. “*La misma […] debe convertirse en una herramienta para la construcción del pensamiento matemático y facilitar la comprensión de los conceptos, ya que permiten liberar de una parte considerable de carga algorítmica*”.

Programas de geometría dinámica: su uso se justifica por “*el énfasis que se debe tener en los significados, en los razonamientos y en la comunicación de los procesos seguidos*”.

9. PRINCIPIOS METODOLOGICOS

- Fomentar la **participación y diálogo** del y entre el alumnado, permitiendo que se expresen, defiendan sus argumentos y se equivoquen.

- Plantear **situaciones relacionadas con la práctica real** y, de modo recíproco, trasladar los contenidos aprendidos a situaciones de la vida cotidiana, lo cual reforzará que los conocimientos sean transferibles.

- Crear **situaciones de aprendizaje motivadoras**, dándole un enfoque investigativo que haga que el alumno "descubra" los conceptos por sí mismo.

- Los **nuevos significados** se construyen **desde la concreción de los esquemas previos**.

- Favorecer el **progreso conceptual** con una correcta secuenciación de los contenidos a través de las actividades propuestas.

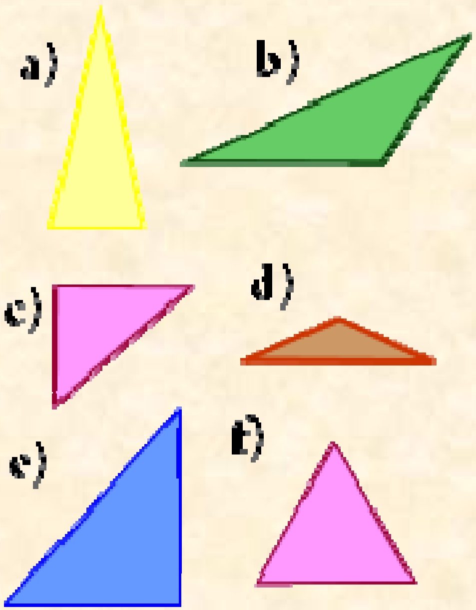
10. SONDEO DE IDEAS PREVIAS

Repaso de algunos conceptos:

- En esta sesión de sondeo de ideas previas, presentaremos a los alumnos una serie de **triángulos**, y ellos tendrán que intentar **clasificarlos según sus lados** y **según sus ángulos.**

- Repasaremos en concreto el **triángulo rectángulo**, ya que será fundamental para el desarrollo de la unidad.

- A continuación también repasaremos las **condiciones** que se tienen que cumplir para que **tres segmentos formen un triángulo** y la demostración de que **la suma de los ángulos de un triángulo es de** 180°**.**

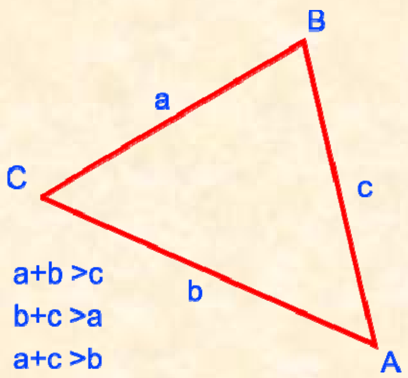


10. SONDEO DE IDEAS PREVIAS

Desigualdad triangular:

¿Cualesquiera tres segmentos forman un triángulo?

¿Deben satisfacer alguna condición?



La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado:

Es fácil comprobar por qué sucede eso. Imagina que quieres ir del punto B al C. Si vas siguiendo la línea recta recorrerás una longitud "a", mientras que si vas pasando por el punto A recorrerás una longitud "b+c". Pero sabemos que **el camino más corto entre dos puntos es la línea recta**, así que "b+c" tiene que ser mayor que "a": $b + c > a$

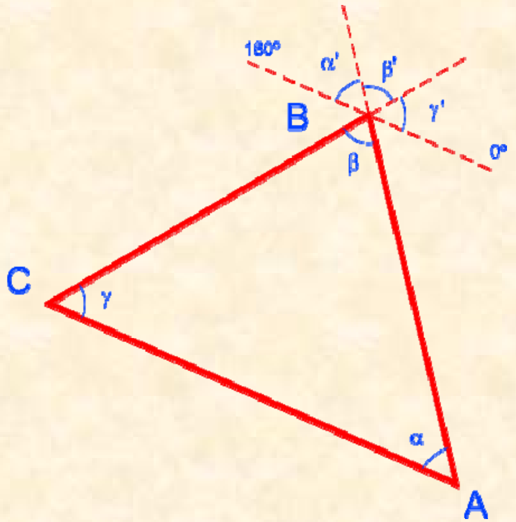
Lo mismo pasará si queremos ir del punto B al A ($a+b>c$) o del C al A ($a+c>b$).

Desigualdad triangular

10. SONDEO DE IDEAS PREVIAS

Suma de los ángulos internos de un triángulo:

¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo?



La suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°.

Se traza por B una recta paralela al lado AC, quedando determinados los ángulos que se observan en la figura.

De lo anterior:

Las parejas de ángulos $\alpha - \alpha'$ y $\gamma - \gamma'$ son iguales por estar formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.

Los ángulos $\beta - \beta'$ son iguales por ser ángulos opuestos.

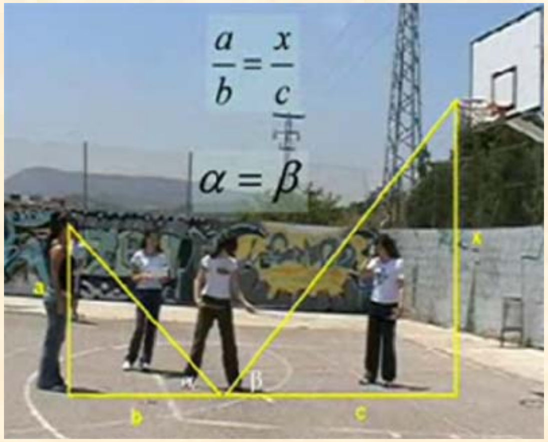
10. SONDEO DE IDEAS PREVIAS

Aprovechemos una de las aplicaciones de la trigonometría vistas en los inicios de esta unidad didáctica: **la reflexión solar**.

Este **método fue ideado por Euclides de Alejandría en el siglo III a. C**.

La actividad propone **calcular la altura de algún elemento** no accesible con la simple **ayuda de un espejo**.

Dividimos a los alumnos en **grupos de 4** y les indicamos qué debe medir cada grupo. (**Una farola, un poste, un árbol**, etc.) Lo haremos aquí con la altura a la que se encuentra el **aro de una canasta de baloncesto**.

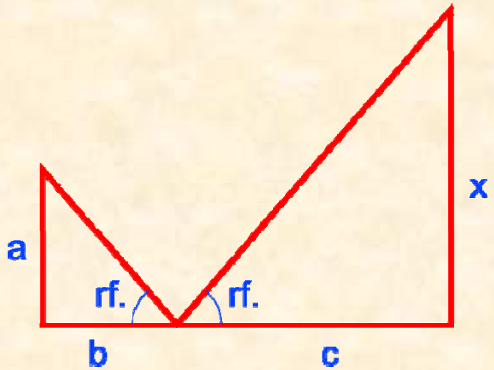


Entre la canasta y el observador situamos el espejo haciendo una pequeña marca en él.

Con el espejo situado en el suelo y mirando a través de él, **el observador se aleja poco a poco hasta coincidir el aro y la pequeña marca que se hizo anteriormente.**

10. SONDEO DE IDEAS PREVIAS

En esta situación observamos que se generan **dos triángulos rectángulos imaginarios.**



El grupo toma todas las medidas necesarias, y deberá plantear el siguiente sencillo modelo-dibujo matemático, donde iremos colocando los datos.

Como el **rayo incidente** y **el reflejado** forman **un mismo ángulo con la horizontal**, estos dos **triángulos son semejantes**.

Llamando **"a" a la altura hasta los ojos del espectador**, **"b"** a la **distancia** que separa al **observador del espejo**, **"c"** a la **distancia** del **espejo** al **pie de la canasta**, y **"x" a la altura** a la que se encuentra ésta, sólo quedará **aplicar la proporción** para estimar la altura deseada.

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{b}$$

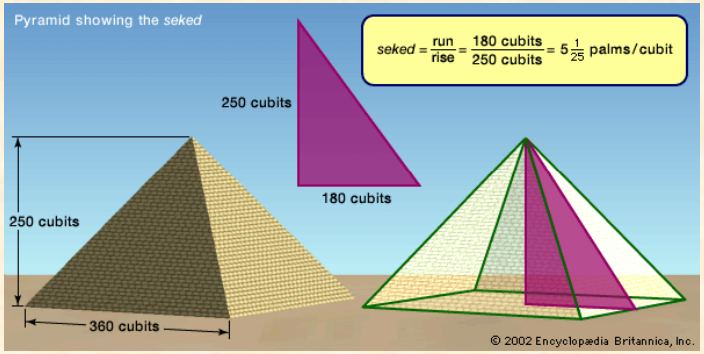
$$\frac{x}{2.65} = \frac{1.50}{1.30}$$

Planteamos la proporción y observamos que la canasta se encuentra a 3,06 metros de altura.

$$x = 3.06m$$

11. SESIÓN 1: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Tal y como se comentó en la introducción histórica de la unidad, la civilización egipcia utilizaba las relaciones geométricas en pos del progreso de su población.

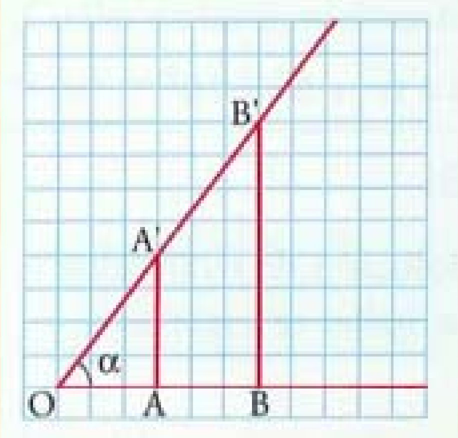


En lo que a la trigonometría se refiere, **los egipcios definían las pirámides por su "Seked",** que era una **relación entre la mitad del lado de la base de la pirámide y su altura**, lo cual les **ayudaba** durante su **construcción**, ya que **debía de permanecer fija**.

Esta **relación** sería **posteriormente denominada** por la trigonometría como "**cotangente**" del ángulo que forman las caras de la pirámide con la base.

Los **egipcios sabían**, y **nosotros** igualmente **por el Teorema de Thales**, que esta **relación** era **independiente del tamaño de la pirámide**, y que por lo tanto:

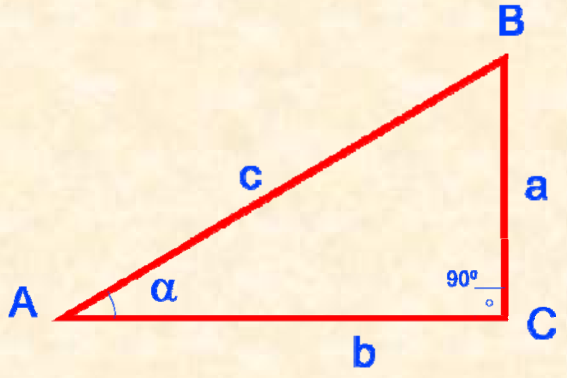
$$Seked = \cot ag\alpha = \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$$



11. SESIÓN 1: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En un **triángulo rectángulo** en C, como el de la figura, podemos establecer, entre otras, las **relaciones**:

$$\frac{a}{c};\frac{b}{c};\frac{a}{b}$$



Las cuales, **dependerán** de la amplitud del **ángulo** α, pero **nunca** del **tamaño** del triángulo. [Triángulos semejantes]

Seno del ángulo α como la relación entre el cateto opuesto a dicho ángulo (a) y la hipotenusa (c).

$$sen\alpha = \frac{a}{c}$$

Coseno del ángulo α como la relación entre el cateto contiguo a dicho ángulo (b) y la hipotenusa (c).

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

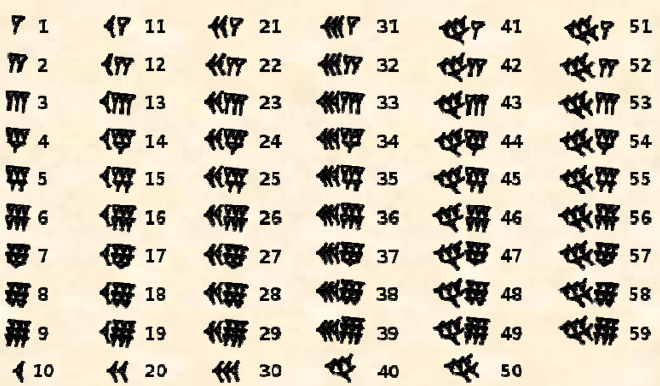
Tangente del ángulo α como la relación entre el cateto opuesto (a) y el cateto contiguo (b) a dicho ángulo.

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

La sesión se completará con ejercicios sencillos de resolución de triángulos rectángulos conocidos un lado y un ángulo, y la determinación de las razones trigonométricas principales de sus ángulos.

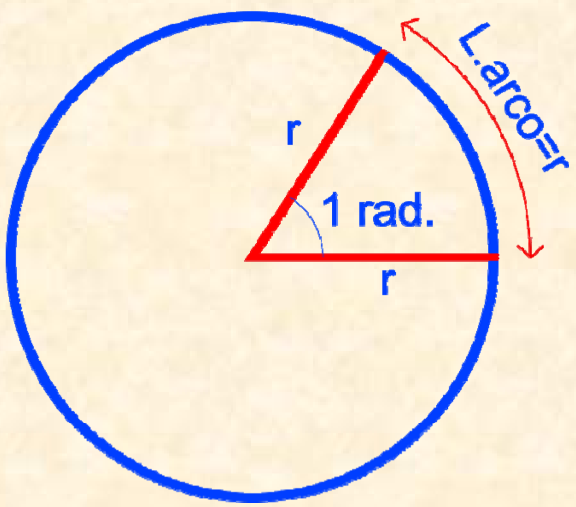
11. SESIÓN 2: UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS

Si, como sabemos, el **ángulo recto** es aquel que tiene una amplitud de **90º**, no es difícil el razonamiento para concluir que una **circunferencia completa tiene 360º**.



Esta **división** de la **circunferencia** en **360** partes tiene su **origen** en la **civilización babilónica**, que entendía el número **60 como mágico**, y todo lo media a través de él.

Aunque el **sistema sexagesimal** es el **más común** en nuestra cultura "popular", la **comunidad científica** (S.I.) tiene por unidad de medida de los ángulos **el radián**. **Un radián es la medida del ángulo cuyo arco tiene la misma longitud que el radio con el que se dibuja dicho arco.**



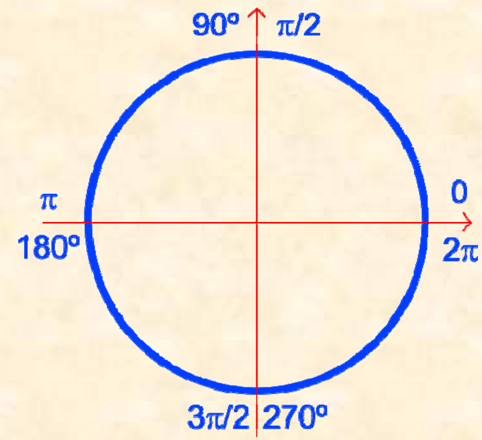
La circunferencia tendrá tantos radianes como veces contenga la longitud de la circunferencia al arco con la longitud del radio:

$$\frac{L}{L_{arco}} = \frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi$$

11. SESIÓN 2: UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS

Las medidas de los ángulos principales será por tanto:

$$90^{\circ} = \frac{\pi}{2} \quad 180^{\circ} = \pi \quad 270^{\circ} = \frac{3}{2}\pi$$

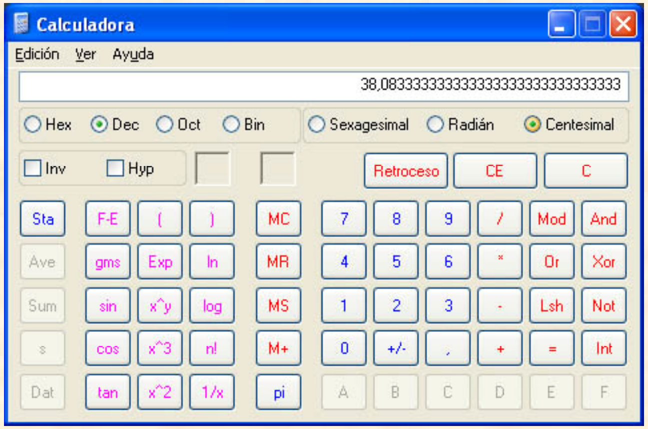


Los alumnos deberán determinar la medida en radianes de los siguientes ángulos:

$$45^{\circ}, \quad 135^{\circ}, \quad 225^{\circ}, \quad 315^{\circ}$$

Estamos por tanto ante un condicionante fundamental a la hora de trabajar con una calculadora científica.

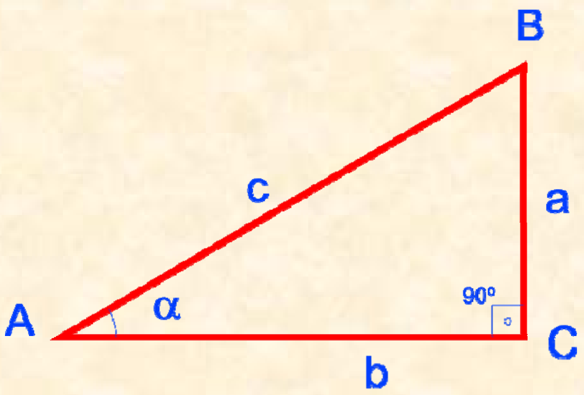
Se mostrará a los alumnos los **modos sexagesimal** y **radian** de la **calculadora**, y se realizarán ejercicios sencillos para comprobar que se obtienen los resultados esperados. Ejemplo:
MODO DEG; tan 45 = 1; MODO RAD; inv tan = **?????**



¿Qué valor se espera?, Razona tu respuesta.

11. SESIÓN 3: RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Intentaremos que los alumnos las deduzcan:



¿Cuál es el seno de α?

$$sen\,\alpha = \frac{a}{c} \rightarrow a = sen\,\alpha \cdot c$$

¿Cuál es el coseno de α?

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \rightarrow b = \cos\alpha \cdot c$$

¿Recordáis el Teorema de Pitágoras?

$$hipotenusa^2 = cateto_1^2 + cateto_2^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo :

$$c^2 = (sen\alpha)^2 \cdot c^2 + (\cos\alpha)^2 \cdot c^2$$

Sacando factor común y despejando:

$$1 = (sen\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$$

Es decir:

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Se definen igualmente **el resto de razones trigonométricas para al ángulo α**:

$$tag\,\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\cot ag\alpha = \frac{1}{tag\alpha} = \frac{b}{a}$$

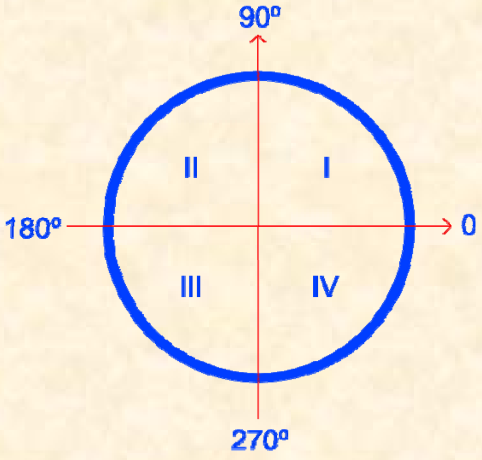
11. SESIÓN 4: CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

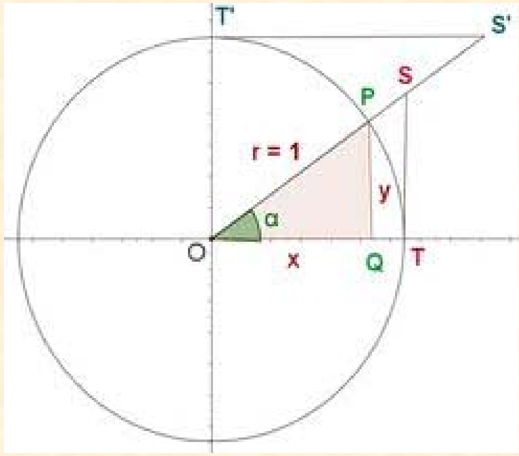
Circunferencia Goniométrica:

La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio 1, que se divide en cuatro cuadrantes.

Dado el ángulo α del dibujo y tomando el punto correspondiente P(x, y) en dicha circunferencia, el seno es la ordenada, **y**, y el coseno es la abscisa, **x**.

El **recorrido e interpretación de las razones trigonométricas** y **las relaciones entre parejas de ángulos** se desarrollarán posteriormente como conceptos.

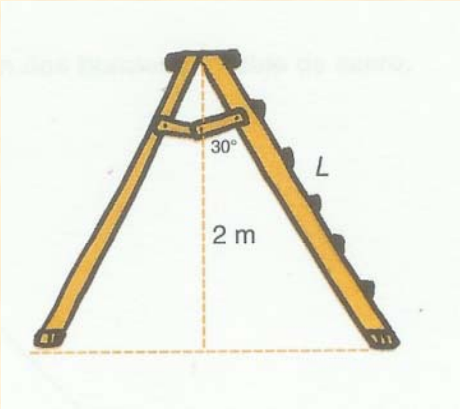




11. SESIÓN 5: PRIMEROS EJERCICIOS PRÁCTICOS

Continuaremos proponiendo ejercicios de resolución de triángulos rectángulos sencillos, (conocidos 2 datos). Para ir afianzando los conceptos vistos hasta ahora.

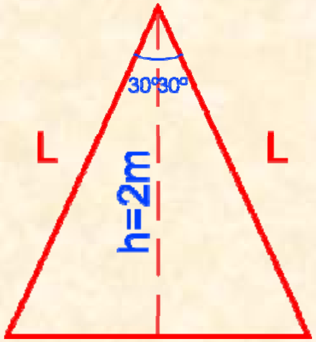
Ejercicio 1:



Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60 º. Si la altura que debe alcanzar la escalera es de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo?

¿Los alumnos **entienden el enunciado**?

¿Son capaces de **plasmar en un dibujo** el enunciado del problema?



¿Saben **identificar los datos conocidos** de los desconocidos?

¿Saben **utilizar los conceptos adquiridos para aplicarlos** y obtener así la solución al ejercicio?

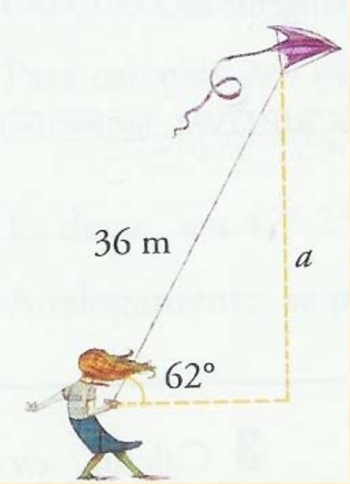
Solución: $\cos 30^\circ = \frac{2}{L} \Rightarrow L = \frac{2}{\cos 30^\circ}$ $\quad L = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

11. SESIÓN 5: PRIMEROS EJERCICIOS PRÁCTICOS

Ejercicio 2:

María está haciendo volar su cometa. Ha soltado 36m de hilo. El ángulo que forma con la horizontal tiene una tangente de valor 1.88. ¿A qué altura se encuentra la cometa sabiendo que la mano de María que sostiene la cuerda está a 83 cm del suelo?

¿Los alumnos **entienden el enunciado**?



¿Son capaces de **plasmar en un dibujo el enunciado** del problema?

¿Saben **identificar los datos** conocidos de los desconocidos?

¿Saben **aplicar los conceptos adquiridos**?

$$tg\ \alpha = 1{,}88 \Rightarrow \alpha = 62^\circ \rightarrow sen\ 62^\circ = \frac{a}{36} \rightarrow a = 31{,}79$$

¿Saben **llegar a la solución final** del problema?

Deben responder a lo que se les pregunta que es la altura medida desde el suelo:

La cometa está a una altura total de: $31{,}79 + 0{,}83 = 32{,}62\ m$

11. SESIONES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Metodología para "Resolver problemas":

Organización de la clase: Grupos de 4 alumnos designados por el profesor, mezclando alumnos más avanzados con otros más atrasados.

Trabajarán juntos en la resolución de problemas en sus cuadernos.

Ellos **discuten entre sí** estas cuestiones y las van anotando .

Los problemas planteados serán siempre sobre casos relacionados con el mundo físico.

Se trata de que este **comportamiento** se convierta en **habitual**.

El **profesor actuará de guía** haciendo las siguientes preguntas :

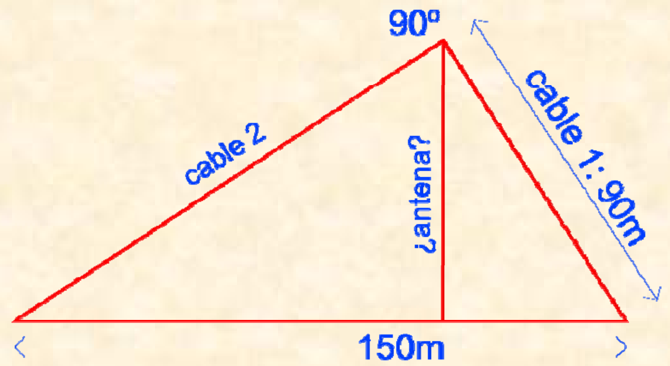
¿**Qué** estáis haciendo?
¿**Por qué** lo hacéis?
¿Cuál sería el **siguiente paso**?

11. SESIÓN 6: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Problema:

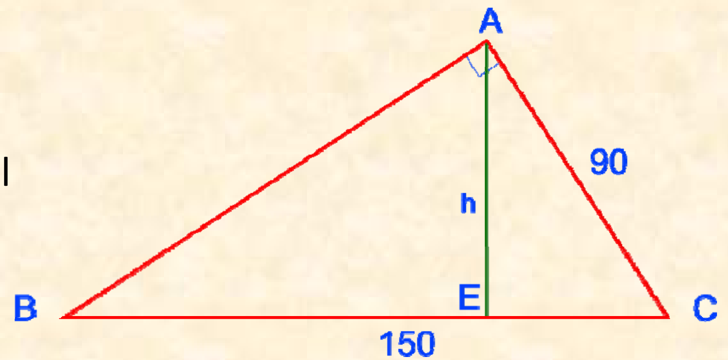
Una antena de radio está sujeta al suelo con dos tirantes de cable de acero que salen de la parte superior de la antena formando entre ellos un ángulo de 90º. El cable más corto mide 90 m y la distancia entre las sujeciones de ambos cables es de 150 m. Calcula la altura de dicha antena.

Se abre el debate entre los estudiantes.



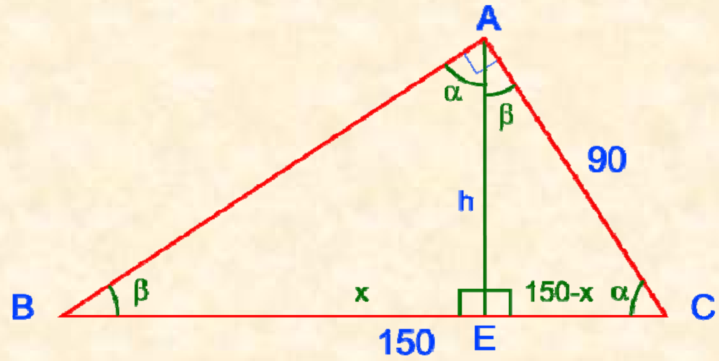
- ¿Entienden el enunciado?

- ¿Saben cuáles son los datos conocidos y los desconocidos?



- ¿Pueden elaborar un modelo geométrico para resolver el problema?

11. SESIÓN 6: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



- ¿Saben aplicar el Teorema de Thales cuando los triángulos no están en la posición esperada?

- ¿Saben aplicar la semejanza de triángulos?

Solución:

Al ser los triángulos ABE y CAE semejantes,

aplicando Thales (o también tg β en ambos triángulos) nos saldría:

$$\frac{h}{x} = \frac{150 - x}{h} \Rightarrow h^2 = x\,(150 - x)$$

De igual modo, al ser los triángulos ABC y CAE semejantes, aplicando Thales (o también sen β en ambos triángulos):

$$\frac{90}{150} = \frac{150 - x}{90} \Rightarrow 8100 = 150\,(150 - x)$$

Se despeja la x en esta ecuación y se sustituye en la otra sacando el valor de la antena h:

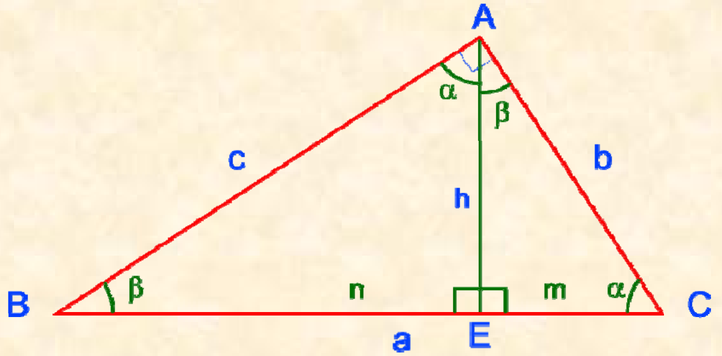
$$150 - x = \frac{8100}{150} = 54 \rightarrow x = 150 - 54 = 96$$

$$h^2 = 96 \cdot (150 - 96) \rightarrow h^2 = 5184 \rightarrow h = \pm 72$$

La altura de la torre es de 72 m

11. SESIÓN 6: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Aprovechamos el modelo gráfico del problema anterior para la demostración de el **Teorema de la altura** y el **Teorema del cateto**.



Al ser los triángulos ABE y CAE semejantes, relacionando por Thales los catetos contiguos y opuestos a α, tendríamos:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Y enunciar que: *"en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de la proyección de los catetos sobre ella"*, que es el Teorema de la altura.

Y de igual modo, para los triángulos ABC, AEB y AEC, la relación de las hipotenusas con los catetos opuestos a α o a β, quedaría:

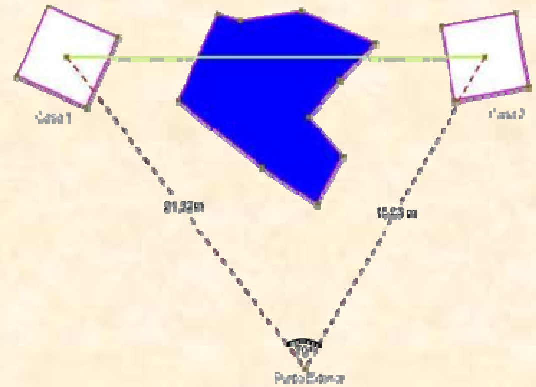
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a \cdot n \qquad \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \rightarrow b^2 = a \cdot m$$

Y enunciar que: *"en un triángulo rectángulo, el cuadrado de cada cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de ese cateto sobre la misma"*, que es el Teorema del cateto.

11. SESIÓN 7: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Se propone la resolución del siguiente problema:

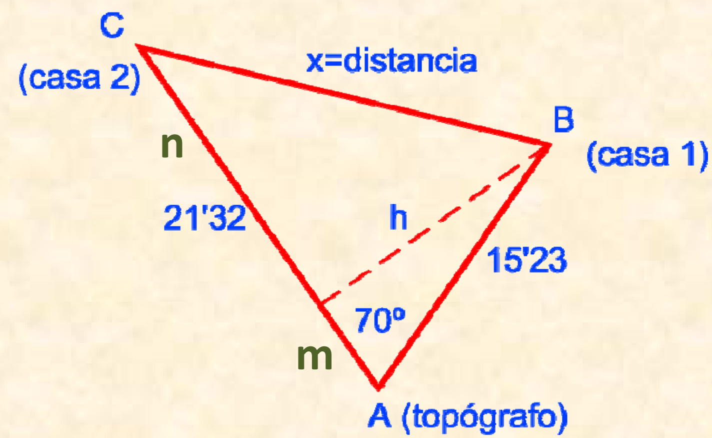
Dos casas están separadas por un lago, por lo que no es posible determinar directamente la distancia que hay entre ellas. Un topógrafo toma las distancias desde un mismo punto externo a cada casa y el ángulo que forman éstas, tal y como indica la figura.



Se abre el debate y proposición de ideas entre alumnos para idear estrategias de resolución.

Pueden existir diferentes estrategias para abordar el problema, pero quizás la más sencilla sea la que queda determinada por la siguiente modelización:

$$sen70^{o} = \frac{h}{15'23} \xrightarrow{\cos 70^{o}} m \xrightarrow{n=21.32-m} n \xrightarrow{PITÁGORAS} x$$

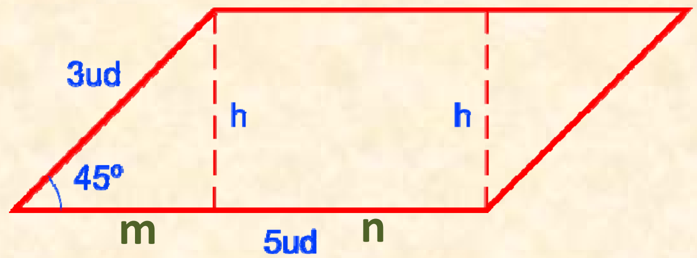


Partiendo de la estrategia de la altura, se aprovecha para demostrar los **teoremas del seno y el coseno**. (Se desarrolla posteriormente como un concepto).

11. SESIÓN 8: APLICACIONES A FIGURAS PLANAS

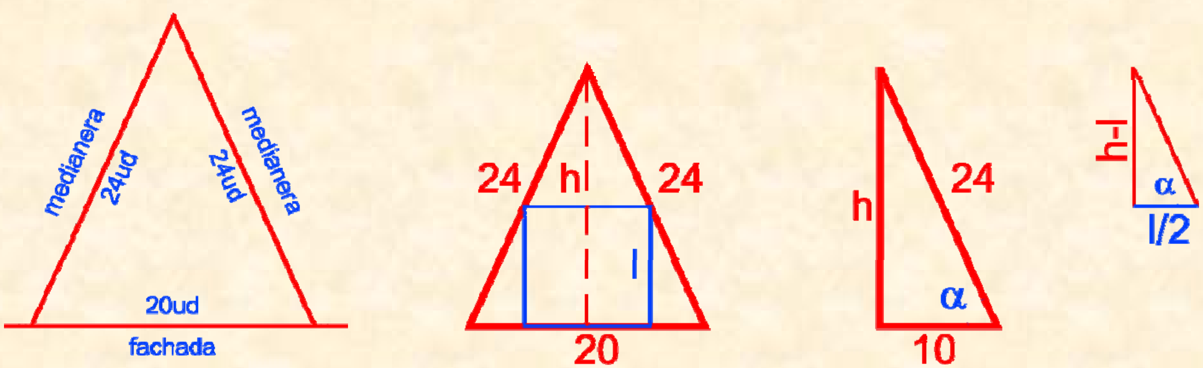
Se propone resolver algunos ejercicios con otras figuras planas, requiriendo de la descomposición en figuras más simples. Un ejemplo sencillo:

Un paralelogramo tiene un lado de 5ud y otro de 3ud, formando ambos un ángulo de 45º. Calcula su área.



$$\cos 45^{o} = \frac{m}{3} \xrightarrow{tag\,45^{o}} h \xrightarrow{n=5-m} n \rightarrow A = m \times h + n \times h$$

Problema: Un arquitecto pretende construir una casa de planta cuadrada en un extraño solar triangular de fachada 20 m y medianeras con otras viviendas de 24 m. ¿Cuál es la máxima superficie que puede inscribir en el solar si la casa debe quedar “alineada a vial”?



$$\cos\alpha = \frac{10}{24} \rightarrow \alpha$$

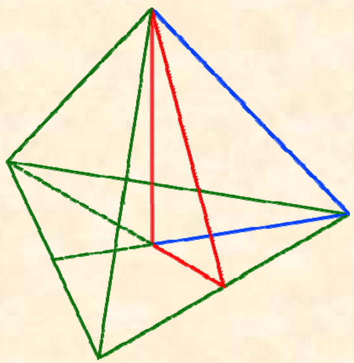
$$tag\,\alpha = \frac{h}{10} \rightarrow h$$

$$tag\,\alpha = \frac{h-l}{l/2} \rightarrow l$$

12. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Atendiendo a lo expuesto fundamentalmente en el art. 4 de la LOE y el capítulo V (art. 18 y ss.) del decreto andaluz 231-2007, relacionamos algunas de las medidas que en atención a la diversidad del alumnado podrían establecerse en lo referente a esta unidad didáctica en concreto:

- Fomentar el **trabajo en grupos con miembros de diferentes capacidades**.
- Para el **alumnado con dificultades** en la unidad, entendemos podrían **eliminarse** de la unidad didáctica los **contenidos relacionados con la resolución de triángulos oblicuángulos**, y relaciones métricas más complejas como los Teoremas de seno y coseno, que al inicio de la unidad ya se consideraron como objetivos máximos de aprendizaje.
- En el caso de alumnado con **dificultades en el idioma español**, existe sobre esta unidad gran cantidad de **material en la red en inglés**. Entendemos que los contenidos de la misma son asimilables a través de presentaciones no verbales, por lo que no existirá mayor problema.
- Para alumnos con **discapacidades sensoriales** se tomarán las medidas necesarias, en coordinación con el **equipo de coordinación pedagógica**.
- El **alumnado que quiera avanzar** en sus competencias, podrá realizar ejercicios en los que el trabajo en el plano desarrollado hasta ahora, dé un salto hacia el **cálculo de distancias o volúmenes en el espacio**, utilizando para ello las razones trigonométricas. Ejemplo: Calcular el volumen del tetraedro regular conocida su arista.



13. TRANSVERSALIDAD

La relación de la presente unidad didáctica sobre trigonometría con otras materias de las que se imparten en la Educación Secundaria, y más concretamente en el 4º curso, es evidente. Ponemos algunos ejemplos de actividades que se pueden realizar en coordinación con los profesores y departamentos de otras asignaturas:

1. **Educación plástica y visual**: estudio de las relaciones y formas geométricas estudiadas en la presente unidad y su presencia tanto en arquitectura como en otras manifestaciones artísticas, como la pintura, en búsqueda de las composiciones que se entendían respondían según cada movimiento artístico a los cánones de belleza.

2. **Ciencias sociales, geografía e historia**: la relación con la topografía y geología se ha vislumbrado ya como evidente a lo largo del desarrollo de la unidad. Se propone también las investigación en las circunstancias del nacimiento de la geometría en el mundo egipcio, el porqué del sistema sexagesimal en época babilónica,…

3. **Lengua castellana y literatura**: la lectura de libros es siempre una actividad recomendable, tanto por lo que supone de formación intelectual como por el conocimiento de la síntesis, la ortografía y la gramática de la lengua.

14. EVALUACIÓN

Del alumnado:

- **Actitud positiva** hacia la asignatura, **participación** en clase, **trabajo en equipo**, etc. ➔ **20%**

- Hábitos de **trabajo**, **cuaderno** de clase donde aparecen los avances, **realización de las tareas** propuestas para casa, ejercicios realizados en la pizarra, etc. ➔ **20%**

- **Prueba final escrita** donde realizarán ejercicios y problemas similares a los trabajados en clase.➔ **60%**

Prueba tipo

14. EVALUACIÓN

Para la propia reflexión…:

El profesor elaborará un informe, a partir de sus propias anotaciones de clase, sobre el funcionamiento de la Unidad Didáctica en el aula, respondiendo a las siguientes cuestiones:

Los **recursos utilizados** (materiales, fuentes de información, etc.):

¿Han sido de **utilidad**?
¿**Faltaría o sobraría** alguno?

Las **actividades** propuestas:

¿Han promovido el **interés** en el alumnado?
¿Tenían el **grado de dificultad correcto**?
¿La **secuenciación** ha sido la **adecuada**?

14. EVALUACIÓN

Atención a la diversidad:

¿Se ha adaptado correctamente el diseño de la unidad a las diferencias individuales?

Metodología:

¿Se ha facilitado o no un clima de contraste de opiniones, garantizando la participación de todos?
¿Ha resultado positiva la organización en grupos para ciertas actividades?
¿Han servido las situaciones nuevas, que se han dado en el aula, para mejorar y enriquecer las ideas sobre los contenidos?

Objetivos:

¿Se han cumplido los objetivos?
¿Con que conceptos los alumnos han encontrado más dificultades?

15. BIBLIOGRAFÍA

Normativa:

Ley Orgánica 2/2006 de Educación.

- Decreto de Enseñanzas Mínimas de la E.S.O. (R.D. 1631/2006 del 29 de diciembre).
- Orden 10-08-2007 por el que se desarrolla el currículo de la E.S.O. en Andalucía.
- Decreto 231/2007 por el que se establece la Ordenación y las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía.

Libros de Texto:

- MATEMÁTICAS 4º B E.S.O. Editorial ANAYA.
- MATEMÁTICAS 4º B E.S.O. Proyecto Algaida. Editorial BRUÑO.

Web:

- http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html
- http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/
- http://divulgamat2.ehu.es (Real Sociedad Matemática Española).
- (…).

GRACIAS

Node (Mayo 2009): Revista La Kodorniz