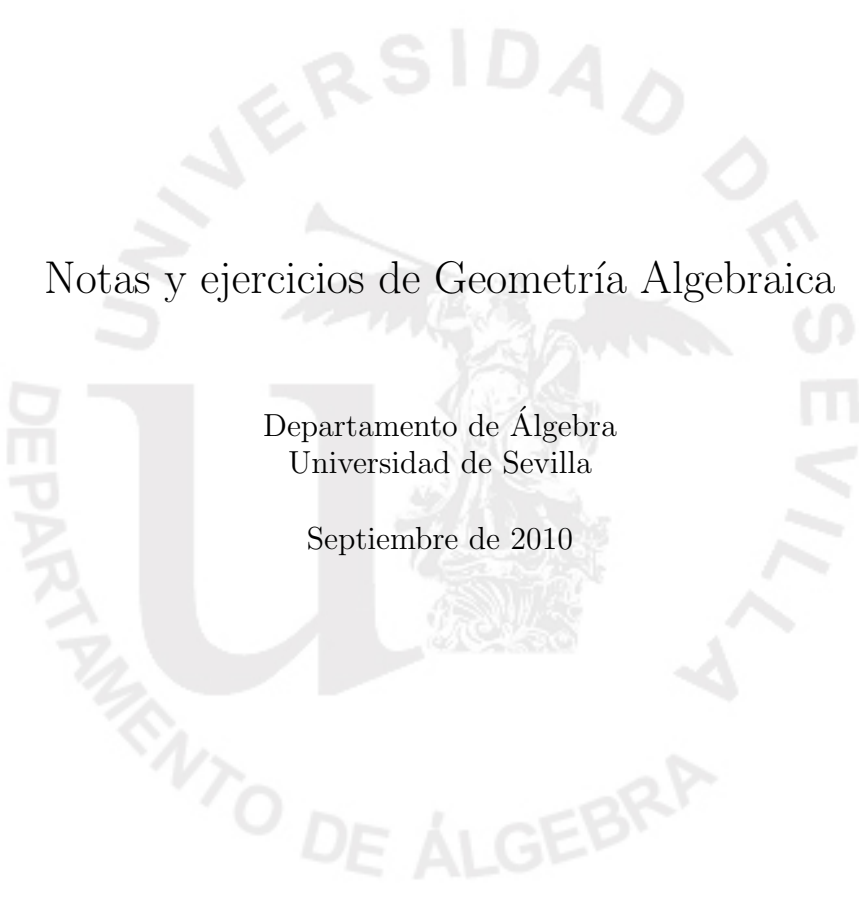




Notas y ejercicios de Geometría Algebraica

Departamento de Álgebra
Universidad de Sevilla

Septiembre de 2010

©2010 Antonio Rojas León

Este trabajo está publicado bajo licencia Creative Commons 3.0 España
(Reconocimiento - No Comercial - Compartir bajo la misma licencia)
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

Usted es libre de:

- copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento:** Debe reconocer los créditos de la obra maestra especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial:** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Compartir bajo la misma licencia:** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Tema 1

El espacio afín. Conjuntos algebraicos

1.1. Conjuntos algebraicos en el espacio afín

El principal objeto de estudio de la Geometría Algebraica son las llamadas variedades algebraicas. Así como, por ejemplo, las variedades diferenciales se construyen “pegando” objetos difeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$, las variedades algebraicas las construiremos pegando objetos isomorfos a subconjuntos algebraicos del espacio afín. De modo que el primer paso será definir éstos.

Definición 1.1. Sea k un cuerpo. El **espacio afín de dimensión n sobre k** , denotado $\mathbb{A}_k^n$, es el conjunto k^n de n -uplas de elementos de k .

Un polinomio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ define un subconjunto de $\mathbb{A}_k^n$, el conjunto de sus ceros: todas las n -uplas $(x_1, \dots, x_n)$ tales que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Más generalmente, para cada subconjunto $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ tenemos el conjunto de sus ceros $\mathcal{V}(S) \subseteq \mathbb{A}_k^n$, formado por todas las n -uplas $(x_1, \dots, x_n)$ tales que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ para *todo* $f \in S$. Éstos serán precisamente nuestros objetos de estudio.

Definición 1.2. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ se dice **algebraico** si existe un $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $X = \mathcal{V}(S)$.

Ejemplos 1.3.

1. El conjunto vacío y el espacio total $\mathbb{A}_k^n$ son conjuntos algebraicos, ya que $\emptyset = \mathcal{V}(\{1\})$ y $\mathbb{A}_k^n = \mathcal{V}(\{0\})$.
2. Cualquier subconjunto finito $X = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{A}_k^1$ es algebraico, ya que $X = \mathcal{V}(\{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r)\})$.
3. La diagonal $\Delta \subset \mathbb{A}_k^n$ formada por las n -uplas de la forma $(x, x, \dots, x)$ es algebraico: $\Delta = \mathcal{V}(\{x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots, x_1 - x_n\})$. Más generalmente, toda variedad lineal en $\mathbb{A}_k^n$ es un conjunto algebraico.

Ejercicio 1.1. Describir todos los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^1$.

Proposición 1.4. *La intersección arbitraria de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^n$ es un conjunto algebraico.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^n$, con $X_i = \mathcal{V}(S_i)$. Veamos que $\bigcap_{i \in I} X_i = \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} S_i)$. En efecto, un punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n$ está en $\bigcap_{i \in I} X_i$ si y sólo si está en X_i para todo $i \in I$, si y sólo si $f(x) = 0$ para todo $f \in S_i$ y para todo $i \in I$, es decir, para todo $f \in \bigcup_{i \in I} S_i$. $\square$

Por el contrario, la unión de conjuntos algebraicos no es necesariamente algebraico, como muestran el ejemplo 1.3 (2) y el ejercicio 1.1. Sin embargo:

Proposición 1.5. *La unión finita de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^n$ es un conjunto algebraico.*

Demostración. Obviamente basta probarlo para la unión de dos. Sean $X_1 = \mathcal{V}(S_1)$ y $X_2 = \mathcal{V}(S_2)$ dos subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^n$. Veamos que $X_1 \cup X_2 = \mathcal{V}(S_1 S_2)$, donde $S_1 S_2 := \{fg | f \in S_1, g \in S_2\}$.

Si $x \in X_1 = \mathcal{V}(S_1)$, $f(x) = 0$ para todo $f \in S_1$, luego $f(x)g(x) = 0$ para todos $f \in S_1, g \in S_2$. Por tanto, $x \in \mathcal{V}(S_1 S_2)$. Así que $X_1 \subseteq \mathcal{V}(S_1 S_2)$, y de la misma forma se prueba que $X_2 \subseteq \mathcal{V}(S_1 S_2)$.

Recíprocamente, sea $x \in \mathcal{V}(S_1 S_2)$. Si $x \in X_1 \subseteq X_1 \cup X_2$, no hay nada que probar. De lo contrario, debe existir un $f_0 \in S_1$ tal que $f_0(x) \neq 0$. Como $f_0(x)g(x) = 0$ para todo $g \in S_2$, deducimos que $g(x) = 0$ para todo $g \in S_2$, es decir, $x \in \mathcal{V}(S_2) = X_2$. $\square$

El ejemplo 1.3 y las proposiciones 1.4 y 1.5 implican que los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^n$ son los cerrados de una cierta topología.

Definición 1.6. *Se llama **topología de Zariski** sobre $\mathbb{A}_k^n$ a la topología cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos.*

Hay que tener cuidado de no dejarse llevar por la intuición cuando trabajamos con la topología de Zariski, pues sus propiedades (si $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$) son muy diferentes a las de la topología euclídea, a la que estamos acostumbrados. Por ejemplo:

Ejercicio 1.2. *Probar que en $\mathbb{A}_k^1$ con la topología de Zariski, dos abiertos no vacíos tienen intersección no vacía (todo abierto es denso). En particular, $\mathbb{A}_k^1$ no es un espacio de Hausdorff.*

Por restricción se define la topología de Zariski en un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ cualquiera: los subconjuntos cerrados son los conjuntos algebraicos contenidos en X .

1.2. Conjuntos algebraicos e ideales

Consideremos ahora la siguiente cuestión: ¿Es posible recuperar el conjunto S conociendo $\mathcal{V}(S)$? Tal y como está planteada la pregunta, es fácil ver que no: por ejemplo, en $\mathbb{A}_k^1$ $\{0\} = \mathcal{V}(\{x\}) = \mathcal{V}(\{x^2\}) = \mathcal{V}(\{x, x(x-1)\}) = \dots$. En general, si a S le añadimos cualquier múltiplo de un elemento de S , o la suma de dos elementos cualesquiera de S , el conjunto algebraico asociado no varía. Más concretamente:

Proposición 1.7. Sea $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ e $I = \langle S \rangle$ el ideal generado por S . Entonces $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(S)$.

Demostración. Es fácil ver que $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(S)$ (ejercicio 1.12). Recíprocamente, sea $x \in \mathcal{V}(S)$. Veamos que $f(x) = 0$ para todo $f \in I$. Todo $f \in I$ puede escribirse como $f = \sum_{i=1}^r f_i g_i$ con $g_i \in S$ y $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$. Como $g(x) = 0$ para todo $g \in S$, concluimos que $f(x) = \sum_{i=1}^r f_i(x)g_i(x) = 0$. $\square$

Como el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$ es noetheriano, todo ideal está generado por un número finito de elementos. Por tanto, del resultado anterior se deduce:

Corolario 1.8. Todo conjunto algebraico en $\mathbb{A}_k^n$ se puede escribir como $\mathcal{V}(S)$ para un subconjunto finito $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$.

Ya que es imposible recuperar el conjunto S a partir de $\mathcal{V}(S)$, rebajemos un poco nuestras expectativas: ¿será posible recuperar el ideal $\langle S \rangle$ a partir de $\mathcal{V}(S)$? Veamos que en este caso la respuesta también es negativa, incluso en el caso $n = 1$: en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, el conjunto vacío se puede escribir como $\mathcal{V}(\{1\})$, o también como $\mathcal{V}(\{x^2 + 1\})$. De hecho, para cualquier polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ sin raíces reales, $\mathcal{V}(\{f\}) = \emptyset$. El hecho de que haya polinomios sin raíces reales es una obstrucción muy importante a la hora de estudiar variedades algebraicas. Para salvar esta obstrucción, es necesario extender el concepto de variedad algebraica de manera considerable. Por el momento, obviaremos este problema suponiendo a partir de ahora que nuestro cuerpo k es algebraicamente cerrado (por ejemplo, $k = \mathbb{C}$).

Aún así, todavía no es posible recuperar $\langle S \rangle$ a partir de $\mathcal{V}(S)$: Por ejemplo, en $\mathbb{A}_k^1$, $\{0\} = \mathcal{V}(\{x\}) = \mathcal{V}(\{x^2\})$, pero $\langle x \rangle \neq \langle x^2 \rangle$. Sin embargo, estamos un poco más cerca: aunque los ideales no son iguales, sus *radicales* sí lo son. Así que modificamos una vez más la pregunta: ¿Es posible recuperar el *radical* de $\langle S \rangle$ a partir de $\mathcal{V}(S)$? Veamos que ahora la respuesta es afirmativa.

Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un subconjunto arbitrario. Definimos $\mathcal{I}(X)$ como el conjunto de $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 1.3. Probar que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal radical de $k[x_1, \dots, x_n]$.

Ejercicio 1.4. Sea $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Probar que $\sqrt{\langle S \rangle} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(S))$

El recíproco viene dado por el Nullstellensatz:

Teorema 1.9. (Nullstellensatz) Sea $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

En particular, si I es un ideal radical, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$. La consecuencia más importante del teorema es la siguiente:

Corolario 1.10. Las aplicaciones $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ y $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ definen una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ideales radicales de $k[x_1, \dots, x_n]$ y el conjunto de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^n$, que invierte las contenciones.

Antes de dar la prueba del teorema veamos el siguiente lema, que tiene importancia por sí mismo:

Lema 1.11. Si $I \subsetneq k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal propio, $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.

Demostración. Como $I \neq k[x_1, \dots, x_n]$, está contenido en un ideal maximal $\mathfrak{m}$. El cociente $K = k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de k por [AC, Tema 4, Corolario 11] o [AM, Corolario 5.24]. Como k es algebraicamente cerrado, deducimos que $k = K$. Por otro lado, todo polinomio $f \in \mathfrak{m}$ (en particular todo $f \in I$) se anula en el punto $P = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{A}_K^n$. Así que $P \in \mathcal{V}(I)$ y por tanto $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$. $\square$

Prueba del teorema. Sea $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$, veamos que $f^m \in I$ para algún $m \geq 1$. Introduzcamos una nueva variable y , y consideremos el polinomio $g(x_1, \dots, x_n, y) = 1 - yf(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n, y]$. Sea $J = I \cdot k[x_1, \dots, x_n, y] + \langle g \rangle$. Para todo $(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathcal{V}(J)$ se tiene que $h(x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo $h \in I$ (es decir, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}(I)$). En particular, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, y entonces $g(x_1, \dots, x_n, y) = 1 \neq 0$. Por tanto $\mathcal{V}(J) = \emptyset$, así que por el lema debe ser $J = k[x_1, \dots, x_n, y]$. En particular, existen $g_i \in k[x_1, \dots, x_n, y]$ ($i = 0, \dots, r$) y $h_i \in I$ ($i = 1, \dots, r$) tales que $g_0(1 - yf) + g_1h_1 + \dots + g_rh_r = 1$. Sustituyendo y por $1/f$ y quitando denominadores obtenemos una expresión $f^m = \hat{g}_1h_1 + \dots + \hat{g}_rh_r$ para algún $m \geq 1$ con $\hat{g}_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, y por tanto $f^m \in I$. $\square$

1.3. Funciones regulares. El anillo de coordenadas de un conjunto algebraico

Definición 1.12. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Una aplicación $f : X \rightarrow k$ se llama **función regular** si es la restricción a X de una función $\bar{f} : \mathbb{A}_k^n \rightarrow k$ dada por un polinomio $\bar{f} \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Con las operaciones habituales, el conjunto de funciones regulares $f : X \rightarrow k$ es un anillo, que llamaremos **anillo de coordenadas** de X y denotaremos $\mathcal{A}(X)$. Veamos cómo describir $\mathcal{A}(X)$ en función de $\mathcal{I}(X)$:

Proposición 1.13. El anillo $\mathcal{A}(X)$ es isomorfo al cociente $k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$.

Demostración. Por definición, existe una aplicación sobreyectiva $\pi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{A}(X)$ dada por la restricción a X . Un polinomio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ está en el núcleo si y sólo si la función que define en X es 0, es decir, si y sólo si $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Ésta es justamente la definición de $\mathcal{I}(X)$, y por tanto $\ker \pi \cong \mathcal{I}(X)$. El primer teorema de isomorfía nos da el isomorfismo buscado. $\square$

En particular, $\mathcal{A}(X)$ es una k -álgebra finitamente generada. Además, como $\mathcal{I}(X)$ es un ideal radical, $\mathcal{A}(X)$ es *reducida* (es decir, no tiene elementos nilpotentes).

Ejercicio 1.5. Recíprocamente, probar que toda k -álgebra finitamente generada y reducida es isomorfa al anillo de coordenadas de algún conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ para algún n .

De hecho, el conjunto de puntos de X se puede recuperar a partir de $\mathcal{A}(X)$ como el conjunto de sus ideales maximales. Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Como $\{(a_1, \dots, a_n)\} = \mathcal{V}(\{x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\})$, tenemos una contención $\mathcal{I}(X) \subseteq \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle =: \mathfrak{m}_a$, que es maximal, y por tanto $\mathfrak{m}_a$ define un ideal maximal $\bar{\mathfrak{m}}_a := \mathfrak{m}_a/\mathcal{I}(X)$ de $\mathcal{A}(X) = k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$.

Ejercicio 1.6. Probar que $\mathfrak{m}_a$ es un ideal maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$.

Proposición 1.14. La aplicación $a \mapsto \bar{\mathfrak{m}}_a$ define una correspondencia biunívoca entre los puntos de X y los ideales maximales de $\mathcal{A}(X)$.

Demostración. Como $J \mapsto J/\mathcal{I}(X)$ es una correspondencia biunívoca entre los ideales de $k[x_1, \dots, x_n]$ que contienen a $\mathcal{I}(X)$ y los ideales de $\mathcal{A}(X) = k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$ que preserva la maximalidad, basta probar que $a \mapsto \mathfrak{m}_a$ es una correspondencia biunívoca entre los puntos de X y los ideales maximales de $k[x_1, \dots, x_n]$ que contienen a $\mathcal{I}(X)$. La aplicación es claramente inyectiva, ya que podemos recuperar a a partir de $\mathfrak{m}_a$: $\{a\} = \mathcal{V}(\mathfrak{m}_a)$. Falta probar que es sobreyectiva.

Sea $\mathfrak{m} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal maximal que contenga a $\mathcal{I}(X)$ (en particular, es primo y por tanto radical). Como $\mathfrak{m} \neq k[x_1, \dots, x_n]$ e $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$ (por el Nullstellensatz), $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$. Sea $a \in \mathcal{V}(\mathfrak{m}) \subseteq X$. La inclusión $\{a\} = \mathcal{V}(\mathfrak{m}_a) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{m})$ implica que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_a$. Como $\mathfrak{m}$ es maximal, deducimos que $\mathfrak{m}$ debe ser igual a $\mathfrak{m}_a$. Por tanto, todo ideal maximal proviene de algún punto de X . $\square$

1.4. Variedades algebraicas afines

En general, un conjunto algebraico se puede descomponer como unión finita de otros subconjuntos algebraicos más pequeños. Por ejemplo, en $\mathbb{A}_k^3$, el conjunto $\mathcal{V}(xz, yz)$ se descompone como unión del plano $z = 0$ y la recta $x = y = 0$. En $\mathbb{A}_k^1$, $\mathcal{V}(\{x^2 - 1\}) = \{1\} \cup \{-1\}$.

Definición 1.15. Un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ se dice **reducible** si existen dos subconjuntos algebraicos propios $Y \subsetneq X$ y $Z \subsetneq X$ tales que $X = Y \cup Z$. De lo contrario, X se dice **irreducible**.

La reducibilidad de X puede leerse en su anillo de coordenadas:

Proposición 1.16. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ algebraico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es irreducible y no vacío
2. $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo
3. $\mathcal{A}(X)$ es un dominio de integridad

Demostración. La equivalencia $(2) \iff (3)$ es un ejercicio fácil de Álgebra Conmutativa. Veamos que $(1) \implies (2)$. Sea X irreducible, y supongamos que $I := \mathcal{I}(X)$ no fuera primo. Entonces, o bien $I = \langle 1 \rangle$ (y entonces $X = \emptyset$) o bien existen $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $f, g \notin I$ y $fg \in I$. En particular, $(I + \langle f \rangle) \cdot (I + \langle g \rangle) \subseteq I$. Sean $Y = \mathcal{V}(I + \langle f \rangle)$ y $Z = \mathcal{V}(I + \langle g \rangle)$. Como $I \subseteq I + \langle f \rangle$ e $I \subseteq I + \langle g \rangle$ tenemos que $Y \subseteq X$ y $Z \subseteq X$. Por otro lado, $Y \cup Z = \mathcal{V}((I + \langle f \rangle) \cdot (I + \langle g \rangle)) \supseteq \mathcal{V}(I) = X$, y por tanto $X = Y \cup Z$. Finalmente, $Y \neq X$, ya que $f \in \mathcal{I}(Y)$ pero $f \notin \mathcal{I}(X)$. De la misma forma se prueba que $Z \subsetneq X$, y esto contradice el hecho de que X sea irreducible.

Veamos ahora que $(2) \implies (1)$. Sea $I = \mathcal{I}(X)$ primo. En particular no es el total, y por tanto $X \neq \emptyset$. Supongamos que X fuera reducible: existen $Y \subsetneq X$ y $Z \subsetneq X$ tales que $X = Y \cup Z$. Entonces, $I \subsetneq \mathcal{I}(Y)$ e $I \subsetneq \mathcal{I}(Z)$. Elijamos $f \in \mathcal{I}(Y) \setminus I$

y $g \in \mathcal{I}(Z) \setminus I$. Para todo $x \in Y$, $f(x) = 0$; y para todo $x \in Z$, $g(x) = 0$. Por tanto, para todo $x \in X = Y \cup Z$ $f(x)g(x) = 0$, así que $fg \in \mathcal{I}(X) = I$. Pero esto contradice el hecho de que I sea primo. $\square$

Definición 1.17. Una variedad algebraica afín en $\mathbb{A}_k^n$ es un subconjunto algebraico $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ irreducible.

Corolario 1.18. Las aplicaciones $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ y $Z \mapsto \mathcal{I}(Z)$ definen una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ideales primos de $k[x_1, \dots, x_n]$ y el conjunto de variedades algebraicas afines no vacías en $\mathbb{A}_k^n$, que invierte las contenciones.

Ejercicio 1.7. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad, y $X, Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ conjuntos algebraicos. Si $Z \subseteq X \cup Y$, probar que $Z \subseteq X$ o $Z \subseteq Y$.

Proposición 1.19. Todo conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ puede descomponerse como una unión finita $X = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ de variedades. Si la descomposición es minimal (es decir, si ningún Z_i puede eliminarse de ella sin que la unión deje de ser X), las variedades Z_i están unívocamente determinadas.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que X no tiene tal descomposición. En particular, X no es irreducible. Por tanto, podemos escribir $X = X_1^1 \cup X_2^1$, con $X_i^1 \subsetneq X$. Como X no se puede expresar como unión de variedades, lo mismo debe ser cierto para alguno de los X_i^1 , pongamos para X_1^1 . En particular, no es irreducible, y se puede expresar como $X_1^2 \cup X_2^2$, con $X_i^2 \subsetneq X_1^1$. Al menos uno de los X_i^2 no se puede expresar como unión de irreducibles (pongamos X_1^2), así que $X_1^2 = X_1^3 \cup X_2^3$ con $X_i^3 \subsetneq X_1^2$. De esta forma construimos una sucesión estrictamente decreciente $X \supsetneq X_1^1 \supsetneq X_1^2 \supsetneq \dots$ de conjuntos algebraicos. Tomando los correspondientes ideales, tenemos una sucesión estrictamente creciente $\mathcal{I}(X) \subsetneq \mathcal{I}(X_1^1) \subsetneq \mathcal{I}(X_1^2) \subsetneq \dots$ de ideales en $k[x_1, \dots, x_n]$, lo cual es imposible por ser un anillo noetheriano.

Supongamos ahora que la descomposición $X = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ es minimal, y sea $X = W_1 \cup \dots \cup W_s$ otra descomposición minimal. Para todo $i = 1, \dots, r$, $Z_i \subseteq X = W_1 \cup \dots \cup W_s$ y por tanto (ejercicio 1.7) $Z_i \subseteq W_j$ para algún $j = 1, \dots, s$. De la misma forma, $W_j \subseteq Z_l$ para algún $l = 1, \dots, r$. Entonces $Z_i \subseteq W_j \subseteq Z_l$. Como la descomposición es minimal, debe ser $i = l$ (de lo contrario podríamos eliminar Z_i de la descomposición y la unión seguiría siendo X). De modo que $Z_i = W_j$. Toda variedad que aparezca en la primera descomposición debe aparecer en la segunda, y viceversa. $\square$

Definición 1.20. Si $X = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ es una descomposición minimal de X como unión de variedades, las variedades Z_i se llaman las **componentes irreducibles** de X .

1.5. Dimensión de un conjunto algebraico

El concepto de dimensión es algo que tenemos claro intuitivamente, pero definirlo matemáticamente es casi siempre una cuestión delicada. En principio, parece claro que la dimensión de una variedad debe ser uno más que el máximo de las dimensiones de las variedades estrictamente contenidas en ella. Esto nos da una definición recursiva de la dimensión, que podemos expresar también de la siguiente forma:

Definición 1.21. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. La **dimensión** de X es el mayor entero r tal que existe una cadena estrictamente creciente $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subseteq X$ de variedades algebraicas afines en X .

Prácticamente de la propia definición se deduce:

Proposición 1.22. La dimensión de $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es igual a la dimensión de Krull de su anillo de coordenadas $\mathcal{A}(X)$.

Demostración. Las cadenas estrictamente crecientes $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subseteq X$ de variedades contenidas en X se corresponden biunívocamente con las cadenas estrictamente decrecientes $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_r \supseteq \mathcal{I}(X)$ de ideales primos en $k[x_1, \dots, x_n]$ que contienen a $\mathcal{I}(X)$ mediante la aplicación $Z \mapsto \mathcal{I}(Z)$, y éstas se corresponden biunívocamente con las cadenas estrictamente decrecientes $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_r$ de ideales primos en $\mathcal{A}(X)$. La dimensión de Krull de $\mathcal{A}(X)$ es por definición la máxima longitud de una tal cadena. $\square$

Corolario 1.23. La dimensión de $\mathbb{A}_k^n$ es n .

Definición 1.24. Una variedad de dimensión 1 (respectivamente 2, $n-1$) en $\mathbb{A}_k^n$ se denomina una **curva** (resp. **superficie**, **hipersuperficie**) afín.

Definición 1.25. Un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ se dice **equidimensional** si todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión.

Las hipersuperficies afines son fáciles de clasificar:

Proposición 1.26. Un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es equidimensional de dimensión $n-1$ si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ es un ideal principal (distinto de 0 y el total). En particular, X es una hipersuperficie si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ está generado por un polinomio irreducible.

Demostración. Basta probar la segunda afirmación, puesto que todo ideal principal (distinto de 0 y el total) es producto de ideales principales generados por un polinomio irreducible. Supongamos que X es una hipersuperficie, entonces $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo tal que $k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$ tiene dimensión $n-1$. Por [AC, 4, Corolario 6], para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que $\text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p} = n$. Por tanto $\mathcal{I}(X)$ tiene altura 1. Por [H, Proposition 1.12A] todo ideal primo de altura 1 en $k[x_1, \dots, x_n]$ es principal. Como es primo, el generador del ideal debe ser irreducible.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{I}(X)$ está generado por un polinomio irreducible. Entonces $\mathcal{I}(X)$ es primo, y por tanto X es una variedad. Por el teorema de los ideales principales de Krull ([AC, 3, Teorema 1]) $\mathcal{I}(X)$ tiene altura 1, y por tanto por [AC, 4, Corolario 6] la dimensión de $\mathcal{A}(X)$ (que es la de X) es $n-1$. $\square$

La proposición anterior no es cierta para conjuntos algebraicos arbitrarios: en general, hacen falta más de r polinomios para generar el ideal de una variedad afín de dimensión $n-r$. Si X tiene dimensión $n-r$ e $\mathcal{I}(X)$ está generado por r polinomios, se dice que X es **intersección completa**.

Ejercicio 1.8. Si $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal generado por r elementos, probar que la dimensión de cada componente irreducible de $\mathcal{V}(I)$ es $\geq n-r$. (Ayuda: Usar [AC, 3, proposición 3].)

1.6. Funciones racionales

Además de las funciones regulares, en Geometría Algebraica juegan un papel fundamental las llamadas funciones racionales. Éstas son funciones que sólo están definidas en un abierto de una variedad, no en la variedad completa. Gracias a que los abiertos de Zariski son grandes, podemos operar con funciones racionales como si se tratara de funciones regulares.

Definición 1.27. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín. Una **función racional** $f : Z \dashrightarrow k$ es un par (U, f) donde $U \subseteq Z$ es un abierto de Zariski no vacío y $f : U \rightarrow k$ es una aplicación tal que existen $g, h \in \mathcal{A}(Z)$ con $h(x) \neq 0$ y $f(x) = g(x)/h(x)$ para todo $x \in U$, módulo la siguiente relación de equivalencia: $(U, f) \sim (U', f')$ si $f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$.

Ejercicio 1.9. Probar que $\sim$ es, en efecto, una relación de equivalencia.

Si no se especifica el abierto U , se sobreentiende que es el mayor abierto donde la expresión dada para f tenga sentido (es decir, el abierto en el que $h \neq 0$).

Queremos definir ahora la suma y el producto de dos funciones racionales. Aquí nos encontramos con un problema: las dos funciones que queremos sumar o multiplicar pueden tener diferentes dominios, y por tanto su suma o producto no está definido. Afortunadamente, las propiedades de la topología de Zariski nos dan la solución: como Z es irreducible, dos abiertos no vacíos tienen intersección no vacía (de lo contrario, sus complementarios serían una descomposición de Z como unión propia de dos variedades). Por tanto, dos funciones racionales cualesquiera pueden restringirse a un dominio común.

Sean entonces (U, f) y (V, g) dos funciones racionales en Z . Definimos su suma como la función racional $(U \cap V, f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V})$, y su producto como la función racional $(U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V})$.

Proposición 1.28. Con estas definiciones, el conjunto de funciones racionales en Z es un cuerpo $\mathcal{K}(Z)$, llamado **cuerpo de funciones** de Z .

Demostración. Probaremos únicamente la existencia de inversos, el resto de propiedades se deja como ejercicio. Sea $f : Z \dashrightarrow k$ una función racional no nula, veamos que existe una función racional g tal que $f \cdot g = 1$. Sea $U \subseteq Z$ un abierto tal que $v(x) \neq 0$ y $f(x) = u(x)/v(x)$ para todo $x \in U$, con $u, v \in k[x_1, \dots, x_n]$, y sea $V \subseteq U$ el abierto definido por $u(x) \neq 0$. Es claro que la función racional $g : Z \dashrightarrow k$ dada por $(V, v/u)$ es la inversa de f . $\square$

El cuerpo de funciones se puede calcular directamente conociendo el anillo de coordenadas:

Proposición 1.29. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín. El cuerpo de funciones $\mathcal{K}(Z)$ es el cuerpo de fracciones de $\mathcal{A}(Z)$.

Demostración. Existe un homomorfismo de anillos evidente $\phi : \mathcal{A}(Z) \rightarrow \mathcal{K}(Z)$, que lleva f en la función racional $(Z, f/1)$. Este homomorfismo es inyectivo: si $\phi(f) = 0$, debe existir un abierto no vacío $U \subseteq Z$ tal que $f|_U = 0$, y entonces $f = 0$ (ejercicio 1.27). Como $\mathcal{K}(Z)$ es un cuerpo, este homomorfismo tiene una extensión única $\phi : K(\mathcal{A}(Z)) \rightarrow \mathcal{K}(Z)$ al cuerpo de fracciones dada por $\phi(f/g) = \phi(f)/\phi(g)$, que automáticamente es inyectiva. Sólo hay que comprobar que es sobreyectiva, pero esto se deduce inmediatamente de la definición de $\mathcal{K}(Z)$. $\square$

1.7. El anillo local de una variedad en un punto

Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín y $f : Z \dashrightarrow k$ una función racional. Se dice que f **está definida en** $x \in Z$ si existen un abierto $V \subseteq Z$ conteniendo a x y $g, h \in \mathcal{A}(Z)$ tales que $h(y) \neq 0$ para todo $y \in V$ y $f = (V, g/h)$. Si f está definida en x , tiene sentido hablar del valor $f(x)$ de f en x : es simplemente el valor $g(x)/h(x)$ para cualquier expresión de f como cociente de funciones regulares en un entorno de x . Por la relación de equivalencia que define las funciones racionales, vemos que dos expresiones distintas de f como cociente de funciones regulares deben dar el mismo valor de $f(x)$.

Sin embargo, hay que tener cuidado de distinguir entre una función racional f y una expresión particular de f como cociente de polinomios (así como, por ejemplo, las expresiones $\sin x/(1 - \cos x)$ y $(1 + \cos x)/\sin x$ son distintas pero definen la “misma” función real). Una función racional puede estar definida en un punto sin que una expresión particular lo esté, como muestra el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1.10. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$ la variedad $\mathcal{V}(\{x_1x_4 - x_2x_3\})$. Probar que la función racional $f : Z \dashrightarrow \mathbb{C}$ dada por x_1/x_2 está definida en el punto $(0, 0, 1, 1)$ y hallar su valor en dicho punto.

Ejercicio 1.11. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad, $x \in Z$ y $f, g : Z \dashrightarrow k$ dos funciones racionales definidas en x . Probar que su suma y su producto también están definidas en x .

Por tanto, el conjunto $\mathcal{O}_{Z,x}$ de funciones racionales definidas en x es un subanillo de $\mathcal{K}(Z)$.

Definición 1.30. El anillo local de Z en x es el anillo $\mathcal{O}_{Z,x}$ de funciones racionales definidas en x .

El siguiente resultado justifica el nombre (o más bien, justifica el por qué a un anillo con un único ideal maximal se le llama local):

Proposición 1.31. Para todo $x \in Z$, $\mathcal{O}_{Z,x}$ es un anillo local.

Demostración. Sea $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}_{Z,x}$ el conjunto formado por las funciones f tales que $f(x) = 0$. Claramente $\mathfrak{m}$ es un ideal. Sea $f \notin \mathfrak{m}$, y tomemos una expresión $f = g/h$ de f como cociente de funciones regulares en un abierto U que contenga a x . Sea $V \subseteq U$ el abierto definido por $g \neq 0$. Como $f(x) \neq 0$, $x \in V$. Por tanto, la función racional $1/f = (V, h/g)$ está definida en x , es decir, f es invertible en $\mathcal{O}_{Z,x}$. Por [AM, proposición 1.6] concluimos que $\mathcal{O}_{Z,x}$ es local y $\mathfrak{m}$ es su único ideal maximal. $\square$

El anillo local $\mathcal{O}_{Z,x}$ también se puede obtener a partir de $\mathcal{A}(Z)$:

Proposición 1.32. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín, y $x \in Z$. El anillo $\mathcal{O}_{Z,x}$ es igual al localizado $\mathcal{A}(Z)_{\bar{\mathfrak{m}}_x}$, donde $\bar{\mathfrak{m}}_x \subseteq \mathcal{A}(Z)$ es el ideal maximal correspondiente a x según la proposición 1.14.

Demostración. Se deduce directamente de la definición, ya que las funciones racionales en $\mathcal{O}_{Z,x}$ son las que tienen una expresión de la forma g/h donde $h \in \mathcal{A}(Z)$ es una función regular con $h(x) \neq 0$, es decir, con $h \notin \bar{\mathfrak{m}}_x$. $\square$

Si $U \subseteq Z$ es un abierto, se dice que f **está definida en U** (o que es **regular en U**) si está definida en todo punto de U . El conjunto de puntos de Z donde f está definida es un abierto llamado **abierto de definición** de f .

Toda función racional f de Z definida en U define una (verdadera) aplicación $f : U \rightarrow k$. Del ejercicio 1.11 se deduce inmediatamente que la suma y el producto de funciones racionales definidas en U están también definidas en U . Por tanto, el conjunto de funciones racionales definidas en U forma un subanillo de $\mathcal{K}(Z)$, que denotaremos $\mathcal{O}_Z(U)$.

Proposición 1.33. *Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín y $f \in \mathcal{A}(Z)$ no nulo. Denotemos por U_f el abierto $Z \setminus \mathcal{V}(\{f\})$ formado por los $x \in Z$ tales que $f(x) \neq 0$. Entonces $\mathcal{O}_Z(U_f) \subseteq \mathcal{K}(Z)$ es igual a $\mathcal{A}(Z)_f$, el localizado de $\mathcal{A}(Z)$ con respecto al conjunto multiplicativo de las potencias de f .*

Demostración. La inclusión $\mathcal{A}(Z)_f \subseteq \mathcal{O}_Z(U_f)$ es evidente: una función racional h de la forma g/f^m está definida en U_f , y la expresión $h = g/f^m$ es válida en todo punto $x \in U_f$, ya que $f(x) \neq 0$. Recíprocamente, sea h una función racional definida en U_f . Hay que probar que h tiene una expresión de la forma g/f^m con $g \in \mathcal{A}(Z)$ y $m \geq 0$.

Para todo punto $x \in U_f$ existe un abierto $V_x \subseteq Z$ y funciones $u_x, v_x \in \mathcal{A}(Z)$ tales que $v_x(y) \neq 0$ para todo $y \in V_x$ y $h = u_x/v_x$ en V_x . Los abiertos $\{V_x | x \in U_f\}$ forman un recubrimiento de U_f . Como U_f es cuasi-compacto (ejercicio 1.18), existen un número finito de puntos $x_1, \dots, x_r \in U_f$ tales que los abiertos $V_i := V_{x_i}$ para $i = 1, \dots, r$ recubren U_f . Sean $u_i := u_{x_i}$, $v_i := v_{x_i}$. Todo punto $y \in U_f$ está en algún V_i , y en particular $v_i(y) \neq 0$. Por tanto $\mathcal{V}(\{v_1, \dots, v_r\}) \cap Z$ no contiene ningún punto de U_f o, dicho de otra forma, está contenido en $\mathcal{V}(\{f\}) \cap Z$.

En particular, $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(\{f\}) \cap Z) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(\{v_1, \dots, v_r\}) \cap Z) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(Z) + \langle v_1, \dots, v_r \rangle))$. El Nullstellensatz nos dice entonces que $f^m \in \mathcal{I}(Z) + \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ para algún $m \geq 1$. Sea, por ejemplo, $f^m = a + a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$ con $a_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ y $a \in \mathcal{I}(Z)$. Multiplicando por h y teniendo en cuenta que $h v_i = u_i$ en V_i y $a = 0$ en Z , obtenemos $f^m h = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$ en $V := V_1 \cap \dots \cap V_r$. Por tanto, $h = (V, a/f^m)$ donde $a = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$. $\square$

Corolario 1.34. $\mathcal{O}_Z(Z) = \mathcal{A}(Z)$, es decir, las únicas funciones racionales definidas en todo punto de Z son las funciones regulares.

Demostración. Tomar $f = 1$ en la proposición anterior. $\square$

1.8. Ejercicios adicionales

Ejercicio 1.12. Sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Probar que $\mathcal{V}(S_2) \subseteq \mathcal{V}(S_1)$. ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 1.13. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un subconjunto. Probar que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ es la clausura de X en la topología de Zariski.

Ejercicio 1.14. Si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ son conjuntos algebraicos, probar que $X \times Y \subseteq \mathbb{A}_k^{n+m}$ es algebraico.

Ejercicio 1.15. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico, y $f \in \mathcal{A}(X)$ una función regular que no se anule en ningún punto de X . Probar que $1/f : X \rightarrow k$ es también una función regular.

Ejercicio 1.16. Un elemento e de un anillo A se dice idempotente si $e^2 = e$. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Probar que X es conexo con respecto a la topología de Zariski si y sólo si $\mathcal{A}(X)$ no contiene elementos idempotentes distintos de 0 y 1.

Ejercicio 1.17. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Dado $f \in \mathcal{A}(X)$, se define $U_f = X \setminus \mathcal{V}(\{f\})$, es decir, el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) \neq 0$. Probar que los abiertos $\{U_f | f \in \mathcal{A}(X)\}$ forman una base para la topología de Zariski de X .

Ejercicio 1.18. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín, y $U \subseteq Z$ un abierto. Probar que U es cuasi-compacto, es decir, para todo recubrimiento abierto $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ existe un subrecubrimiento finito: $J \subseteq I$, $|J| < \infty$ y $U = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Ejercicio 1.19. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad, y $a \in Z$. Probar que el ideal maximal $\mathfrak{m}_a$ asociado a a (proposición 1.14) es el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{A}(Z)$ tales que $f(a) = 0$.

Ejercicio 1.20. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Probar que existe una correspondencia biyectiva entre las componentes irreducibles de X y los primos minimales de $\mathcal{I}(X)$ en $k[x_1, \dots, x_n]$.

Ejercicio 1.21. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ la curva definida por la ecuación $x^a = y^b$, donde a, b son enteros positivos. Probar que X es irreducible si y sólo si a y b son primos entre sí. (Ayuda: Probar que el homomorfismo $\mathbb{C}[x, y]/\langle x^a - y^b \rangle \rightarrow \mathbb{C}[t]$ dado por $x \mapsto t^b$, $y \mapsto t^a$ es inyectivo si a y b son primos entre sí.)

Ejercicio 1.22. Hallar las componentes irreducibles de los siguientes subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$:

1. $X = \mathcal{V}(\{xy, x^2z - xz\})$
2. $X = \mathcal{V}(\{z, xy - y^2, x^2 - y^2 - x + y\})$

Ejercicio 1.23. Hallar la dimensión de los conjuntos algebraicos del ejercicio anterior, así como de cada una de sus componentes irreducibles.

Ejercicio 1.24. Probar que la dimensión de un subconjunto algebraico $X \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

Ejercicio 1.25. Si $V \subseteq W \subseteq \mathbb{A}_k^n$ son dos variedades de la misma dimensión, probar que $V = W$.

Ejercicio 1.26. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ el conjunto algebraico definido por las ecuaciones $x^4 - y^3 = x^5 - y^3 = y^5 - z^4 = 0$. Probar que X es irreducible de dimensión 1, pero no puede definirse usando sólo dos de las ecuaciones dadas. (Ayuda: Usar la aplicación $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$.)

Ejercicio 1.27. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad, y $f, g : Z \rightarrow k$ dos funciones regulares. Si existe un abierto no vacío $U \subseteq Z$ tal que $f|_U = g|_U$, probar que $f = g$. ¿Es cierto si Z es un conjunto algebraico arbitrario?

Ejercicio 1.28. Hallar el abierto de definición de las siguientes funciones racionales:

1. $f(x) = x_1/x_2$ en $Z = \mathcal{V}(\{x_1x_4 - x_2x_3\}) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$

2. $f(x) = (x+1)/y$ en $Z = \mathcal{V}(\{x^2 + y^2 - 1\}) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$

Ejercicio 1.29. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín, y $f = g/h : Z \dashrightarrow k$ una función racional, con $g, h \in \mathcal{A}(Z)$. Si $x \in Z$ es un punto tal que $h(x) = 0$ y $g(x) \neq 0$, probar que f no está definida en x .

Ejercicio 1.30. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función racional definida en el abierto $U = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Probar que f está definida en todo $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, y por tanto es una función regular.

Ejercicio 1.31. Sean $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ dos variedades. Definimos $\mathcal{K}(X, Y)$ como el conjunto de funciones racionales $f \in \mathcal{K}(X)$ definidas en algún punto de Y . Probar que $\mathcal{K}(X, Y)$ es un anillo local con cuerpo residual $\mathcal{K}(Y)$.

Ejercicio 1.32. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín de dimensión d y $H \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una hipersuperficie. Probar que toda componente irreducible de $Z \cap H$ tiene dimensión $\geq d - 1$.

Tema 2

Morfismos entre variedades afines

2.1. Morfismos

Como es habitual en Matemáticas, una vez descritos los objetos con los que vamos a trabajar, el siguiente paso es definir cuáles son las aplicaciones “interesantes” entre dos objetos fijados.

Definición 2.1. Sean $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $Z \subseteq \mathbb{A}_k^m$ dos conjuntos algebraicos. Un **morfismo** entre Y y Z es una aplicación $\phi : Y \rightarrow Z$ tal que existen m funciones regulares $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{A}(Y)$ con $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ para todo $x \in Y$.

Los morfismos pueden definirse de manera más intrínseca:

Proposición 2.2. Una aplicación $\phi : Y \rightarrow Z$ es un morfismo si y sólo si para toda función regular $f : Z \rightarrow k$ la composición $f \circ \phi : Y \rightarrow k$ es una función regular.

Demostración. Sea $\phi : Y \rightarrow Z$ un morfismo, dado por $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Toda función regular $f : Z \rightarrow k$ viene dada por un polinomio $f \in k[x_1, \dots, x_m]$, y entonces $f \circ \phi$ viene dada por el polinomio $g(x) := f(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Recíprocamente, supongamos que $f \circ \phi$ es regular para toda función regular f . En particular, si $f(x) = x_i$ para un $i = 1, \dots, m$ fijo, $f \circ \phi$ (que es la i -ésima coordenada de ϕ) es regular, y por tanto viene dada por un polinomio $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$. Entoces $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. $\square$

De esta última caracterización se deduce que la composición de dos morfismos es un morfismo. Todo morfismo $\phi : Y \rightarrow Z$ define una aplicación $\phi^* : \mathcal{A}(Z) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ dada por $f \mapsto f \circ \phi$. Esta aplicación respeta la suma y el producto y preserva las constantes, y por tanto es un homomorfismo de k -álgebras. Además, si $\phi' : X \rightarrow Y$ es otro morfismo de conjuntos algebraicos, $(\phi \circ \phi')^* = \phi'^* \circ \phi^*$. Veamos que todo homomorfismo de k -álgebras $\mathcal{A}(Z) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ se obtiene de esta forma:

Proposición 2.3. Sean $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $Z \subseteq \mathbb{A}_k^m$ dos conjuntos algebraicos, y $\psi : \mathcal{A}(Z) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ un homomorfismo de k -álgebras. Existe un único morfismo $\phi : Y \rightarrow Z$ tal que $\psi = \phi^*$.

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea $f_i(x) = \psi(x_i) \in \mathcal{A}(Y)$. Si $\phi : Y \rightarrow Z$ es un morfismo tal que $\phi^* = \psi$, entonces la i -ésima coordenada de ϕ debe ser $x_i \circ \phi = \phi^*(x_i) = \psi(x_i) = f_i$, y por tanto $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Veamos que este ϕ cumple la condición buscada.

Por construcción tenemos que $\phi^*(x_i) = \psi(x_i)$ para todo i , y por tanto $\phi^* = \psi$, ya que los x_i generan la k -álgebra $\mathcal{A}(Z)$. Falta comprobar que la imagen de ϕ está en Z . Como $Z = \mathcal{V}(\mathcal{I}(Z))$, basta comprobar que $g(\phi(x)) = 0$ para todo $g \in \mathcal{I}(Z)$ y todo $x \in X$. Pero $g(\phi(x)) = (\phi^*g)(x) = \psi(g)(x) = \psi(0)(x) = 0$, ya que $g = 0$ en $\mathcal{A}(Z)$. $\square$

La proposición 2.3, junto con el ejercicio 1.5, muestran que:

Corolario 2.4. *Las aplicaciones $X \mapsto \mathcal{A}(X)$, $\phi \mapsto \phi^*$ inducen una equivalencia de categorías entre la categoría de conjuntos algebraicos afines y morfismos de conjuntos algebraicos y la categoría opuesta a la de k -álgebras finitamente generadas reducidas y homomorfismos de k -álgebras.*

2.2. Variedades cuasi-afines

El concepto de variedad algebraica afín es demasiado restringido para poder trabajar con flexibilidad. Por eso vamos a aumentar la categoría de variedades afines añadiéndole los subconjuntos abiertos de éstas.

Definición 2.5. *Una subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ se denomina **variedad cuasi-afín** en $\mathbb{A}_k^n$ si es un abierto de Zariski de una variedad afín Z . En otras palabras, si existen una variedad afín Z y un conjunto algebraico $Y \subseteq Z$ tales que $X = Z \setminus Y$.*

Por tanto, para toda variedad cuasi-afín X existen polinomios $f_1, \dots, f_r$ y $g_1, \dots, g_s$ en $k[x_1, \dots, x_n]$ tales que X es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{A}_k^n$ con $f_i(x) = 0$ para todo i y $g_j(x) \neq 0$ para algún j . Como todo abierto no vacío de Z es denso, X determina Y y Z : Z es la clausura $\overline{X}$ e Y es el complementario de X en Z .

Definición 2.6. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad cuasi-afín. Una aplicación $f : X \rightarrow k$ se dice **función regular** si existe $\bar{f} \in \mathcal{K}(\overline{X})$ definida en X tal que $f = \bar{f}|_X$.*

Como las funciones de $\mathcal{K}(\overline{X})$ definidas en $\overline{X}$ son las funciones regulares, esta definición es compatible con la anterior en el caso de que X sea afín. Al igual que en el caso afín, denotaremos por $\mathcal{A}(X)$ el anillo de funciones regulares en X .

Definición 2.7. *Sean $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $Z \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades cuasi-afines. Un **morfismo** entre Y y Z es una aplicación $\phi : Y \rightarrow Z$ tal que existen m funciones regulares $f_1, \dots, f_m : Y \rightarrow k$ con $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ para todo $x \in Y$.*

Al igual que en el caso de morfismos entre variedades afines, tenemos:

Ejercicio 2.1. *Probar que una aplicación $\phi : Y \rightarrow Z$ entre variedades cuasi-afines es un morfismo si y sólo si para toda función regular $f : Z \rightarrow k$ la composición $f \circ \phi : Y \rightarrow k$ es regular.*

Un morfismo $\phi : Y \rightarrow Z$ de variedades cuasi-afines induce por tanto un homomorfismo de k -álgebras $\phi^* : \mathcal{A}(Z) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ entre sus anillos de funciones regulares. Sin embargo, el recíproco en este caso *no* es cierto, como vemos en el ejemplo siguiente:

Ejercicio 2.2. Sean $Y = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ y $Z = Y - \{(0, 0)\}$. Por el ejercicio 1.30 $\mathcal{O}_Z(Y) = \mathcal{O}_Z(Z) = \mathbb{C}[x, y]$. Probar que no existe ningún morfismo $\phi : Y \rightarrow Z$ tal que $\phi^* : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[x, y]$ sea la identidad.

Ejemplos 2.8.

1. La aplicación $\phi : x \mapsto (x, 1/x)$ es un morfismo entre $\mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ y $\mathcal{V}(\{xy - 1\}) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.
2. Dada una variedad $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$, la aplicación dada por $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ es un morfismo entre Z y el hiperplano H definido por $x_n = 0$. Su imagen es la *proyección de Z sobre H* . Si Z es afín, esta proyección no es necesariamente una variedad afín.

Sea $\phi : Y \rightarrow Z$ un morfismo de variedades cuasi-afines, $y \in Y$ y $z = \phi(y) \in Z$. Dada una función racional definida en z $f \in \mathcal{O}_{Z,z} := \mathcal{O}_{\bar{Z},z}$, se obtiene una función racional $\phi^*f = f \circ \phi$ en Y definida en y . En efecto, supongamos que $f = g/h$ en un entorno U de z , con $g, h \in k[x_1, \dots, x_m]$. Entonces $\phi^*f = (g \circ \phi)/(h \circ \phi)$ está definida en un entorno $\phi^{-1}(U)$ de y . Por tanto, ϕ induce un homomorfismo de k -álgebras locales $\phi^* : \mathcal{O}_{Z,z} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$.

Hay que tener en cuenta sin embargo que, en general, ϕ *no* induce un homomorfismo $\phi^* : \mathcal{K}(Z) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$. Esto se debe a que dada $f = g/h : Z \dashrightarrow k$ es posible que $h \circ \phi$ sea idénticamente nula. Por ejemplo, si $\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ viene dada por $\phi(t) = (t, 0)$ no tiene sentido hablar de ϕ^*f , donde $f(x, y) = 1/y$. El homomorfismo $\phi^* : \mathcal{A}(Z) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ se podrá extender a los cuerpos de fracciones si y sólo si es *inyectivo*.

Definición 2.9. Un morfismo de variedades cuasi-afines $\phi : Y \rightarrow Z$ se dice **dominante** si su imagen $\phi(Y)$ es densa en Z .

Por ejemplo, el morfismo $\mathcal{V}(\{xy - 1\}) \subseteq \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ dado por $\phi(x, y) = x$ es dominante, puesto que su imagen es el abierto $\mathbb{A}_k^1 - \{0\}$.

Proposición 2.10. Sea $\phi : Y \rightarrow Z$ un morfismo de variedades cuasi-afines. ϕ es dominante si y sólo si el homomorfismo correspondiente $\phi^* : \mathcal{A}(Z) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ es *inyectivo*.

Demostración. Supongamos que ϕ es dominante, y sea $f \in \ker \phi^*$. Entonces $f \circ \phi = 0$, y por tanto f se anula en todo punto de la imagen de ϕ . Como el conjunto de puntos donde f se anula es un cerrado y la imagen de ϕ es densa, concluimos que f se anula en todo punto de Z . Por tanto $f = 0$ y ϕ^* es *inyectivo*.

Recíprocamente, supongamos que ϕ^* es *inyectivo*. Sea $f \in \mathcal{A}(Z)$ una función regular que se anule en todo punto de la imagen de ϕ , es decir, tal que $f \circ \phi = \phi^*f = 0$. Por ser ϕ^* *inyectiva*, f debe ser nula en todo Z . Es decir, $\mathcal{I}(\phi(Y)) \subseteq \mathcal{I}(Z)$. Aplicando $\mathcal{V}$ y usando el ejercicio 1.13 concluimos que $Z \subseteq \bar{Z} \subseteq \phi(Y)$, es decir, $\phi(Y)$ es denso en Z . $\square$

Por tanto, un morfismo dominante $\phi : Y \rightarrow Z$ de variedades cuasi-afines induce un homomorfismo (necesariamente *inyectivo*) $\phi^* : \mathcal{K}(Z) \hookrightarrow \mathcal{K}(Y)$ de cuerpos.

2.3. Isomorfismos

Definición 2.11. Un morfismo $\phi : Y \rightarrow Z$ entre variedades cuasi-afines se dice un **isomorfismo** si existe un morfismo $\psi : Z \rightarrow Y$ tal que $\phi \circ \psi : Z \rightarrow Z$ y $\psi \circ \phi : Y \rightarrow Y$ son el morfismo identidad. En ese caso, ψ se denomina el **inverso** de ϕ , y se denota por ϕ^{-1} . Dos variedades cuasi-afines se dicen **isomorfas** si existe un isomorfismo entre ellas.

Por el corolario 2.4, ϕ es un isomorfismo de variedades *afines* si y sólo si ϕ^* es un isomorfismo de k -álgebras, y dos variedades *afines* son isomorfas si y sólo si sus anillos de coordenadas lo son. Esto no es cierto en general si las variedades son sólo cuasi-afines, como muestra el primer ejemplo siguiente:

Ejemplos 2.12.

1. Si $\phi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ es el morfismo dado por la inclusión, $\phi^* : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[x, y]$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras (la identidad) por el ejercicio 1.30.
2. El morfismo ϕ del ejemplo 2.8 (1) es un isomorfismo: su inverso viene dado por $(x, y) \mapsto x$.
3. Si $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es una hipersuperficie, la variedad cuasi-afín $\mathbb{A}_k^n - Z$ es isomorfa a una variedad afín: en efecto, si Z viene definida por la ecuación $f = 0$, el morfismo $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 1/f(x_1, \dots, x_n))$ es un isomorfismo entre $\mathbb{A}_k^n - Z$ y la hipersuperficie afín de $\mathbb{A}_k^{n+1}$ definida por la ecuación $x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0$.

Un isomorfismo es claramente una biyección pero, al contrario de lo que ocurre con los homomorfismos entre objetos algebraicos (grupos, anillos, módulos), un morfismo biyectivo no es necesariamente un isomorfismo:

Ejercicio 2.3. Sea $\phi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathcal{V}(\{y^2 - x^3\}) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ el morfismo dado por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Probar que ϕ es biyectivo, incluso un homeomorfismo, pero no es un isomorfismo.

2.4. Aplicaciones racionales

Las aplicaciones racionales se definen a partir de los morfismos exactamente igual que las funciones racionales se definieron a partir de las funciones regulares:

Definición 2.13. Sean $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $Z \subseteq \mathbb{A}_k^m$ dos variedades cuasi-afines. Una **aplicación racional** $\psi : Y \dashrightarrow Z$ es un par (U, ϕ) donde $U \subseteq Y$ es un abierto no vacío y $\phi : U \rightarrow Z$ un morfismo, módulo la relación de equivalencia siguiente: $(U, \phi) \sim (U', \phi')$ si $\phi|_{U \cap U'} = \phi'|_{U \cap U'}$.

Como es habitual, si no se especifica U se sobreentiende que es el mayor abierto donde la expresión dada para ψ tenga sentido.

Definición 2.14. Se dice que una aplicación racional $\psi : Y \dashrightarrow Z$ **está definida en** $y \in Y$ si existe un abierto $U \subseteq Y$ con $y \in U$ y un morfismo $\phi : U \rightarrow Z$ tales que $\psi = (U, \phi)$. El conjunto de puntos de Y donde ψ está definida es un abierto llamado el **abierto de definición** de ψ .

Definición 2.15. Una aplicación racional $\psi = (U, \phi) : Y \dashrightarrow Z$ se dice **dominante** si ϕ lo es.

Ejercicio 2.4. Probar que la definición anterior no depende del par (U, ϕ) elegido para representar ψ . Es decir, probar que si $(U, \phi) \sim (U', \phi')$, entonces ϕ es dominante si y sólo si ϕ' lo es.

Toda aplicación racional dominante $\psi : Y \dashrightarrow Z$ induce un homomorfismo de k -álgebras $\psi^* : \mathcal{K}(Z) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ (es decir, un homomorfismo de cuerpos que actúa trivialmente en k), que es simplemente el inducido por ϕ si $\psi = (U, \phi)$. Veamos que el recíproco es cierto:

Proposición 2.16. Dado un homomorfismo de k -álgebras $\xi : \mathcal{K}(Z) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$, existe una única aplicación racional dominante $\psi : Y \dashrightarrow Z$ tal que $\psi^* = \xi$.

Demostración. Toda aplicación racional dominante $\psi : Y \dashrightarrow Z$ es también una aplicación racional dominante $\psi : \bar{Y} \dashrightarrow \bar{Z}$ y viceversa (por restricción a $Y \cap \psi^{-1}(Z)$), así que podemos suponer que Y y Z son afines. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea $f_i = \xi(x_i) \in \mathcal{K}(Y)$, y sea $U_i \subseteq Y$ un abierto donde f_i esté definida. Veamos que $\psi = (U, \phi)$ es la aplicación racional buscada, donde $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$ y $\phi = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{A}_k^n$. Por construcción, $\psi^*(x_i) = f_i = \xi(x_i)$, y por tanto $\psi^* = \xi$, ya que los x_i generan $\mathcal{K}(Z)$ como cuerpo sobre k .

Veamos que la imagen de ϕ está contenida y es densa en Z . Como $\overline{\phi(U)} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\phi(U)))$, basta probar que $\mathcal{I}(\phi(U)) = \mathcal{I}(Z)$. Sea $g \in \mathcal{I}(Z)$, entonces $g = 0$ en $\mathcal{K}(Z)$, y por tanto $\xi(g) = 0$, es decir $g \circ \psi = 0$ como función racional en Y . En particular $g \circ \phi = 0$ en un abierto no vacío de U , y por tanto en todo U (ejercicio 1.27). Recíprocamente, si $g \in \mathcal{I}(\phi(U))$, $g \circ \phi(y) = 0$ para todo $y \in U$, y por tanto $\xi(g) = g \circ \psi = 0$ como función racional. Como ξ es inyectiva, concluimos que $g = 0$ en $\mathcal{K}(Z)$, y por tanto en $\mathcal{A}(Z)$ (de nuevo por el ejercicio 1.27). $\square$

En general, la composición de dos aplicaciones racionales $\psi : Y \dashrightarrow Z$ y $\psi' : X \dashrightarrow Y$ no está definida, ya que ψ puede no estar definida en ningún punto de la imagen de ψ' : por ejemplo, si $\psi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ viene dada por $\psi(x, y) = (x/y, 0)$ la composición $\psi \circ \psi$ no está definida. Sin embargo, si ψ' es dominante sí es posible definir la composición (ejercicio 2.6). Además, con las notaciones anteriores, $(\psi \circ \psi')^* = \psi'^* \circ \psi^*$. La proposición anterior nos dice que:

Proposición 2.17. Las aplicaciones $Z \mapsto \mathcal{K}(Z)$, $\psi \mapsto \psi^*$ inducen una equivalencia de categorías entre la categoría de variedades afines y aplicaciones racionales dominantes y la categoría opuesta a la de cuerpos finitamente generados sobre k y k -homomorfismos de cuerpos.

Demostración. Lo único que falta probar es que todo cuerpo K finitamente generado sobre k es el cuerpo de funciones de alguna variedad afín. Sean $x_1, \dots, x_n$ generadores de K sobre k . La k -álgebra $k[x_1, \dots, x_n] \subseteq K$ es el anillo de coordenadas de algún conjunto algebraico (ejercicio 1.5) que necesariamente ha de ser una variedad X , porque todo subanillo de un cuerpo es un dominio de integridad. Por tanto, $K = K(\mathcal{A}(X)) = \mathcal{K}(X)$. $\square$

2.5. Variedades birracionalmente equivalentes

Definición 2.18. Sean Y y Z variedades cuasi-afines. Una aplicación racional $\psi : Y \dashrightarrow Z$ se dice **birracional** si existe una aplicación racional $\psi' : Z \dashrightarrow Y$

tal que $\psi' \circ \psi : Y \dashrightarrow Y$ y $\psi \circ \psi' : Z \dashrightarrow Z$ son la identidad (como aplicaciones racionales). Las variedades Y y Z se dicen **birrationalmente equivalentes** si existe una aplicación birracional $\psi : Y \dashrightarrow Z$. Una variedad Y se dice **racional** si es birracionalmente equivalente a $\mathbb{A}_k^n$ para algún n .

Ejemplos 2.19. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ la cuádrica definida por la ecuación $z^2 = xy$. Las aplicaciones racionales $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow Z$ dada por $(a, b) \mapsto (\frac{b^2}{b^2-a}, \frac{a^2}{b^2-a}, \frac{ab}{b^2-a})$ y $Z \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ dada por $(x, y, z) \mapsto (\frac{y}{x-1}, \frac{z}{x-1})$ son inversas la una de la otra, y por tanto son birracionales. En particular, Z es racional.

Proposición 2.20. Sean Y y Z variedades cuasi-afines. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) Y y Z son birracionalmente equivalentes.
- b) Existen abiertos $U \subseteq Y$ y $V \subseteq Z$ isomorfos.
- c) $\mathcal{K}(Y)$ y $\mathcal{K}(Z)$ son isomorfos.

Demostración. Veamos que $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $\phi : Y \dashrightarrow Z$ birracional, y $\psi : Z \dashrightarrow Y$ su inversa. Sea $U' \subseteq Y$ (respectivamente $V' \subseteq Z$) un abierto donde ϕ (resp. ψ) esté definida. Entonces $\psi \circ \phi$ está definida (y es igual a la identidad) en $U' \cap \phi^{-1}(V')$. Análogamente, $\phi \circ \psi$ está definida (y es la identidad) en $V' \cap \psi^{-1}(U')$. Los abiertos buscados son entonces $U = \phi^{-1}(V' \cap \psi^{-1}(U'))$ y $V = \psi^{-1}(U' \cap \phi^{-1}(V'))$.

Si $U \subseteq Y$ y $V \subseteq Z$ son abiertos isomorfos, sus anillos de funciones regulares también son isomorfos. En particular, también lo son sus cuerpos de fracciones, que son justamente $\mathcal{K}(Y)$ y $\mathcal{K}(Z)$.

Finalmente, $(c) \Rightarrow (a)$ es una consecuencia directa de la proposición 2.16. $\square$

Corolario 2.21. Una variedad cuasi-afín Z es racional si y sólo si su cuerpo de funciones es isomorfo a $k(x_1, \dots, x_n)$ para algún n .

Corolario 2.22. Toda variedad afín Z de dimensión d es birracionalmente equivalente a una hipersuperficie en $\mathbb{A}_k^{d+1}$.

Demostración. Por el teorema de estructura de los cuerpos finitamente generados, $\mathcal{K}(Z)$ se puede expresar como una extensión finita (y por tanto algebraica) de $k(x_1, \dots, x_d)$. Es decir, existe un polinomio $f \in k(x_1, \dots, x_d)[y]$ tal que $\mathcal{K}(Z) = k(x_1, \dots, x_d)[y]/\langle f \rangle$. Quitando denominadores, podemos escribir $f = g/h$, con g, h sin factores comunes y $g \in k[x_1, \dots, x_d, y]$. La hipersuperficie definida por g en $\mathbb{A}_k^{d+1}$ es entonces birracionalmente equivalente a Z , ya que su cuerpo de funciones es el cuerpo de fracciones de $k[x_1, \dots, x_d, y]/\langle g \rangle$, que es isomorfo a $\mathcal{K}(Z)$. $\square$

2.6. Ejercicios adicionales

Ejercicio 2.5. Sea $\phi : Y \rightarrow Z$ un morfismo de variedades cuasi-afines. Probar que ϕ es continuo para las topologías de Zariski.

Ejercicio 2.6. Sean $\psi : Y \dashrightarrow Z$ y $\psi' : X \dashrightarrow Y$ dos aplicaciones racionales con ψ' dominante. Probar que existe un abierto $U \subseteq X$ tal que ψ' está definida en U y ψ está definida en $\psi'(x)$ para todo $x \in U$, y por tanto la composición $\psi \circ \psi' : X \dashrightarrow Z$ tiene sentido.

Ejercicio 2.7. Sean $\psi : Y \dashrightarrow Z$ y $\psi' : X \dashrightarrow Y$ dos aplicaciones racionales dominantes. Probar que la composición $\psi \circ \psi'$ (que existe por el ejercicio 2.6) es dominante.

Ejercicio 2.8. Sea $\phi : Y \rightarrow Z$ un morfismo de variedades cuasi-afines. Probar que su imagen $\phi(Y)$ es irreducible.

Ejercicio 2.9. Las hipercuádricas son racionales. Una hipersuperficie $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ se llama **hipercuádrica** si está definida por un ideal generado por un polinomio irreducible de grado 2. Sea Z una hipercuádrica y $P \in Z$ un punto. Si P es suficientemente general, se puede construir una aplicación birracional entre $\mathbb{A}_k^{n-1}$ y Z de la siguiente forma:

Todo punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n$ determina un vector de dirección $\vec{x} = (1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^{n+1}$. El punto P y el vector $\vec{x}$ determinan una recta r , que corta a Z en algún otro punto P_x distinto de P (ya que el polinomio que define Z es de grado 2). La correspondencia $x \mapsto P_x$ es la aplicación birracional buscada. Describir (sin pruebas) cómo se construiría la aplicación birracional inversa. Usar esta construcción para obtener aplicaciones birracionales

a) entre $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ y la cónica definida por $x^2 - y^2 = 1$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

b) entre $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ y la cuádrica definida por $x^2 + yz = 1$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$.

En cada caso, determinar la aplicación inversa.

Ejercicio 2.10. En cada apartado del ejercicio anterior, hallar subconjuntos abiertos de cada una de las variedades tales que la aplicación birracional hallada induzca un isomorfismo entre ellos.

Ejercicio 2.11. Una cúbica singular. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ la curva definida por la ecuación $y^2 = x^3 + x^2$. Probar que la aplicación $\phi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow Z$ dada por $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ es birracional. En particular, Z es racional. ¿Es ϕ un isomorfismo? En caso negativo, hallar abiertos no vacíos $U \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ y $V \subseteq Z$ tales que $\phi|_U : U \rightarrow V$ sea un isomorfismo.

Ejercicio 2.12. Sea $\phi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ el morfismo dado por $\phi(x, y) = (x, xy)$. Probar que ϕ es birracional y dominante, pero su imagen no es abierta ni cerrada.

Ejercicio 2.13. Probar que $\mathbb{A}_k^1$ no es isomorfo a ningún subconjunto abierto propio.

Ejercicio 2.14. Si $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $Z \subseteq \mathbb{A}_k^m$ son variedades y $\phi : Y \rightarrow Z$ es un morfismo, el **grafo** de ϕ es el conjunto $\Gamma_\phi := \{(x, \phi(x)) \in \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^m \mid x \in Y\}$. Probar que Γ_ϕ es una variedad en $\mathbb{A}_k^{n+m}$ isomorfa a Y .

Ejercicio 2.15. Probar que dos variedades afines isomorfas tienen la misma dimensión.

Ejercicio 2.16. Si $Y, Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ son variedades afines, probar que $Y \cap Z \cong (Y \times Z) \cap \Delta$, donde $\Delta \subseteq \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^n$ es la diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{A}_k^n\}$.

Ejercicio 2.17. Sea $\psi : Y \dashrightarrow Z$ una aplicación racional entre variedades e $y \in Y$ un punto en el que ψ esté definida. Si la aplicación $\mathcal{O}_{Z, \psi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$ inducida por ψ es un isomorfismo, probar que ψ es birracional. En particular, existen abiertos $U \subseteq Y$ y $V \subseteq Z$ con $y \in U$ tales que $\psi : U \rightarrow V$ es un isomorfismo. Esto muestra que el anillo local de una variedad en un punto contiene mucha información sobre la variedad entera.

Ejercicio 2.18. Sean a, b enteros positivos, y $X = \mathcal{V}(x^b - y^a) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. Probar que la aplicación $\phi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow X$ dada por $\phi(t) = (t^a, t^b)$ es birracional si y sólo si a y b son primos entre sí, y es un isomorfismo si y sólo si $a = 1$ ó $b = 1$.

Ejercicio 2.19. Probar que todo automorfismo de $\mathbb{A}_k^1$ (es decir, todo isomorfismo $\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$) es lineal: $\phi(t) = at + b$ para algunos $a \neq 0, b \in k$. Dar un ejemplo de automorfismo de $\mathbb{A}_k^2$ que no sea una aplicación lineal afín.

Tema 3

Variedades en el espacio proyectivo

3.1. Conjuntos algebraicos proyectivos

Recordemos la definición de espacio proyectivo.

Definición 3.1. Sea k un cuerpo. El espacio proyectivo de dimensión n sobre k , denotado $\mathbb{P}_k^n$, es el conjunto de $(n+1)$ -uplas no nulas $\mathbb{A}_k^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ módulo la relación de equivalencia siguiente: $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n)$ si existe un $\lambda \in k^*$ tal que $y_i = \lambda x_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. La clase de equivalencia de $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ se denota $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$.

Dado un polinomio $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, no está definido el valor de f en un punto $x \in \mathbb{P}_k^n$, ya que este valor será distinto dependiendo del representante que elijamos en $\mathbb{A}_k^{n+1}$ para x . Sin embargo, si f es homogéneo, la expresión $f(x) = 0$ sí tiene sentido: si $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (y_0 : y_1 : \dots : y_n)$, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $y_i = \lambda x_i$, y por tanto $f(y_0, y_1, \dots, y_n) = \lambda^d f(x_0, x_1, \dots, x_n)$, donde d es el grado de f . En particular, $f(y_0, y_1, \dots, y_n) = 0$ si y sólo si $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$. En tal caso, decimos que $f(x) = 0$.

Para todo subconjunto $S \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ formado por polinomios homogéneos, definimos $\mathcal{V}(S) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ como el conjunto de los $x \in \mathbb{P}_k^n$ tales que $f(x) = 0$ para todo $f \in S$. En general, para $S \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ arbitrario, definimos $\mathcal{V}(S) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ como el conjunto de los $x \in \mathbb{P}_k^n$ tales que $f(x) = 0$ para todo polinomio homogéneo $f \in S$.

Definición 3.2. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ se dice **algebraico** si existe $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ formado por polinomios homogéneos tal que $X = \mathcal{V}(S)$.

Ejemplos 3.3.

1. El conjunto vacío $\emptyset = \mathcal{V}(\{1\})$ y el espacio total $\mathbb{P}_k^n = \mathcal{V}(\{0\})$ son conjuntos algebraicos.
2. El conjunto formado por un solo punto $a = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ es algebraico: $\{a\} = \mathcal{V}(\{a_i x_j - a_j x_i \mid 0 \leq i < j \leq n\})$.
3. Toda subvariedad lineal de $\mathbb{P}_k^n$ es un conjunto algebraico, puesto que está definida por una cantidad finita de ecuaciones lineales homogéneas.

Exactamente igual que en el caso afín, se prueba:

Proposición 3.4. *La intersección arbitraria y la unión finita de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{P}_k^n$ es un conjunto algebraico.*

Y por tanto podemos definir:

Definición 3.5. *Se llama topología de Zariski sobre $\mathbb{P}_k^n$ a la topología cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos.*

3.2. Conjuntos algebraicos proyectivos e ideales homogéneos

Como la suma de polinomios homogéneos no es homogéneo en general, en el caso proyectivo no tiene sentido hablar del “ideal de polinomios que se anulan en un conjunto $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ ”. Pero sí podemos considerar el ideal generado por ellos: dado $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$, definimos $\mathcal{I}(X)$ como el ideal generado por todos los polinomios homogéneos $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ tales que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Definición 3.6. *Un ideal $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ se dice homogéneo si está generado por polinomios homogéneos.*

Ejercicio 3.1. *Probar que un ideal $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ es homogéneo si y sólo si las componentes homogéneas de todo polinomio $f \in I$ están también en I .*

Ejercicio 3.2. *Para que un ideal homogéneo $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ sea radical es suficiente que para todo $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneo tal que $f^m \in I$ para algún $m \geq 1$ se tenga que $f \in I$.*

Del ejercicio anterior se deduce en particular que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal radical de $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

La correspondencia entre ideales radicales y conjuntos algebraicos es un poco más complicada en el caso proyectivo. Para empezar, veamos qué ideales I verifican $\mathcal{V}(I) = \emptyset$.

Proposición 3.7. *Sea $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{V}(I) = \emptyset$
2. Para cada $0 \leq i \leq n$, existe un $m_i \geq 1$ tal que $x_i^{m_i} \in I$
3. $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle$ ó $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$ el conjunto algebraico definido por I visto como ideal corriente. Todo punto de Z distinto de $(0, 0, \dots, 0)$ da lugar a un punto proyectivo, que estaría en $\mathcal{V}(I)$. Como $\mathcal{V}(I) = \emptyset$, concluimos que $Z \subseteq \{(0, 0, \dots, 0)\}$. Aplicando el Nullstellensatz, se tiene que $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq \mathcal{I}(Z) = \sqrt{I}$. En particular, $x_i \in \sqrt{I}$ para todo i , y por tanto existe un $m_i \geq 1$ tal que $x_i^{m_i} \in I$.

$2 \Rightarrow 3$) Para todo $0 \leq i \leq n$, $x_i \in \sqrt{I}$, así que $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq \sqrt{I}$. Como $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ es maximal, debe ser $\sqrt{I} = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ ó $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle$.

$3 \Rightarrow 1$) Si $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle$, entonces $1^m = 1 \in I$, y por tanto $\mathcal{V}(I) = \emptyset$. Si $\sqrt{I} = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$, para cada $0 \leq i \leq n$ existe un $m_i \geq 1$ tal que $x_i^{m_i} \in I$. Por tanto para todo $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathcal{V}(I)$ se tiene que $a_i^{m_i} = 0$, por lo que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, lo cual es imposible para un punto de $\mathbb{P}_k^n$. $\square$

Para el resto de ideales, la versión proyectiva del Nullstellensatz es la siguiente:

Teorema 3.8. *Sea $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo tal que $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.*

Demostración. La contención $\sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ es trivial, ya que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ es un ideal radical que contiene a I . Veamos la contención opuesta. Como $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ está generado por polinomios homogéneos, basta probar que todo polinomio homogéneo de $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ está en $\sqrt{I}$. Sea $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ homogéneo no nulo. Como $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$, f no es una constante. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$ el conjunto algebraico afín definido por I visto como ideal corriente. Entonces f se anula en todo punto de Z distinto de $(0, 0, \dots, 0)$ (ya que todo punto distinto del origen corresponde a un punto del espacio proyectivo en el que f se anula). Pero también se anula en $(0, 0, \dots, 0)$ por ser homogéneo y no constante. Por tanto $f \in \mathcal{I}(Z) = \sqrt{I}$ por el Nullstellensatz afín. $\square$

A partir de los dos últimos resultados obtenemos:

Corolario 3.9. *Las aplicaciones $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ y $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ definen una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ideales radicales homogéneos de $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ distintos de $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ y el conjunto de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{P}_k^n$, que invierte las contenciones.*

En particular, como $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ es noetheriano, todo subconjunto algebraico de $\mathbb{P}_k^n$ es el conjunto de ceros de una cantidad finita de polinomios homogéneos.

3.3. Variedades proyectivas. Dimensión

En esta sección trasladaremos al caso proyectivo algunos conceptos que ya hemos estudiado en el caso afín.

Definición 3.10. *Un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ se dice **reducible** si existen dos subconjuntos algebraicos propios $Y \subsetneq X$ y $Z \subsetneq X$ tales que $X = Y \cup Z$. De lo contrario, X se dice **irreducible**. Una **variedad proyectiva** es un subconjunto algebraico de $\mathbb{P}_k^n$ irreducible.*

Ejercicio 3.3. *Sea $I \subsetneq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un ideal propio homogéneo. Probar que I es primo si y sólo si para todos $f, g \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneos tales que $fg \in I$, o bien $f \in I$ o bien $g \in I$.*

Proposición 3.11. *Un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ no vacío es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo.*

Demostración. Sea X irreducible y no vacío, y supongamos que $\mathcal{I}(X)$ no es primo. Por el ejercicio 3.3, existen $f, g \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneos tales que $fg \in \mathcal{I}(X)$, pero ni f ni g están en $\mathcal{I}(X)$. Definiendo $Y = \mathcal{V}(f) \cap X$ y

$Z = \mathcal{V}(g) \cap Y$ se tiene entonces que $Y \subsetneq X$, $Z \subsetneq X$, e $Y \cup Z = \mathcal{V}(fg) \cap X = X$, contradiciendo la irreducibilidad de X .

Recíprocamente, supongamos que $X = Y \cup Z$ con $Y \subsetneq X$ y $Z \subsetneq X$. Sean $f \in \mathcal{I}(Y) \setminus \mathcal{I}(X)$ y $g \in \mathcal{I}(Z) \setminus \mathcal{I}(X)$ homogéneos. Entonces fg es homogéneo y se anula en todo punto de $Y \cup Z = X$, y por tanto $fg \in \mathcal{I}(X)$. De modo que $\mathcal{I}(X)$ no puede ser primo. $\square$

Corolario 3.12. *Las aplicaciones $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ y $Z \mapsto \mathcal{I}(Z)$ definen una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ideales primos homogéneos de $k[x_1, \dots, x_n]$ distintos de $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ y el conjunto de variedades proyectivas no vacías en $\mathbb{P}_k^n$, que invierte las contenciones.*

El siguiente resultado se traslada palabra por palabra desde el caso afín, con idéntica demostración:

Proposición 3.13. *Todo conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ puede descomponerse como una unión finita $X = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ de variedades proyectivas. Si la descomposición es minimal (es decir, si ningún Z_i puede eliminarse de ella sin que la unión deje de ser X), las variedades Z_i están unívocamente determinadas, y se denominan **componentes irreducibles** de X .*

Definición 3.14. *La **dimensión** de un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es el mayor entero n tal que existe una cadena estrictamente creciente $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \subsetneq X$ de variedades proyectivas. Una variedad proyectiva de dimensión 1 (respectivamente 2, $n-1$) en $\mathbb{P}_k^n$ se denomina una **curva** (resp. **superficie**, **hipersuperficie**) proyectiva.*

El resultado siguiente, que no demostraremos, también es paralelo al correspondiente resultado afín:

Proposición 3.15. *Una variedad proyectiva $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es una hipersuperficie si y sólo si $\mathcal{I}(Z)$ está generado por un polinomio homogéneo irreducible.*

3.4. Funciones regulares y racionales. Variedades cuasi-proyectivas

En el caso de los conjuntos algebraicos proyectivos, no podemos definir las funciones regulares $f : X \rightarrow k$ como aquéllas dadas por un polinomio, ni siquiera homogéneo, ya que el valor del polinomio en un punto dado $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ dependerá de las coordenadas elegidas para representar al punto. Si f es un polinomio homogéneo de grado d y multiplicamos las coordenadas de x por $\lambda \neq 0$, el valor de $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ quedará multiplicado por λ^d . Sin embargo, si g es otro polinomio homogéneo del mismo grado tal que $g(x) \neq 0$, el valor del cociente $f(x)/g(x)$ no depende de las coordenadas elegidas para x . Esto justifica la siguiente definición:

Definición 3.16. *Sea $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva. Una **función racional** $f : Z \dashrightarrow k$ es un par (U, f) donde $U \subseteq Z$ es un abierto no vacío y $f : U \rightarrow k$ es una aplicación tal que existen $g, h \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneos del mismo grado con $h(x) \neq 0$ y $f(x) = g(x)/h(x)$ para todo $x \in U$, módulo la siguiente relación de equivalencia: $(U, f) \sim (U', f')$ si $f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$.*

Ejercicio 3.4. Definir la suma y el producto de funciones racionales en Z , y probar que con esas operaciones forman un cuerpo, que llamaremos el **cuerpo de funciones** de Z y denotaremos $\mathcal{K}(Z)$.

Si $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es una variedad y $f : Z \dashrightarrow k$ una función racional, se dice que f **está definida** en el punto $x \in Z$ si existe un abierto $U \subseteq Z$ con $x \in U$ y polinomios $g, h \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneos del mismo grado con $h(y) \neq 0$ y $f(y) = g(y)/h(y)$ para todo $y \in U$. El conjunto de puntos donde f está definida es un abierto, llamado el **abierto de definición** de f . El conjunto de funciones racionales definidas en un punto $x \in Z$ es un subanillo local del cuerpo de funciones, que llamaremos el **anillo local de Z en x** , denotado $\mathcal{O}_{Z,x}$.

Definición 3.17. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ se denomina **variedad cuasi-proyectiva** si es un abierto de Zariski de una variedad proyectiva Z .

En ese caso, existen polinomios homogéneos $f_1, \dots, f_r$ y $g_1, \dots, g_s$ en $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ tales que Z es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{P}_k^n$ en los que $f_1(x), \dots, f_r(x)$ se anulan y al menos uno de $g_1(x), \dots, g_s(x)$ no se anula.

Definición 3.18. Sea $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad cuasi-proyectiva. Una función racional $f : Z \dashrightarrow k$ definida en todo punto de Z se denomina **función regular**. El conjunto de funciones regulares en Z es un anillo, denotado $\mathcal{O}(Z)$.

3.5. El recubrimiento afín de una variedad proyectiva

En esta sección veremos cómo podemos reducir el estudio de las variedades proyectivas (al menos localmente) al de variedades afines, para las cuales tenemos métodos algebraicos potentes.

Para cada $0 \leq i \leq n$, sea $U_i \subseteq \mathbb{P}_k^n$ el abierto definido por $x_i \neq 0$. Como todo punto del espacio proyectivo tiene al menos una coordenada no nula, los abiertos U_i recubren $\mathbb{P}_k^n$. Sea $\theta_i : \mathbb{A}_k^n \rightarrow U_i$ la aplicación dada por $\theta_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)$.

Ejercicio 3.5. Probar que θ_i es continua para las topologías de Zariski.

Proposición 3.19. La aplicación θ_i es un homeomorfismo, y para toda $f \in \mathcal{O}(U_i)$, $f \circ \theta_i$ es una función regular en $\mathbb{A}_k^n$. La aplicación $\theta_i^* : \mathcal{O}(U_i) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{A}_k^n) = k[x_1, \dots, x_n]$ dada por $\theta_i^*(f) = f \circ \theta_i$ es un isomorfismo de k -álgebras.

Demostración. Para ver que θ_i es un homeomorfismo, basta comprobar que $\psi_i : (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i)$ es una aplicación inversa y que es continua. Sea $Z = \mathcal{V}(\{h_1, \dots, h_r\}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un cerrado, su imagen inversa por esta aplicación sería el conjunto de puntos $x \in U_i$ tales que $h_j(x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i) = 0$ para todo j . Como $x_i \neq 0$, multiplicando por una potencia de x_i obtenemos r polinomios homogéneos $p_j = x_i^{d_j} h_j(x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i)$ tales que $\psi_i^{-1}(Z) = U_i \cap \mathcal{V}(\{p_1, \dots, p_r\})$, y por tanto $\psi_i^{-1}(Z)$ es un cerrado en U_i .

Sea $f \in \mathcal{O}(U_i)$, veamos que $f \circ \theta_i$ es una función regular. Como es claramente una función racional, por el corolario 1.34 basta ver que está definida en todo punto $a \in \mathbb{A}_k^n$. Como f está definida en $\theta_i(a) \in U_i$, existen un abierto $V \subseteq U_i$

con $\theta_i(a) \in V$ y $g, h \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneos del mismo grado tales que $h(y) \neq 0$ y $f(y) = g(y)/h(y)$ para todo $y \in V$. Entonces $g \circ \theta_i$ y $h \circ \theta_i$ son polinomios en $k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $h \circ \theta_i(z) \neq 0$ y $f \circ \theta_i(z) = g \circ \theta_i(z)/h \circ \theta_i(z)$ para todo $z \in \theta_i^{-1}(V)$ (que es abierto por el ejercicio anterior). Por tanto $f \circ \theta_i$ está definida en a .

La aplicación θ_i^* preserva sumas, productos y constantes, y por tanto es un homomorfismo de k -álgebras. Para ver que es un isomorfismo, construyamos el homomorfismo inverso. Sea $p \in k[x_1, \dots, x_n]$, y sea $\psi(p)(x_0, x_1, \dots, x_n) = p(x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i)$. Reduciendo a denominador común, podemos escribir $\psi(p)(x_0, x_1, \dots, x_n) = q(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$, donde q es un polinomio homogéneo de grado d . Como x_i^d no se anula en U_i , $\psi(p)$ define una función regular en U_i . Es un ejercicio fácil comprobar que θ_i^* y ψ son inversas la una de la otra. $\square$

Supongamos ahora que $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es una variedad proyectiva (respectivamente cuasi-proyectiva). Entonces Z está recubierta por los subconjuntos abiertos $Z_i := Z \cap U_i$, y podemos identificar cada Z_i con la variedad afín (resp. cuasi-afín) $\theta_i^{-1}(Z) \subseteq \mathbb{A}_k^n$.

Proposición 3.20. *Una función $f : Z \rightarrow k$ es regular si y sólo si $f \circ \theta_i : \theta_i^{-1}(Z_i) \rightarrow k$ es regular para todo i .*

Demostración. f es regular si y sólo si su restricción a cada abierto Z_i lo es (ya que la regularidad depende sólo de un entorno de cada punto). Por otra parte, la aplicación biyectiva $\theta_i : \mathbb{A}_k^n \rightarrow U_i$ se restringe a una aplicación biyectiva $\theta_i : \theta_i^{-1}(Z_i) \rightarrow Z_i$, de tal manera que $f : Z_i \rightarrow k$ es regular si y sólo si $f \circ \theta_i : \theta_i^{-1}(Z_i) \rightarrow k$ lo es (repetiendo la prueba de la proposición anterior). $\square$

Ejercicio 3.6. Sea $Z = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva, con $f_1, \dots, f_r \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneos. Probar que $\theta_i^{-1}(Z_i) = \mathcal{V}(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_r) \subseteq \mathbb{A}_k^n$, donde $\hat{f}_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

3.6. La inmersión del espacio afín en el espacio proyectivo

Para $i = 0$, la aplicación $\theta_0 : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ definida en la sección anterior nos da una inmersión (topológica) de $\mathbb{A}_k^n$ como el subconjunto abierto de $\mathbb{P}_k^n$ definido por $x_0 \neq 0$. Si no se especifica lo contrario, siempre que consideremos al espacio afín como subconjunto del espacio proyectivo lo haremos mediante esta inmersión. El complementario H_∞ de $\mathbb{A}_k^n$ en $\mathbb{P}_k^n$ (es decir, el hiperplano definido por $x_0 = 0$) se denominará **hiperplano del infinito**.

Sea ahora $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Su imagen por θ_0 es un subconjunto (no necesariamente algebraico) de $\mathbb{P}_k^n$.

Definición 3.21. La **clausura proyectiva** $\overline{X}$ de X es la clausura de X en $\mathbb{P}_k^n$ para la topología de Zariski, es decir, el menor subconjunto algebraico de $\mathbb{P}_k^n$ que contiene a X .

Ejemplos 3.22.

1. Si X es la recta $x_1 = 0$ en $\mathbb{A}_k^2$, su clausura proyectiva es la recta $x_1 = 0$ en $\mathbb{P}_k^2$, que contiene a X y al “punto en el infinito” $(0 : 0 : 1)$.

2. Si X es la curva $x_1x_2 = 1$ en $\mathbb{A}_k^2$, su clausura proyectiva es la curva $x_1x_2 = x_0^2$ en $\mathbb{P}_k^2$, que contiene a X y a los dos “puntos en el infinito” $(0 : 1 : 0)$ y $(0 : 0 : 1)$.

Como $\overline{X}^{\mathbb{A}_k^n} = \overline{X}^{\mathbb{P}_k^n} \cap \mathbb{A}_k^n$ y X es cerrado en $\mathbb{A}_k^n$, se tiene que $\overline{X} \cap \mathbb{A}_k^n = X$. En particular, la aplicación $X \mapsto \overline{X}$ entre conjuntos algebraicos afines y conjuntos algebraicos proyectivos es inyectiva.

Lema 3.23. *Si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es irreducible, también lo es su clausura proyectiva.*

Demostración. Supongamos que $\overline{X} = Y \cup Z$, donde $Y, Z \subseteq \overline{X}$ son subconjuntos cerrados. Entonces $X = \overline{X} \cap \mathbb{A}_k^n = (Y \cap \mathbb{A}_k^n) \cup (Z \cap \mathbb{A}_k^n)$. Como $Y \cap \mathbb{A}_k^n$ y $Z \cap \mathbb{A}_k^n$ son cerrados en X , que es irreducible, o bien $X = Y \cap \mathbb{A}_k^n$ o bien $X = Z \cap \mathbb{A}_k^n$. Supongamos que $X = Y \cap \mathbb{A}_k^n$, entonces $X \subseteq Y$. Pero Y es un cerrado y $\overline{X}$ es el menor cerrado de $\mathbb{P}_k^n$ que contiene a X , así que $Y = \overline{X}$. $\square$

Proposición 3.24. *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva tal que $Y \cap \mathbb{A}_k^n \neq \emptyset$. Entonces $Y = \overline{Y \cap \mathbb{A}_k^n}$.*

Demostración. Como $\overline{Y \cap \mathbb{A}_k^n}$ es el menor cerrado de $\mathbb{P}_k^n$ que contiene a $Y \cap \mathbb{A}_k^n$, se tiene que $\overline{Y \cap \mathbb{A}_k^n} \subseteq Y$. Supongamos que la contención fuera estricta, entonces existiría un $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneo que se anula en $\overline{Y \cap \mathbb{A}_k^n}$ pero no en todo Y . En particular, f se anula en $Y \cap \mathbb{A}_k^n$. Sean $Z = \mathcal{V}(f) \cap Y$ e $Y_\infty = Y \cap H_\infty$. Como $Y \cap \mathbb{A}_k^n \subseteq \mathcal{V}(f) \cap Y$, se tiene que $Y \supseteq Z \cup Y_\infty \supseteq (Y \cap \mathbb{A}_k^n) \cup (Y \cap H_\infty) = Y$, por lo que $Y = Z \cup Y_\infty$. Por otra parte, $Z \neq Y$ (ya que f se anula en todo Z pero no en todo Y) e $Y_\infty \neq Y$ (ya que $Y \cap \mathbb{A}_k^n \neq \emptyset$ por hipótesis). Esto contradice la irreducibilidad de Y . $\square$

Corolario 3.25. *Las aplicaciones $Z \mapsto \overline{Z}$ e $Y \mapsto Y \cap \mathbb{A}_k^n$ definen una correspondencia biunívoca entre el conjunto de variedades afines no vacías en $\mathbb{A}_k^n$ y el conjunto de variedades proyectivas en $\mathbb{P}_k^n$ no contenidas en H_∞ .*

Veamos ahora cómo describir esta correspondencia explícitamente:

Proposición 3.26. *Sea $Y = \mathcal{V}(\{f_1, \dots, f_r\}) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva, donde los $f_i \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ son polinomios homogéneos. Sea $f'_i(x_1, \dots, x_n) := f_i(1, x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ (el “deshomogeneizado” de f_i con respecto a x_0) para todo $i = 1, \dots, r$. Entonces $Y \cap \mathbb{A}_k^n = \mathcal{V}(\{f'_1, \dots, f'_r\}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$.*

Demostración. Un punto $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n$ está en Y si y sólo si el punto proyectivo correspondiente $(1 : x_1 : \dots : x_n)$ está en Y , es decir, si y sólo si $f_i(1, x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo i . Pero por la definición de f'_i , esto es lo mismo que decir que $f'_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo i . $\square$

Para cada $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, definimos el **homogeneizado de f con respecto a x_0** como el polinomio homogéneo $f^h(x_0, x_1, \dots, x_n) := x_0^d f(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, donde d es el grado de f (es decir, multiplicamos cada monomio de f por la potencia de x_0 necesaria para hacerlo homogéneo de grado d). El polinomio original f se puede recuperar a partir de f^h , ya que $f(x_1, \dots, x_n) = f^h(1, x_1, \dots, x_n)$.

Ejercicio 3.7. *Si $g \in k[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio cualquiera y $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo tal que $f(1, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$, probar que $f = x_0^e g^h$ para algún $e \geq 0$.*

Proposición 3.27. Sea $Z = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín, donde $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal primo. Entonces $\overline{Z} = \mathcal{V}(I^h)$, donde $I^h \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ es el ideal generado por el conjunto de los homogeneizados de los elementos de I con respecto a x_0 .

Demostración. Si $f \in I$, entonces $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in Z$. Dicho de otra forma, $f^h(1, x_1, \dots, x_n) = 0$, y por tanto $Z \subseteq \mathcal{V}(I^h)$. Como $\overline{Z}$ es la clausura de Z en $\mathbb{P}_k^n$ y $\mathcal{V}(I^h)$ es cerrado concluimos que $\overline{Z} \subseteq \mathcal{V}(I^h)$.

Recíprocamente, sea $\overline{Z} = \mathcal{V}(J)$, donde J es un ideal homogéneo. Para todo $g \in J$ homogéneo y para todo $(x_1, \dots, x_n) \in Z$ se tiene entonces que $g(1, x_1, \dots, x_n) = 0$. Por tanto, $g'(x_1, \dots, x_n) := g(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{I}(Z) = I$. Por el ejercicio 3.7 se tiene entonces que $g = x_0^e g^h$ para algún $e \geq 1$, y por tanto $g \in I^h$. Así que $J \subseteq I^h$, y tomando $\mathcal{V}$ concluimos que $\mathcal{V}(I^h) \subseteq \mathcal{V}(J) = \overline{Z}$. $\square$

En el resultado anterior no es posible reemplazar I por un conjunto finito de generadores, como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplos 3.28. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_\mathbb{C}^3$ la variedad $\mathcal{V}(\{x_1^2 - x_2, x_1^2 - x_3\})$. Su clausura proyectiva $\overline{Z}$ no es el conjunto algebraico definido por los polinomios $x_1^2 - x_2x_0$ y $x_1^2 - x_3x_0$. Este conjunto algebraico tiene dos componentes irreducibles: la definida por $x_1^2 - x_2x_0 = x_2 - x_3 = 0$ (la verdadera clausura proyectiva de Z) y la componente “intrusa” definida por $x_0 = x_1 = 0$.

En general, si $Z = \mathcal{V}(\{f_1, \dots, f_r\})$ es una variedad afín, el conjunto algebraico proyectivo $\mathcal{V}(\{f_1^h, \dots, f_r^h\})$ contiene a la clausura proyectiva de Z como componente irreducible, posiblemente con otras componentes irreducibles contenidas en H_∞ .

3.7. Morfismos entre variedades cuasi-proyectivas

Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad cuasi-proyectiva. La definición de morfismo de X en el espacio afín es similar a la del caso de una variedad cuasi-afín:

Definición 3.29. Una aplicación $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$ se dice un **morfismo** si existen m funciones regulares $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(X)$ tales que $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ para todo $x \in X$. Si $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ es una variedad cuasi-afín, un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ es un morfismo $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$ tal que $\phi(X) \subseteq Y$.

Ejercicio 3.8. Si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es una variedad cuasi-afín, probar que $\phi : \theta_0(X) \rightarrow \mathbb{A}_k^m$ es un morfismo según esta definición si y sólo si $\phi \circ \theta_0 : X \rightarrow \mathbb{A}_k^m$ es un morfismo según la definición del tema anterior. Por tanto las dos definiciones de morfismo son compatibles para variedades cuasi-afines.

La definición de los morfismos hacia el espacio proyectivo es un poco más delicada. En las definiciones de morfismo que hemos visto hasta ahora la condición que tiene que cumplir una aplicación $\phi : X \rightarrow Y$ para serlo es local. Es decir, es una condición (el que cada coordenada de ϕ sea regular) que tiene que cumplirse en un entorno de cada punto de X . En particular, si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un recubrimiento abierto de X , la aplicación ϕ es un morfismo si y sólo si cada restricción $\phi|_{U_i}$ lo es. Si queremos que los morfismos hacia el espacio proyectivo sigan verificando esta propiedad (y sean compatibles con las definiciones anteriores) sólo hay una forma posible de definirlos:

Definición 3.30. Una aplicación $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ se dice un **morfismo** si es continua y, para todo $0 \leq i \leq m$, la restricción $\phi : \phi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ es un morfismo entre $\phi^{-1}(U_i)$ y el espacio afín U_i (usando las notaciones de la sección 3.5). Si $Y \subseteq \mathbb{P}_k^m$ es una variedad cuasi-proyectiva, un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ es un morfismo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ tal que $\phi(X) \subseteq Y$.

En la práctica, para construir morfismos entre variedades cuasi-proyectivas usaremos el siguiente resultado más explícito:

Proposición 3.31. Sean $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^m$ variedades cuasi-proyectivas. Una aplicación $\phi : X \rightarrow Y$ es un morfismo si y sólo si para todo $z \in X$ existen un abierto $U \subseteq X$ conteniendo a z y $m+1$ polinomios homogéneos $f_0, f_1, \dots, f_m \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ del mismo grado que no se anulan simultáneamente en ningún punto de U tales que $\phi(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (f_0(x_0, \dots, x_n) : f_1(x_0, \dots, x_n) : \dots : f_m(x_0, \dots, x_n))$ para todo $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in U$.

Es importante notar que, aunque el valor de $f_i(x_0, \dots, x_n)$ no está determinado por el punto $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ (ya que si elegimos otras coordenadas para x cambiará el valor de f_i), el *punto proyectivo* $(f_0(x_0, \dots, x_n) : f_1(x_0, \dots, x_n) : \dots : f_m(x_0, \dots, x_n))$ sí lo está: si elegimos otras coordenadas $(y_0 : y_1 : \dots : y_n)$ para x , existirá un $\lambda \neq 0$ tal que $y_i = \lambda x_i$ para todo i . Como los f_i son homogéneos del mismo grado d , se tendrá entonces que $f_i(y_0, \dots, y_n) = \lambda^d f_i(x_0, \dots, x_n)$ para todo i , y por tanto $(f_0(x_0, \dots, x_n) : f_1(x_0, \dots, x_n) : \dots : f_m(x_0, \dots, x_n)) = (f_0(y_0, \dots, y_n) : f_1(y_0, \dots, y_n) : \dots : f_m(y_0, \dots, y_n))$.

Demostración. Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo. Los abiertos $V_i := \phi^{-1}(U_i)$ recubren X , construiremos las funciones $f_0, f_1, \dots, f_m$ localmente en cada V_i . Sea por ejemplo $i = 0$ (la construcción es similar para todo i). Como $\phi : V_0 \rightarrow U_0$ es un morfismo, para todo $z \in V_0$ existe un entorno $z \in V \subseteq V_0$ tal que para todo $x \in V$ $\phi(x)$ (visto como elemento de $U_0 \subseteq \mathbb{P}_k^m$) viene dado por $(1 : g_1(x)/h_1(x) : \dots : g_m(x)/h_m(x))$, donde para cada $j = 1, \dots, m$ g_j y h_j son polinomios homogéneos del mismo grado y h_j no se anula en V . Multiplicando todas las coordenadas por el producto de los denominadores (que no se anula en V) obtenemos que $\phi(x) = (f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_m(x))$, donde $f_0 = h_1 \cdots h_m$ y $f_j = g_j h_1 \cdots h_m / h_j$ para $j = 1, \dots, m$ son polinomios homogéneos del mismo grado y f_0 no se anula en V .

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición del enunciado. En primer lugar, ϕ debe ser continua, ya que la continuidad es una propiedad local y ϕ es continua en cada abierto U en el que pueda escribirse como $(f_0 : f_1 : \dots : f_m)$ (ejercicio). Veamos que $\phi : V_0 \rightarrow U_0$ es un morfismo. Sea $z \in V_0$, por hipótesis existe un entorno $V \subseteq V_0$ de z y $m+1$ polinomios homogéneos $f_0, f_1, \dots, f_m \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ del mismo grado tales que $\phi(x) = (f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_m(x))$ para todo $x \in V$. Como $\phi(x) \in U_0$ que, por definición, es el abierto en el que $x_0 \neq 0$, se tiene que f_0 no se anula en V . Por tanto podemos escribir $\phi(x) = (1 : f_1(x)/f_0(x) : \dots : f_m(x)/f_0(x))$. Visto como punto afín, $\phi(x)$ viene entonces dado por $(f_1(x)/f_0(x), \dots, f_m(x)/f_0(x))$. Cada coordenada viene dada por el cociente de dos polinomios homogéneos del mismo grado, y por tanto ϕ es un morfismo en V .

De la misma forma se prueba que $\phi : V_j \rightarrow U_j$ es un morfismo para todo $j = 1, \dots, m$, y por tanto $\phi : X \rightarrow Y$ es un morfismo según la definición anterior. $\square$

Al definir un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ de esta forma, hay que tener cuidado de que la definición sea compatible: si $\phi = (f_0 : f_1 : \dots : f_m)$ en un abierto U y $\phi = (g_0 : g_1 : \dots : g_m)$ en otro abierto V , se tiene que cumplir que $(f_0 : f_1 : \dots : f_m) = (g_0 : g_1 : \dots : g_m)$ en $U \cap V$, es decir, que $f_i g_j = f_j g_i$ para todos $0 \leq i < j \leq m$ en todo punto de $U \cap V$.

Ejemplos 3.32. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^3$ la variedad definida por $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$. Las aplicaciones $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_3)$ y $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_2 : x_1)$ definen morfismos $X \cap (U_0 \cup U_3) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ y $X \cap (U_1 \cup U_2) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, que se “pegan” para dar como resultado un morfismo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, ya que en la intersección de los dominios se tiene que $x_0 x_1 = x_2 x_3$, y por tanto $(x_0 : x_3) = (x_1 : x_2)$.

Ejercicio 3.9. Probar que la composición de morfismos entre variedades cuasi-proyectivas es un morfismo.

Definición 3.33. Un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ entre variedades cuasi-proyectivas se dice un **isomorfismo** si existe un morfismo $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ \phi$ y $\phi \circ \psi$ sean la identidad. En tal caso se dice que las variedades X e Y son **isomorfas**.

Ejemplos 3.34. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$ la variedad definida por $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ (la clausura proyectiva de la cónica $x^2 + y^2 - 1 = 0$). Definimos $\phi(x_0 : x_1) = (x_1^2 + x_0^2 : x_1^2 - x_0^2 : 2x_0 x_1)$. Como $x_1^2 + x_0^2$ y $x_1^2 - x_0^2$ no se anulan simultáneamente, ϕ define un morfismo $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow X$. El morfismo $\psi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dado por $\psi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 - x_1 : x_2)$ en $X - \{(1 : 1 : 0)\}$ y por $\psi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_2 : x_0 + x_1)$ en $X - \{(1 : -1 : 0)\}$ es inverso de ϕ , y por tanto X es isomorfa a $\mathbb{P}_k^1$.

3.8. Aplicaciones racionales entre variedades cuasi-proyectivas

La definición de aplicación racional para variedades cuasi-proyectivas es la misma que para variedades cuasi-afines:

Definición 3.35. Sean $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^m$ dos variedades cuasi-proyectivas. Una **aplicación racional** $\psi : X \dashrightarrow Y$ es un par (U, ϕ) donde $U \subseteq X$ es un abierto no vacío y $\phi : U \rightarrow Y$ un morfismo, módulo la relación de equivalencia siguiente: $(U, \phi) \sim (U', \phi')$ si $\phi|_{U \cap U'} = \phi'|_{U \cap U'}$.

Como $(U, \phi) \sim (U', \phi|_{U'})$ para todo abierto no vacío $U' \subseteq U$, podemos suponer que $\phi(U) \subseteq Z_i$ para algún i (donde $Z_i = Z \cap U_i$ según la notación de la sección 3.5). Por tanto, una función racional ψ viene dada por un abierto $U \subseteq X$ y m funciones regulares $f_1/g_1, \dots, f_m/g_m$ en U (donde para cada j , f_j y g_j son polinomios homogéneos del mismo grado) mediante la fórmula $\psi(x) = (1 : f_1(x)/g_1(x) : \dots : f_m(x)/g_m(x))$ (en el caso $i = 0$, en general el 1 iría en la posición i -ésima). Multiplicando por el producto de los g_j , obtenemos $\psi(x) = (g(x) : g(x)f_1(x)/g_1(x) : \dots : g(x)f_m(x)/g_m(x))$, donde g y cada gf_j/g_j son polinomios homogéneos del mismo grado. En resumen:

Proposición 3.36. Una aplicación racional $\psi : X \dashrightarrow Y$ viene dada por $m + 1$ polinomios $f_0, f_1, \dots, f_m \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogéneos del mismo grado tales que $\langle f_0, f_1, \dots, f_m \rangle \not\subseteq \mathcal{I}(X)$, mediante la fórmula $\psi(x_0 : \dots : x_n) = (f_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : f_m(x_0, \dots, x_n))$. La aplicación ψ está definida en el conjunto $X \setminus \mathcal{V}(\{f_0, \dots, f_m\})$ de puntos $x \in X$ en los que algún f_j no se anula.

Otro conjunto de polinomios $g_0, g_1, \dots, g_m$ homogéneos del mismo grado define la misma función racional si y sólo si $f_i g_j - f_j g_i = 0$ en X para todos $0 \leq i < j \leq m$.

Demostración. Sólo falta por probar la última afirmación. Supongamos que $(f_0 : \dots : f_m)$ y $(g_0 : \dots : g_m)$ definen la misma aplicación racional, es decir, las dos funciones coinciden en el abierto U en el que ambas están definidas. Entonces para todo $x = (x_0 : \dots : x_n) \in U$ se tiene que $(f_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : f_m(x_0, \dots, x_n)) = (g_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : g_m(x_0, \dots, x_n))$, es decir, existe $\lambda \neq 0$ tal que $g_j(x_0, \dots, x_n) = \lambda f_j(x_0, \dots, x_n)$ para todo j . En particular, $f_i(x_0, \dots, x_n)g_j(x_0, \dots, x_n) - f_j(x_0, \dots, x_n)g_i(x_0, \dots, x_n) = \lambda(f_i(x_0, \dots, x_n)f_j(x_0, \dots, x_n) - f_j(x_0, \dots, x_n)f_i(x_0, \dots, x_n)) = 0$. Como $f_i g_j - f_j g_i = 0$ en U , que es un abierto denso de X , se tiene que $f_i g_j - f_j g_i = 0$ en todo X .

Recíprocamente, supongamos que $f_i g_j - f_j g_i = 0$ en X para todos $0 \leq i, j \leq m$, y sea $x = (x_0 : \dots : x_n) \in X$ un punto en el que $(f_0 : \dots : f_m)$ y $(g_0 : \dots : g_m)$ estén definidas, es decir, que al menos un f_{i_0} y al menos un g_{j_0} no se anulen en x . Entonces para todo j se tiene que $f_{i_0} g_j - f_j g_{i_0} = 0$, es decir, $g_j(x_0, \dots, x_n) = [g_{i_0}(x_0, \dots, x_n)/f_{i_0}(x_0, \dots, x_n)]f_j(x_0, \dots, x_n)$. En primer lugar, haciendo $j = j_0$ vemos que $\lambda := g_{i_0}(x_0, \dots, x_n)/f_{i_0}(x_0, \dots, x_n)$ no se anula, y entonces $g_j(x_0, \dots, x_n) = \lambda f_j(x_0, \dots, x_n)$ para todo j . Por tanto, $(f_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : f_m(x_0, \dots, x_n)) = (g_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : g_m(x_0, \dots, x_n))$. $\square$

Terminamos repitiendo las siguientes definiciones y resultados del tema anterior, enunciados para el caso proyectivo:

Definición 3.37. Sean X e Y variedades cuasi-proyectivas. Una aplicación racional $\psi : X \dashrightarrow Y$ se dice **birracional** si existe una aplicación racional $\psi' : Y \dashrightarrow X$ tal que $\psi' \circ \psi : X \dashrightarrow X$ y $\psi \circ \psi' : Y \dashrightarrow Y$ son la identidad (como aplicaciones racionales). En tal caso, las variedades X e Y se dicen **birracionalmente equivalentes**. Una variedad cuasi-proyectiva X se dice **racional** si es birracionalmente equivalente a $\mathbb{A}_k^n$ (o lo que es lo mismo, a $\mathbb{P}_k^n$) para algún n .

Proposición 3.38. Sean X e Y variedades cuasi-proyectivas. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) X e Y son birracionalmente equivalentes.
- b) Existen abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ isomorfos.
- c) $K(X)$ y $K(Y)$ son isomorfos.

La prueba es la misma que en el caso afín (proposición 2.20).

3.9. Ejercicios adicionales

Ejercicio 3.10. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín y $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}_k^n$ su clausura proyectiva. Probar que $K(X) = K(\overline{X})$.

Ejercicio 3.11. Si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es una variedad afín, probar que $\dim X = \dim \overline{X}$. En particular, $\dim \mathbb{P}_k^n = n$.

Ejercicio 3.12. Sea $Z = \mathcal{V}(\{f\}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una hipersuperficie, donde $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Probar que $\overline{Z} = \mathcal{V}(\{f^h\})$.

Ejercicio 3.13. Cono afín de un conjunto algebraico proyectivo. Sea $X = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un conjunto algebraico no vacío, donde $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ es un ideal homogéneo. El **cono afín** $C(X)$ de X es el conjunto algebraico definido en $\mathbb{A}_k^{n+1}$ por I , considerado como ideal corriente.

1. Probar que $C(X) = \phi^{-1}(X) \cup \{(0, \dots, 0)\}$, donde $\phi : \mathbb{A}_k^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ es la proyección canónica $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$.
2. Probar que $C(X)$ es irreducible si y sólo si X lo es.

Ejercicio 3.14. Descomponer como unión de componentes irreducibles los conjuntos algebraicos proyectivos siguientes:

1. $\mathcal{V}(x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1 - x_2x_3) \subseteq \mathbb{P}_\mathbb{C}^3$
2. $\mathcal{V}(x_0^2 + x_1x_2, x_0^2 - x_1x_2 + 2x_3^2) \subseteq \mathbb{P}_\mathbb{C}^3$

Ejercicio 3.15. Probar que $\mathcal{O}(\mathbb{P}_k^n) = k$, es decir, toda función regular $f : \mathbb{P}_k^n \rightarrow k$ es constante. Deducir que, si Z es una variedad afín, todo morfismo $\phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow Z$ es constante. En particular, $\mathbb{P}_k^n$ no es isomorfo a ninguna variedad afín para ningún $n \geq 1$.

Ejercicio 3.16. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva, $U \subseteq \mathbb{P}_k^1$ un abierto no vacío y $\phi : U \rightarrow X$ un morfismo. Probar que ϕ se extiende de manera única a un morfismo $\bar{\phi} : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow X$. (Ayuda: Empezar por el caso $U = \mathbb{A}_k^1$.) Probar que no es cierto en el caso de que X sea afín.

Ejercicio 3.17. Sea $A \in \mathcal{M}_{n+1}(k)$ una matriz $(n+1) \times (n+1)$ invertible con coeficientes en un cuerpo k . Probar que la aplicación $\phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ dada por $\phi(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (y_0 : y_1 : \dots : y_n)$ con

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es un automorfismo de $\mathbb{P}_k^n$. Diremos que ϕ viene dado por la multiplicación por la matriz A . Probar que dos matrices A y B determinan el mismo automorfismo si y sólo si $B = \lambda \cdot A$ para algún $\lambda \in k^*$.

Ejercicio 3.18. Probar que para toda terna de puntos distintos a, b, c de $\mathbb{P}_k^1$ existe un automorfismo $\phi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ tal que $\phi(1 : 0) = a$, $\phi(1 : 1) = b$ y $\phi(0 : 1) = c$.

Ejercicio 3.19. Probar que todo automorfismo de $\mathbb{P}_k^1$ viene dado por la multiplicación por una matriz $A \in \mathcal{M}_2(k)$. (Ayuda: Considerar primero el caso en el que el punto del infinito es fijo, y usar el ejercicio 2.19. Reducir el caso general a éste usando el ejercicio 3.18.)

Ejercicio 3.20. Sea $\phi : \mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^2$ la aplicación racional dada por $\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$.

1. Determinar el mayor abierto de $\mathbb{P}_k^2$ donde ϕ está definida.
2. Probar que ϕ es birracional, y hallar su inversa.

3. Hallar abiertos $U, V \subseteq \mathbb{P}_k^2$ tales que $\phi : U \rightarrow V$ sea un isomorfismo.

Ejercicio 3.21. Si $H \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es un hiperplano y $P \in \mathbb{P}_k^n$ un punto que no está en H , probar que la proyección desde P sobre H (que a cada punto $Q \neq P$ asocia el único punto de intersección de la recta PQ con H) es una aplicación racional $\mathbb{P}_k^n \dashrightarrow H$. Hallar las ecuaciones de dicha aplicación si $n = 3$, H es el plano definido por $x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0$ y P es el punto $(1 : 1 : 0 : 1)$.

Ejercicio 3.22. La inmersión de Veronese. Dados dos enteros $n \geq 1$ y $d \geq 0$, sea $S(n, d)$ el conjunto de $(n+1)$ -uplas de enteros no negativos $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tales que $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = d$. El conjunto $S(n, d)$ tiene $\binom{n+d}{d}$ elementos, sea $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Fijada una ordenación $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^N$ de los elementos de $S(n, d)$, sea $\phi_{n,d} : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^N$ la aplicación racional dada por $\phi_{n,d}(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (x^{\alpha^0} : x^{\alpha^1} : \dots : x^{\alpha^N})$, donde $x^{\alpha^i} = x_0^{\alpha_0^i} x_1^{\alpha_1^i} \dots x_n^{\alpha_n^i}$ es el monomio cuyos exponentes son las coordenadas de α^i .

1. Probar que $\phi_{n,d}$ es un morfismo.
2. Probar que la imagen de $\phi_{n,d}$ es la variedad proyectiva $Z \subseteq \mathbb{P}_k^N$ definida por las ecuaciones $y_i y_j = y_k y_l$ para todos i, j, k, l tales que $\alpha^i + \alpha^j = \alpha^k + \alpha^l$, llamada **variedad de Veronese**.
3. Probar que $\phi_{n,d}$ es un isomorfismo entre $\mathbb{P}_k^n$ y Z .
4. Probar que toda hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^n$ definida por un polinomio homogéneo de grado d es la imagen inversa por $\phi_{n,d}$ de un hiperplano en $\mathbb{P}_k^N$.

Ejercicio 3.23. La curva normal racional. La imagen X_d de la inmersión de Veronese $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^d$ para $n = 1$ se llama la **curva normal racional en $\mathbb{P}_k^d$** .

1. Probar que X_d es el conjunto de puntos $(x_0 : x_1 : \dots : x_d) \in \mathbb{P}_k^d$ tales que la matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_d \end{pmatrix}$$

tiene rango 1.

2. Probar que X_d es la clausura proyectiva de la imagen del morfismo $\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^d$ dado por $\phi(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$.
3. Probar que tres puntos distintos de X_d nunca están en la misma recta.

Ejercicio 3.24. Si $H \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es una hipersuperficie, probar que el abierto $\mathbb{P}_k^n - H$ es isomorfo a una variedad afín. (Ayuda: Usar el ejercicio 3.22.)

Ejercicio 3.25. Si $H \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es una hipersuperficie y $L \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una recta, probar que $H \cap L \neq \emptyset$. (Ayuda: Considerar la inclusión $L \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$ y usar los ejercicios 3.15 y 3.24.)

Ejercicio 3.26. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva de dimensión d , y $H = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una hipersuperficie que no contenga a X . Probar que toda componente irreducible de $X \cap H$ tiene dimensión $d - 1$. (Ayuda: Usar [AC, 3, Teorema 1 y 4, Corolario 6].)

Ejercicio 3.27. Sea $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un ideal generado por r polinomios homogéneos no constantes, con $r \leq n$. Probar que $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$. Concluir que la intersección de n hipersuperficies en $\mathbb{P}_k^n$ es no vacía. (Ayuda: Considerar los conos afines de X e Y (ejercicio 3.13), y usar el ejercicio 1.8.)

Tema 4

Propiedades de los morfismos

4.1. Producto de variedades

El producto de dos variedades afines tiene una estructura natural de variedad afín (ejercicio 1.14). Queremos generalizarlo al producto de dos variedades cuasi-proyectivas. Es decir, identificar el producto cartesiano $X \times Y$ con una variedad cuasi-proyectiva de manera natural, de forma que localmente la construcción corresponda al producto natural de variedades afines.

Definición 4.1. La **inmersión de Segre** es la aplicación $\varphi : \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ dada por

$$\begin{aligned} \varphi((a_0 : \dots : a_n), (b_0 : \dots : b_m)) &= \\ &= (a_0 b_0 : \dots : a_0 b_m : a_1 b_0 : \dots : a_1 b_m : \dots : a_n b_0 : \dots : a_n b_m). \end{aligned}$$

La inmersión de Segre está bien definida, ya que si multiplicamos cada a_i por una constante $\lambda \neq 0$ y cada b_j por una constante $\mu \neq 0$, cada coordenada de la imagen quedará multiplicada por $\lambda\mu \neq 0$, y por tanto representa el mismo punto proyectivo.

Además, es inyectiva: si $\varphi((a_0 : \dots : a_n), (b_0 : \dots : b_m)) = \varphi((a'_0 : \dots : a'_n), (b'_0 : \dots : b'_m))$, entonces existe un $\nu \neq 0$ tal que $a_i b_j = \nu a'_i b'_j$ para todos $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$. Tomando un i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$, necesariamente $a'_{i_0} \neq 0$ también (de lo contrario todos los b_j serían 0) y se tiene entonces que $b_j = (\nu a'_{i_0} / a_{i_0}) b'_j$ para todo j , y por tanto $(b_0 : \dots : b_m) = (b'_0 : \dots : b'_m)$. De la misma forma se prueba que $(a_0 : \dots : a_n) = (a'_0 : \dots : a'_n)$. Por tanto podemos identificar $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ con su imagen en $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$.

Proposición 4.2. Si denotamos x_{ij} ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$) las coordenadas de $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$, la imagen de φ es la variedad proyectiva Z definida por las ecuaciones homogéneas $x_{ij} x_{kl} - x_{il} x_{kj} = 0$ para todos $0 \leq i < k \leq n$, $0 \leq j < l \leq m$.

Demostración. Es fácil ver que la imagen de φ está contenida en Z , ya que $(a_i b_j)(a_k b_l) - (a_i b_l)(a_k b_j) = 0$ para todos $0 \leq i < k \leq n$, $0 \leq j < l \leq m$.

Veamos que, recíprocamente, todo punto de Z está en la imagen de φ . Dado un punto $x = (x_{ij}) \in Z$, existen al menos un i_0 y un j_0 tales que $x_{i_0 j_0} \neq 0$.

Pongamos $a_i = x_{ij_0}$ para todo $0 \leq i \leq n$ y $b_j = x_{i_0j}/x_{i_0j_0}$ para todo $0 \leq j \leq m$. Entonces $a_i b_j = x_{ij_0} x_{i_0j} / x_{i_0j_0} = x_{ij} x_{i_0j_0} / x_{i_0j_0} = x_{ij}$, y por tanto $x = \varphi((a_0 : \dots : a_n), (b_0 : \dots : b_m)) \in \varphi(\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m)$. $\square$

Ejemplos 4.3. El producto $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ es la variedad definida en $\mathbb{P}_k^3$ por la ecuación $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$.

Definición 4.4. Sean $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^m$ dos subconjuntos. El **producto** de X e Y es la imagen de $X \times Y$ en $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ por la inmersión de Segre.

Ejercicio 4.1. Si X es un conjunto algebraico e $Y = \{y\} \subseteq \mathbb{P}_k^m$ contiene un solo punto, probar que el producto $X \times Y$ es un conjunto algebraico isomorfo a X .

Proposición 4.5. Sean $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^m$ conjuntos algebraicos (respectivamente variedades cuasi-proyectivas). El producto $X \times Y$ es un conjunto algebraico (resp. una variedad cuasi-proyectiva) en $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$.

Demostración. Basta probarlo para conjuntos algebraicos y variedades proyectivas, ya que si $X = X_0 - X_1$ e $Y = Y_0 - Y_1$ con X_i e Y_j proyectivas, se tiene que $\varphi(X \times Y) = \varphi(X_0 \times Y_0) - \varphi(X_0 \times Y_1) - \varphi(X_1 \times Y_0)$. Supongamos entonces que $X = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ e $Y = \mathcal{V}(g_1, \dots, g_s)$ son conjuntos algebraicos proyectivos.

Para todo $j_0 = 1, \dots, m$ sea $f_{kj_0}(x_{ij}) = f_k(x_{0j_0}, \dots, x_{nj_0})$, y para todo $i_0 = 1, \dots, n$ sea $g_{i_0l}(x_{ij}) = g_l(x_{i_01}, \dots, x_{i_0m})$. Veamos que $X \times Y$ es el conjunto algebraico definido por todos los f_{kj_0} y todos los g_{i_0l} .

Si $((a_0 : \dots : a_n), (b_0 : \dots : b_m))$ está en $X \times Y$, entonces $f_{kj_0}(a_i b_j) = f_k(a_0 b_{j_0}, \dots, a_n b_{j_0}) = b_{j_0}^{d_k} f_k(a_0, \dots, a_n) = 0$, donde d_k es el grado del polinomio homogéneo f_k , ya que $(a_0 : \dots : a_n)$ está en X . Análogamente, $g_{i_0l}(a_i b_j) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $(a_i b_j) \in \mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ es un punto de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ con $f_{kj_0}(a_i b_j) = g_{i_0l}(a_i b_j) = 0$ para todo k, l, i_0, j_0 . Al igual que antes se tiene que $f_{kj_0}(a_i b_j) = b_{j_0}^{d_k} f_k(a_0, \dots, a_n)$, y por tanto $b_{j_0}^{d_k} f_k(a_0, \dots, a_n) = 0$ para todo k, j_0 . Como debe existir al menos un j_0 tal que $b_{j_0} \neq 0$, concluimos que $f_k(a_0, \dots, a_n) = 0$ para todo k . Análogamente, $g_l(b_0, \dots, b_m) = 0$ para todo l , y por tanto $(a_i b_j) \in X \times Y$.

Finalmente, veamos que si X e Y son variedades también lo es $X \times Y$. Supongamos que $X \times Y = A \cup B$ es una descomposición como unión de cerrados. Para todo $(x, y) \in X \times Y$, $\{x\} \times Y$ es irreducible por el ejercicio 4.1, por tanto $\{x\} \times Y \subseteq A$ o $\{x\} \times Y \subseteq B$. Sea $C \subseteq X$ (respectivamente $D \subseteq X$) el conjunto de $x \in X$ tales que $\{x\} \times Y \subseteq A$ (resp. $\{x\} \times Y \subseteq B$). Es fácil ver que C y D son cerrados en X , y por lo visto anteriormente $C \cup D = X$. Como X es irreducible, o bien $X = C$ (y entonces $X \times Y = A$) o bien $X = D$ (y entonces $X \times Y = B$). En cualquier caso, A y B no pueden ser ambos cerrados propios. $\square$

Si $(a_0 : \dots : a_n)$ está en el abierto afín $U_{i_0} \subseteq \mathbb{P}_k^n$ (es decir, $a_{i_0} \neq 0$) y $(b_0 : \dots : b_m)$ está en el abierto afín $V_{j_0} \subseteq \mathbb{P}_k^m$, entonces $(a_i b_j) \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ está en el abierto afín $W_{i_0 j_0} \subseteq \mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ (es decir, el conjunto de los $(x_{ij}) \in \mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ tales que $x_{i_0 j_0} \neq 0$). Además, la restricción $\varphi : U_{i_0} \times V_{j_0} \rightarrow W_{i_0 j_0} \cap (\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m)$ es un isomorfismo. Por tanto, localmente la construcción del producto coincide con el producto natural de espacios afines.

Ejercicio 4.2. Probar las afirmaciones del párrafo anterior.

Como ϕ es biyectiva sobre su imagen, las proyecciones canónicas $\pi_1 : \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ y $\pi_2 : \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ inducen morfismos $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$, que también llamaremos proyecciones.

Ejercicio 4.3. Describir explícitamente las proyecciones π_1 y $\pi_2 : Z \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, donde $Z = \varphi(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) \subseteq \mathbb{P}_k^3$ es el producto de $\mathbb{P}_k^1$ por sí mismo, definido por la ecuación $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.

Proposición 4.6. El producto $X \times Y$ junto con las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ es un producto en la categoría de variedades cuasi-proyectivas, es decir, dados dos morfismos $\alpha : Z \rightarrow X$ y $\beta : Z \rightarrow Y$ entre variedades cuasi-proyectivas, existe un único morfismo $\psi : Z \rightarrow X \times Y$ tal que $\pi_1 \circ \psi = \alpha$ y $\pi_2 \circ \psi = \beta$.

Demostración. Si $\alpha(z) = (\alpha_0(z) : \dots : \alpha_n(z))$ y $\beta(z) = (\beta_0(z) : \dots : \beta_m(z))$, donde los α_i (resp. los β_j) son polinomios homogéneos del mismo grado que no se anulan simultáneamente en ningún punto, es fácil ver que la aplicación $\psi(z) := (\alpha_i(z)\beta_j(z))_{ij}$ es un morfismo que cumple las condiciones pedidas.

Recíprocamente, sea $\psi : Z \rightarrow X \times Y$ un morfismo que cumpla las condiciones, dado por $\psi(z) = (\psi_{ij}(z))_{ij}$, y sea $z \in Z$. Existen al menos un i_0 y un j_0 tales que $\psi_{i_0j_0}(z) \neq 0$. Entonces $\pi_1\psi(z) = (\psi_{0j_0}(z) : \dots : \psi_{nj_0}(z)) = \alpha(z)$, así que $\alpha_i(z) = \alpha_{i_0}(z)\psi_{i_0j_0}(z)/\psi_{i_0j_0}(z)$ para todo i . Análogamente, $\beta_j(z) = \beta_{j_0}(z)\psi_{i_0j_0}(z)/\psi_{i_0j_0}(z)$ para todo j . Por tanto,

$$\alpha_i(z)\beta_j(z) = \alpha_{i_0}(z)\beta_{j_0}(z)\psi_{i_0j_0}(z)\psi_{i_0j_0}(z)/\psi_{i_0j_0}(z)^2 = \alpha_{i_0}(z)\beta_{j_0}(z)\psi_{ij}(z)/\psi_{i_0j_0}(z)$$

(ya que $\psi_{i_0j_0}(z)\psi_{i_0j_0}(z) = \psi_{ij}(z)\psi_{i_0j_0}(z)$). Por tanto los morfismos $\psi = (\psi_{ij})_{ij}$ y $(\alpha_i\beta_j)_{ij}$ coinciden en un abierto no vacío (la imagen inversa por ψ del abierto definido por $x_{i_0j_0} \neq 0$), así que son iguales. $\square$

Finalmente veamos cómo caracterizar en la práctica los subconjuntos cerrados de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$:

Proposición 4.7. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ es cerrado si y sólo si existen polinomios $f_1, \dots, f_r \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ homogéneos separadamente en las x y en las y tales que

$$X = \{((a_0 : \dots : a_n), (b_0 : \dots : b_m)) \mid f_i(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r\}$$

Demostración. Si X es un cerrado, existen polinomios homogéneos $g_1, \dots, g_r \in k[x_{ij}]$ tales que $X = \mathcal{V}(g_1, \dots, g_r) \cap \varphi(\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m)$. Es decir, un punto $((a_0 : \dots : a_n), (b_0 : \dots : b_m))$ está en X si y sólo si $g_k(a_i b_j) = 0$ para todo $k = 1, \dots, r$. Equivalentemente, si definimos $f_k(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m) = g_k(x_i y_j)$, si y sólo si $f_k(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m) = 0$ para todo k . Además, los f_k son homogéneos en las x y en las y (del mismo grado).

Recíprocamente, supongamos que existen tales $f_1, \dots, f_r$. Si cada f_k es homogéneo en las x y en las y del mismo grado, es fácil ver que se pueden escribir como $g_k(x_i y_j)$, con g_k homogéneo. Por tanto $X = \mathcal{V}(g_1, \dots, g_r) \cap \varphi(\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m)$ sería un cerrado.

Veamos ahora qué pasa si el grado de f_k en las x y en las y es distinto. Sea d el grado en las x , y e el grado en las y , y supongamos que $d > e$. Entonces $y_0^{d-e} f_k, \dots, y_m^{d-e} f_k$ son todos homogéneos en las x y en las y del mismo grado, y

se anulan simultáneamente si y sólo si f_k se anula (ya que algún y_j es siempre no nulo). Por tanto X se puede expresar como el conjunto de ceros de polinomios homogéneos en las x y en las y del mismo grado, y por el caso anterior concluimos entonces que es cerrado. $\square$

4.2. Inmersiones. Morfismos proyectivos

Definición 4.8. Un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ entre variedades cuasi-proyectivas se denomina una **inmersión abierta** (respectivamente **cerrada**) si su imagen es un abierto (resp. un cerrado) de Y y $\phi : X \rightarrow \phi(X)$ es un isomorfismo. Un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ se denomina una **inmersión** si es composición de una inmersión abierta seguida de una inmersión cerrada.

Ejemplos 4.9. 1. Si X e Y son variedades afines y $\psi : X \rightarrow Y$ es un morfismo, la aplicación grafo $X \rightarrow X \times Y$ dada por $x \mapsto (x, \psi(x))$ es una inmersión cerrada por el ejercicio 2.14.

2. Si $X = \mathcal{V}(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}_k^2$, el morfismo $X \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ dado por $(x, y) \mapsto (x, 0)$ es una inmersión que no es abierta ni cerrada.

Ejercicio 4.4. Probar que la composición de dos inmersiones abiertas (respectivamente cerradas) es una inmersión abierta (resp. cerrada).

Definición 4.10. Un morfismo $\psi : X \rightarrow Y$ entre variedades cuasi-proyectivas se dice **proyectivo** si $\psi = \pi \circ \iota$, donde $\iota : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n \times Y$ es una inmersión cerrada y $\pi : \mathbb{P}_k^n \times Y \rightarrow Y$ es la proyección.

Proposición 4.11. Si X es una variedad proyectiva, cualquier morfismo $\psi : X \rightarrow Y$ es proyectivo.

Demostración. Sea $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$ la inclusión. Como X es proyectiva, j es una inmersión cerrada. La aplicación $\iota : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n \times Y$ dada por $\iota(x) = (x, \psi(x))$ es entonces también una inmersión cerrada (es la composición del grafo de $\psi : X \rightarrow Y$, que ya hemos visto que es una inmersión cerrada, con la inmersión $X \times Y \rightarrow \mathbb{P}_k^n \times Y$). Como $\psi = \pi \circ \iota$, concluimos que ψ es proyectivo. $\square$

La propiedad fundamental de los morfismos proyectivos es la siguiente:

Proposición 4.12. Todo morfismo proyectivo $\psi : X \rightarrow Y$ es cerrado, es decir, la imagen de cualquier subconjunto cerrado de X es un cerrado en Y .

Demostración. Sea $\psi = \pi \circ \iota$, con $\iota : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n \times Y$ una inmersión cerrada y π la proyección. Una inmersión cerrada $\iota : X \rightarrow Z$ es una aplicación cerrada: como ι es un isomorfismo entre X e $\iota(X)$, la imagen de cualquier cerrado en X es un cerrado en $\iota(X)$. Pero entonces también es un cerrado en Z , ya que $\iota(X)$ es cerrado en Z . Por tanto basta probar que π es una aplicación cerrada.

Usando el recubrimiento afín de $\mathbb{P}_k^n$, podemos escribir $Y = \bigcup_{i=0}^m Y_i$, con Y_i abierto en Y y cuasi-afín. Además, $\pi : \mathbb{P}_k^n \times Y \rightarrow Y$ es cerrado si y sólo si $\pi : \mathbb{P}_k^n \times Y_i \rightarrow Y_i$ es cerrado para todo i . Por tanto podemos suponer que Y es cuasi-afín. Por el ejercicio 4.7, un cerrado de $\mathbb{P}_k^n \times Y$ será el conjunto de ceros de una cantidad finita de polinomios $f_1, \dots, f_r \in k[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ homogéneos en las x . Su imagen por π será el conjunto de $(b_1, \dots, b_m) \in Y$ tales

que los polinomios en $k[x_0, \dots, x_n]$ obtenidos al sustituir para todo j y_j por b_j en $f_1, \dots, f_r$ tienen una solución común en $\mathbb{P}_k^n$. Por tanto la proposición es una consecuencia del teorema siguiente. $\square$

Teorema 4.13. (Teorema fundamental de eliminación). *Sean $f_1, \dots, f_r \in k[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ polinomios homogéneos en las x . Entonces existen polinomios $g_1, \dots, g_s \in k[y_1, \dots, y_m]$ tales que: dados $b_1, \dots, b_m \in k$, los polinomios en $k[x_0, \dots, x_n]$ obtenidos al sustituir los y_j por los b_j en $f_1, \dots, f_r$ tienen una solución común en $\mathbb{P}_k^n$ si y sólo si $g_1, \dots, g_s$ se anulan en $(b_1, \dots, b_m)$.*

No daremos aquí la prueba, que puede encontrarse en [S, I.5.2].

Corolario 4.14. *Si X es una variedad proyectiva, toda función regular $f : X \rightarrow k$ es constante.*

Demostración. Una función regular f es simplemente un morfismo $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Podemos ver f como un morfismo $f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, mediante la inclusión $\mathbb{A}_k^1 \subseteq \mathbb{P}_k^1$. Como X es proyectiva, $f(X)$ es un cerrado. No es el total, ya que no contiene al punto del infinito. Por tanto, $f(X)$ tiene que ser un conjunto finito. Como X es irreducible, y por tanto conexo, y f es continua, $f(X)$ también debe ser conexo. Así que tiene que ser un solo punto. $\square$

Corolario 4.15. *Si X es una variedad proyectiva e Y una variedad afín, todo morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ es constante.*

Demostración. Cada coordenada de ϕ es una función regular, y por tanto es constante por el corolario anterior. $\square$

Corolario 4.16. *Una variedad proyectiva de dimensión > 0 no puede ser isomorfa a ninguna variedad afín.*

4.3. Morfismos finitos

Definición 4.17. *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo de variedades afines, y $\phi^* : \mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ el homomorfismo de k -álgebras correspondiente. El morfismo ϕ se dice **finito** si $\mathcal{A}(X)$ es un $\phi^*(\mathcal{A}(Y))$ -módulo finitamente generado.*

Por [AM, Proposición 5.1], esto es equivalente a decir que todo elemento de $\mathcal{A}(X)$ es entero sobre $\phi^*(\mathcal{A}(Y))$, es decir, satisface un polinomio mónico con coeficientes en $\mathcal{A}(Y)$.

Ejemplos 4.18.

1. El morfismo $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ dado por $x \mapsto (x, 0)$ es finito: El homomorfismo de k -álgebras correspondiente está dado por $\phi^*(f(x, y)) = f(x, 0) \in k[x]$, y de esta forma $k[x]$ está generado por 1 como $\phi^*(k[x, y])$ -módulo. En general, cualquier inmersión cerrada es un morfismo finito, ya que en ese caso ϕ^* es un homomorfismo sobreyectivo.
2. La inmersión abierta $\mathbb{A}_k^1 - \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^1$ no es un morfismo finito: el homomorfismo de k -álgebras correspondiente es la inmersión $k[x] \hookrightarrow k[x, 1/x]$, y $1/x$ no es entero sobre $k[x]$.

3. El morfismo $\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ dado por $\phi(x) = x^2$ es finito: el homomorfismo de k -álgebras correspondiente es $f(x) \mapsto f(x^2)$, y $k[x]$ es un $k[x^2]$ módulo finitamente generado (ya que todo polinomio en $k[x]$ puede escribirse en la forma $g(x^2) + x \cdot h(x^2)$).

Proposición 4.19. *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo finito entre variedades afines. Entonces, la imagen inversa $\phi^{-1}(\{y\})$ de todo punto $y \in Y$ es un conjunto finito.*

Demostración. Sea x tal que $\phi(x) = y$. Si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, cada coordenada $x_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ es una función regular en $\mathcal{A}(X)$. Como ϕ es finito, x_i es raíz de un polinomio mónico $p_i(x)$ con coeficientes en $\phi^*(\mathcal{A}(Y))$, es decir, de la forma $g \circ \phi$ con $g \in \mathcal{A}(Y)$. Aplicándolo a las coordenadas del punto x , obtenemos que la coordenada i -ésima de x es raíz de un polinomio cuyos coeficientes dependen sólo de $g(x) = y$. En particular, hay sólo un número finito de posibilidades para cada coordenada una vez fijado y . $\square$

El recíproco no es cierto, como muestra el segundo ejemplo anterior.

Proposición 4.20. *Todo morfismo finito y dominante entre variedades afines es sobreyectivo.*

Demostración. Por la proposición 2.10, que ϕ sea dominante es equivalente a que ϕ^* sea inyectivo. Por tanto podemos identificar $\mathcal{A}(Y)$ con su imagen por ϕ^* , que es una sub- k -álgebra de $\mathcal{A}(X)$.

Por la prueba de la proposición 2.3, tenemos que probar que para todo ideal maximal de $\mathcal{A}(Y)$ (necesariamente de la forma $\bar{\mathfrak{m}}_y$ para algún $y \in Y$), existe un ideal maximal de $\mathcal{A}(X)$ (necesariamente de la forma $\bar{\mathfrak{m}}_x$ para algún $x \in X$) tal que $\bar{\mathfrak{m}}_x \cap \mathcal{A}(Y) = \bar{\mathfrak{m}}_y$. Pero esto es una consecuencia inmediata de los teoremas 5.8 y 5.10 de [AM] por ser $\mathcal{A}(X)$ una extensión entera de $\mathcal{A}(Y)$. $\square$

El lema de normalización de Noether admite la siguiente interpretación geométrica:

Proposición 4.21. *Toda variedad afín $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ de dimensión d admite un morfismo finito $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^d$.*

Demostración. Por el lema de normalización de Noether ([AC, 4, corolario 5]) existen $x_1, \dots, x_d \in \mathcal{A}(X)$ algebraicamente independientes tales que $k[x_1, \dots, x_d] \subseteq \mathcal{A}(X)$ y $\mathcal{A}(X)$ es una extensión entera de $k[x_1, \dots, x_d]$. El morfismo $X \rightarrow \mathbb{A}_k^d$ correspondiente a dicha inclusión de k -álgebras es el morfismo finito buscado. $\square$

Para variedades cuasi-proyectivas en general, definimos los morfismos finitos localmente:

Definición 4.22. *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo entre variedades cuasi-proyectivas. Se dice que ϕ es **finito** si para todo abierto afín $U \subseteq Y$, la imagen inversa $\phi^{-1}(U)$ es afín y la restricción $\phi : \phi^{-1}(U) \rightarrow U$ es un morfismo finito entre variedades afines.*

Como la propiedad de ser finito es local, basta probarlo para los abiertos de un recubrimiento finito afín de Y , que siempre existe (primero tomando el recubrimiento cuasi-afín estándar de una variedad proyectiva, y después expresando cada trozo cuasi-afín como unión de abiertos básicos del tipo $\mathbb{A}_k^n - \mathcal{V}(f)$, que son isomorfos a una variedad afín).

4.4. Normalización

Definición 4.23. Sea $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad cuasi-proyectiva. Un punto $x \in Z$ se dice **normal** si el anillo local $\mathcal{O}_{Z,x}$ es íntegramente cerrado [AM, Capítulo 5]. La variedad Z se dice **normal** si todos sus puntos son normales.

Como la normalidad es una propiedad local, para comprobar si una variedad es normal basta comprobarlo para cada uno de los abiertos de un recubrimiento afín. Y en el caso de las variedades afines, tenemos la siguiente caracterización:

Proposición 4.24. Una variedad afín $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es normal si y sólo si su anillo de coordenadas $\mathcal{A}(Z)$ es íntegramente cerrado.

Demostración. Z es normal si y sólo si es normal en cada punto, es decir, si y sólo si el anillo local $\mathcal{O}_{Z,x}$ es íntegramente cerrado para todo $x \in Z$. Por la proposición 1.32, $\mathcal{O}_{Z,x}$ es el localizado $\mathcal{A}(Z)_{\bar{\mathfrak{m}}_x}$ de $\mathcal{A}(Z)$ en el ideal maximal correspondiente a x . Por la proposición 1.14, todo ideal maximal de $\mathcal{A}(Z)$ es de la forma $\bar{\mathfrak{m}}_x$ para algún $x \in Z$. Por tanto, Z es normal si y sólo si el localizado de $\mathcal{A}(Z)$ en cualquier ideal maximal es íntegramente cerrado. Por [AM, proposición 5.13], esto es equivalente a que $\mathcal{A}(Z)$ sea íntegramente cerrado. $\square$

Ejemplos 4.25.

1. Un dominio de factorización única es íntegramente cerrado. En particular, $\mathbb{A}_k^n$ es normal, ya que $k[x_1, \dots, x_n]$ es un DFU.
2. El espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ es normal, ya que está recubierto por abiertos afines isomorfos al espacio afín $\mathbb{A}_k^n$, que es normal por el ejemplo anterior.
3. La curva $Z = \mathcal{V}(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ no es normal: su anillo de coordenadas es $\mathcal{A}(Z) = k[x, y]/\langle y^2 - x^3 \rangle$, el elemento $\xi = y/x \in \mathcal{K}(Z)$ es entero sobre $\mathcal{A}(Z)$, ya que es raíz de la ecuación mónica $\xi^2 - x = 0$, pero no está en $\mathcal{A}(Z)$: si estuviera, y/x sería regular en Z , es decir, existiría $f \in k[x, y]$ tal que $y/x = f(x, y)$ para todo $(x, y) \in Z$. Entonces $y - xf(x, y)$ estaría en el ideal $\langle y^2 - x^3 \rangle$, lo cual es imposible (un múltiplo de $y^2 - x^3$ no puede tener términos de grado 1).

Veamos ahora la característica más importante de los puntos normales:

Proposición 4.26. Sea $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad cuasi-proyectiva de dimensión ≥ 2 y $x \in Z$ un punto normal. Si $f : Z \setminus \{x\} \rightarrow k$ es una función regular, f se extiende de manera única a una función regular $\bar{f} : Z \rightarrow k$.

Demostración. La unicidad es una consecuencia directa del ejercicio 1.27. Veamos la existencia. Como el problema es local, podemos suponer que $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es una variedad afín.

Sea $J \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ el ideal formado por los polinomios h tales que la función regular hf en $Z \setminus \{x\}$ se extiende a Z . Obviamente $\mathcal{I}(Z) \subseteq J$, así que $\mathcal{V}(J) \subseteq Z$. Veamos que $J = k[x_1, \dots, x_n]$, y por tanto $f = 1 \cdot f$ se extiende a Z . Para todo $y \in Z$ distinto de x , f está definida en y , así que existen $g_y, h_y \in k[x_1, \dots, x_n]$ con $h_y(y) \neq 0$ tales que $f = g_y/h_y$, es decir, existe $h_y \in J$ tal que $h_y(y) \neq 0$. Por tanto $\mathcal{V}(J)$ no puede contener ningún punto de Z distinto de x o, equivalentemente, $\mathcal{V}(J) \subseteq \{x\}$. Por el Nullstellensatz, deducimos que

$\mathfrak{m}_x \subseteq \sqrt{J}$, es decir, existe un $a \geq 0$ tal que $\mathfrak{m}_x^a \subseteq J$ (ya que $\mathfrak{m}_x$ es finitamente generado).

Si $a > 0$, sea $h \in \mathfrak{m}_x^{a-1}$. Entonces $h\mathfrak{m}_x \subseteq \mathfrak{m}_x^a \subseteq J$, es decir, fhu se extiende a Z para todo $u \in \mathfrak{m}_x$. Dicho de otra forma, $f h \mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{A}(Z)$. Pasando al localizado en x , tenemos que $f h \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Z,x} \subseteq \mathcal{O}_{Z,x}$. Como $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Z,x}$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{Z,x}$, o bien $f h \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$ o bien $f h \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Z,x} \subseteq \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Z,x}$. En el primer caso, tendríamos $fhu = 1$ para algún $u \in \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Z,x}$. Sea $U \subseteq Z$ un abierto que contenga a x donde u esté definida. Como $fhu = 1$ y f es regular en $U \setminus \{x\}$, $\mathcal{V}(u) \cap U$ sólo puede contener a x . Pero esto es imposible, ya que toda componente de $\mathcal{V}(u) \cap U$ debe tener dimensión $\geq \dim(Z) - 1 \geq 1$ (ejercicio 1.32). En el segundo caso, fh es entero sobre $\mathcal{O}_{Z,x}$ (ver [AM, Proposición 2.4]), y por tanto estaría en $\mathcal{O}_{Z,x}$ por ser íntegramente cerrado. Por tanto $h \in J$. Es decir, $\mathfrak{m}_x^{a-1} \subseteq J$. Repitiendo el proceso, concluimos que $\mathfrak{m}_x^0 = k[x_1, \dots, x_n] \subseteq J$. $\square$

La hipótesis de que Z tenga dimensión ≥ 2 es fundamental, como muestra el ejemplo $Z = \mathbb{A}_k^1$, $x = 0$, $f(t) = 1/t$.

Proposición 4.27. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín. Existe una única (salvo isomorfismo) variedad normal afín $\tilde{X}$ y un morfismo finito $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ con la siguiente propiedad universal: Dada una variedad normal afín Y y un morfismo dominante $\psi : Y \rightarrow X$, existe un único morfismo $\tilde{\psi} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\psi = \phi \circ \tilde{\psi}$. La variedad $\tilde{X}$ se denomina **normalización** de X .*

Demostración. La unicidad es una consecuencia de la propiedad universal de la manera habitual. Veamos la existencia.

Teniendo en cuenta la equivalencia de categorías 2.4 y la proposición 2.10, el resultado es equivalente al siguiente: Dado un dominio de integridad A finitamente generado sobre k , existe un dominio de integridad $\tilde{A}$ finitamente generado sobre k e íntegramente cerrado y un k -homomorfismo $\phi' : A \rightarrow \tilde{A}$ tal que $\tilde{A}$ es finitamente generado como A -módulo y todo k -homomorfismo inyectivo $\psi' : A \rightarrow B$ de A en un dominio de integridad finitamente generado sobre k e íntegramente cerrado B se factoriza de manera única a través de ϕ' . Veamos que la clausura íntegra $\tilde{A}$ de A (en su cuerpo de fracciones) cumple estas condiciones.

En primer lugar, $\tilde{A}$ es un dominio de integridad por estar contenido en un cuerpo, y es íntegramente cerrado por transitividad [AM, Corolario 5.4]. Es una k -álgebra finitamente generada y un A -módulo finitamente generado por [H, Theorem 3.9A]. Finalmente, sea $\psi' : A \rightarrow B$ un homomorfismo inyectivo, donde B es un dominio de integridad finitamente generado sobre k e íntegramente cerrado. ψ' se extiende de manera única a homomorfismo de cuerpos $\psi' : K(A) \rightarrow K(B)$, en particular se extiende a $\tilde{A} \subseteq K(A)$. Dado $a \in \tilde{A}$, a es entero sobre A , y por tanto $\psi'(a)$ es entero sobre $\psi'(A) \subseteq B$. Como B es íntegramente cerrado, $\psi'(a)$ tiene que estar en B . Por tanto ψ' se extiende a $\psi' : \tilde{A} \rightarrow B$ de manera única. $\square$

Es posible extender esta construcción a variedades cuasi-proyectivas mediante pegamiento, pero nos restringiremos en estas notas al caso afín.

4.5. Ejercicios adicionales

Ejercicio 4.5. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^3$ la superficie definida por la ecuación $x_0x_1 - x_2x_3 = 0$. Hallar dos familias de rectas $\{r_i\}$ y $\{s_i\}$ contenidas en X tales que dos rectas de la misma familia no se corten, dos rectas de distintas familias se corten en un punto y por cada punto de X pase exactamente una recta de cada familia.

Ejercicio 4.6. Probar que $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ no es isomorfo a $\mathbb{P}_k^2$.

Ejercicio 4.7. Probar que un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{A}_k^m$ es cerrado si y sólo si existen polinomios $f_1, \dots, f_r \in k[x_0, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ homogéneos en las x tales que

$$X = \{((a_0 : \dots : a_n), (b_1, \dots, b_m)) \mid f_i(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r\}$$

Ejercicio 4.8. Probar que un punto $(x_{0,0} : \dots : x_{m,n}) \in \mathbb{P}_k^{mn+m+n}$ está en $\varphi(\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m)$ si y sólo si el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_{0,0} & \dots & x_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,0} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix}$$

es 1.

Ejercicio 4.9. En cada uno de los ejemplos siguientes de familias de polinomios $f_1, \dots, f_r$ en $k[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ homogéneos en las x , determinar los puntos $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{A}_k^m$ tales que al sustituir las y_j por las b_j en los f_i los polinomios obtenidos determinen un conjunto algebraico no vacío de $\mathbb{P}_k^n$, y comprobar que se verifica el teorema 4.13.

1. $m = n + 1, \{x_0y_1, x_1y_2, \dots, x_ny_{n+1}\}$
2. $n = 2, m = 3, \{x_1 - x_0y_1, x_2 - x_1y_2, x_0 - x_2y_3\}$
3. $n = 2, m = 3, \{x_0 - y_1x_1, x_0 - y_2x_2, x_0^2 - y_1x_1x_2\}$

Ejercicio 4.10. Si $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es una variedad afín, probar que la inmersión $Z \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ es un morfismo finito.

Ejercicio 4.11. Probar que todo morfismo $\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ no constante es finito.

Ejercicio 4.12. Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo finito y dominante entre variedades afines. Probar que $\dim(X) = \dim(Y)$. (Ayuda: Usar los teoremas “going up” y “going-down” [AM, 5.11 y 5.16].)

Ejercicio 4.13. Probar que el morfismo $\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$ donde $X \subseteq \mathbb{A}_k^2$ es la curva $\mathcal{V}(y^2 - x^3)$ y $\phi(t) = (t^2, t^3)$ es finito.

Ejercicio 4.14. Probar que la curva $Z = \mathcal{V}(y^2 - x^3 - x^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ no es normal.

Ejercicio 4.15. Probar que la cónica $Z = \mathcal{V}(y^2 + x^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ es normal. (Ayuda: Probar que todo punto tiene un entorno isomorfo a un abierto de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$.)

Tema 5

Singularidades

5.1. El espacio tangente a una variedad en un punto

Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, y $a = (a_1, \dots, a_n)$ un punto de X . Una recta r que pase por a viene dada, en ecuaciones paramétricas, por $x_1 = a_1 + tv_1, \dots, x_n = a_n + tv_n$, donde $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es un vector de dirección de la recta. Si sustituimos estos valores de $x_1, \dots, x_n$ en las ecuaciones de X , obtenemos r polinomios en la variable t : $\hat{f}_1(t) = f_1(a + t\vec{v}), \dots, \hat{f}_r(t) = f_r(a + t\vec{v})$, que se anulan para $t = 0$.

Definición 5.1. La multiplicidad de intersección de X y r en a es el mínimo de las multiplicidades de $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_r$ en $t = 0$. La recta r se dice **tangente a X en a** si la multiplicidad de intersección es ≥ 2 .

Ejercicio 5.1. Probar que la multiplicidad de intersección no depende de los generadores $f_1, \dots, f_r$, sólo del ideal $\langle f_1, \dots, f_r \rangle$.

Si $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ es otro vector de dirección y $r' = a + t\vec{w}$ la recta correspondiente, la multiplicidad de intersección de X y la recta $r'' = a + t(\vec{v} + \vec{w})$ es mayor o igual que el mínimo de las multiplicidades de intersección de X con r y r' . En efecto, si todo término de $\hat{f}_i(a + t\vec{v})$ y todo término de $\hat{f}_i(a + t\vec{w})$ tienen grado $\geq m$, entonces todo término de $\hat{f}_i(a + t(\vec{v} + \vec{w})) = \hat{f}_i(\frac{1}{2}(a + 2t\vec{v} + a + 2t\vec{w}))$ tendrá también grado $\geq m$.

En particular, el conjunto de vectores $\vec{v} \neq \vec{0}$ tales que la recta $a + t\vec{v}$ es tangente a X en a junto con el vector $\vec{0}$ forman un subespacio vectorial de k^n .

Definición 5.2. El espacio tangente a X en a es el subespacio $T_{X,a}$ de k^n formado por los vectores $\vec{v}$ tales que la recta $a + t\vec{v}$ es tangente a X en a , junto con el vector $\vec{0}$.

Ejemplos 5.3.

1. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ la hipersuperficie dada por $z - xy = 0$, y $a = (0, 0, 0)$. Dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, la recta parametrizada por $t(v_1, v_2, v_3)$ es tangente a X en a si y sólo si el polinomio $v_3t - v_1v_2t^2$ tiene multiplicidad ≥ 2 en $t = 0$, es decir, si y sólo si $v_3 = 0$. En este caso, el espacio tangente a X en a es el subespacio $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$.

2. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ la hipersuperficie dada por $z^2 - xy = 0$, y $a = (0, 0, 0)$. Dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, la recta parametrizada por $t(v_1, v_2, v_3)$ es tangente a X en a si y sólo si el polinomio $v_3 t^2 - v_1 v_2 t^2$ tiene multiplicidad ≥ 2 en $t = 0$, lo cual es siempre cierto. En este caso, el espacio tangente a X en a es todo $\mathbb{C}^3$.

Sea $\vec{v}$ un vector del espacio tangente a X en el punto a , y sea $f = u/v \in \mathcal{O}_{X,a}$ una función racional en X definida en a , dada por el cociente de dos polinomios en $k[x_1, \dots, x_n]$ tal que el denominador no se anula en a . Consideramos la función racional $\hat{f}(t) = f(a + t\vec{v})$ en $k(t)$, y denotamos por $\partial_{\vec{v}} f$ la derivada de $\hat{f}(t)$ en $t = 0$. Es fácil ver que se tienen las siguientes propiedades:

- $\partial_{\vec{v}}(f + g) = \partial_{\vec{v}} f + \partial_{\vec{v}} g$
- $\partial_{\vec{v}}(fg) = g(a)\partial_{\vec{v}} f + f(a)\partial_{\vec{v}} g$
- Si f es una constante, $\partial_{\vec{v}} f = 0$.

Además, si $f = 0$ como función racional en X , es decir, si $f = \sum_{i=1}^r g_i f_i \in \mathcal{I}(X)\mathcal{O}_{X,a}$ (donde $g_i(x) \in \mathcal{O}_{X,a}$ para $i = 1, \dots, r$), se tiene que $\partial_{\vec{v}} f = \partial_{\vec{v}}(\sum_{i=1}^r g_i f_i) = \sum_{i=1}^r f_i(a)\partial_{\vec{v}} g_i + g_i(a)\partial_{\vec{v}} f_i = \sum_{i=1}^r g_i(a)\partial_{\vec{v}} f_i = 0$, ya que $\partial_{\vec{v}} f_i = 0$ por ser el vector $\vec{v}$ tangente a X en a .

Por tanto, $\partial_{\vec{v}}$ define una aplicación k -lineal $\mathcal{O}_{X,a} \rightarrow k$, que está completamente determinada por sus valores en el ideal maximal $\bar{\mathfrak{m}}_a := \mathfrak{m}_a \mathcal{O}_{X,a}$ (ya que cualquier función racional definida en a se puede expresar como suma de una constante y una función racional que se anula en a : $f = f(a) + (f - f(a))$). Además, $\partial_{\vec{v}}$ se anula en las funciones de $\bar{\mathfrak{m}}_a^2$ por la segunda propiedad. Por tanto, podemos ver $\partial_{\vec{v}}$ de forma natural como una aplicación k -lineal de $\bar{\mathfrak{m}}_a/\bar{\mathfrak{m}}_a^2$ en k .

Proposición 5.4. *La aplicación $\vec{v} \mapsto \partial_{\vec{v}}$ es un isomorfismo de k -espacios vectoriales entre el espacio tangente a X en a y el espacio dual de $\bar{\mathfrak{m}}_a/\bar{\mathfrak{m}}_a^2$.*

Demostración. Dada una forma lineal $\theta : \bar{\mathfrak{m}}_a/\bar{\mathfrak{m}}_a^2 \rightarrow k$, sea $\vec{v}_{\theta}$ el vector $(\theta(x_1 - a_1), \dots, \theta(x_n - a_n))$. Está claro que $\theta \mapsto \vec{v}_{\theta}$ es k -lineal, veamos que es el inverso del homomorfismo $\vec{v} \mapsto \partial_{\vec{v}}$.

En primer lugar, veamos que $\vec{v}_{\theta}$ es un vector tangente a X en a . Sea $f \in \mathcal{I}(X)$, hay que probar que el polinomio $g(t) = f(a + t\vec{v}_{\theta})$ tiene un cero de multiplicidad ≥ 2 en $t = 0$. Claramente $g(0) = f(a) = 0$. Derivando con respecto a t , obtenemos $g'(t) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a + t\vec{v}_{\theta}) \theta(x_i - a_i)$, así que $g'(0) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) \theta(x_i - a_i) = \theta(\sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i)) = \theta(f) = 0$, ya que $\sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i)$ es justamente la componente de grado 1 de f , y por tanto la diferencia $f - \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i)$ está en $\bar{\mathfrak{m}}_a^2$.

Si aplicamos $\partial_{\vec{v}}$ a $x_i - a_i$, obtenemos la derivada en $t = 0$ de $(a_i + tv_i) - a_i = tv_i$, que es v_i . Por tanto componiendo las aplicaciones $\vec{v} \mapsto \partial_{\vec{v}}$ y $\theta \mapsto \vec{v}_{\theta}$ obtenemos la identidad.

Veamos la composición en el otro sentido: dada θ , hay que probar que $\partial_{\vec{v}_{\theta}} = \theta$. Como $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ generan $\bar{\mathfrak{m}}_a/\bar{\mathfrak{m}}_a^2$ como k -espacio vectorial, basta probar que sus valores coinciden en estos elementos. Como hemos visto antes, $\partial_{\vec{v}}(x_i - a_i)$ es la i -ésima coordenada de $\vec{v}$ para todo $\vec{v}$. Por tanto, $\partial_{\vec{v}_{\theta}}(x_i - a_i)$ es la i -ésima coordenada de $\vec{v}_{\theta}$, que por definición es $\theta(x_i - a_i)$. $\square$

Corolario 5.5. *El espacio tangente a una variedad en un punto es un invariante local: si $\mathcal{O}_{X,a} \cong \mathcal{O}_{Y,b}$ para dos variedades afines X, Y y dos puntos $a \in X$ y $b \in Y$, entonces los espacios tangentes a X en a y a Y en b son isomorfos.*

Esto nos permite definir el espacio tangente a cualquier variedad cuasi-proyectiva X en un punto a : basta tomar un abierto afín $Z \subseteq X$ que contenga a a , y definir el espacio tangente a X en a como el espacio tangente a Z en a .

Proposición 5.6. *Sea X una variedad cuasi-proyectiva y $a \in X$. Entonces $\dim_k T_{X,a} \geq \dim X$.*

Demostración. Sea $Z \subseteq X$ un abierto afín que contenga al punto a . Como $\mathcal{O}_{X,a}$ es el localizado de $\mathcal{A}(Z)$ en un ideal maximal, se tiene que $\dim \mathcal{O}_{X,a} = \dim \mathcal{A}(Z) = \dim Z = \dim X$. El resultado se deduce entonces de [AM, corolario 11.15]. $\square$

5.2. Puntos singulares

Definición 5.7. *Sea X una variedad cuasi-proyectiva y $a \in X$. Se dice que a es un punto **regular** de X (o que X es regular en a) si $\dim_k T_{X,a} = \dim X$. En caso contrario, se dice que a es un punto **singular** de X (o que X es singular en a).*

En otras palabras, el punto $a \in X$ es regular si y sólo si el anillo local $\mathcal{O}_{X,a}$ es regular [AM, Capítulo 11].

Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, y $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Un vector $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es tangente a X en a si y sólo si los polinomios $f_1(a + t\vec{v}), \dots, f_r(a + t\vec{v})$ tienen un cero doble en $t = 0$. Es decir, sus derivadas se anulan para $t = 0$. Derivando por la regla de la cadena y sustituyendo $t = 0$, obtenemos que $(v_1, \dots, v_n)$ es tangente a X en a si y sólo si se verifican las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1(a) v_1 + \dots + \partial_n f_1(a) v_n &= 0 \\ &\vdots \\ \partial_1 f_r(a) v_1 + \dots + \partial_n f_r(a) v_n &= 0 \end{aligned}$$

La dimensión del espacio tangente será entonces la dimensión de el espacio de soluciones de dicho sistema, es decir, n menos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_r(a) & \cdots & \partial_n f_r(a) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

El conjunto de puntos singulares de X es el conjunto de puntos de X en los que esta matriz tiene rango $< n - \dim(X)$. En particular, si $X = \mathcal{V}(f)$ es una hipersuperficie, el conjunto de puntos singulares de X viene dado por las ecuaciones $f(x) = \partial_1 f(x) = \dots = \partial_n f(x) = 0$.

Proposición 5.8. *Para todo entero m , el conjunto Z_m de puntos $a \in X$ tales que $\dim_k T_{X,a} \geq m$ es un cerrado.*

Demostración. Como toda variedad cuasi-proyectiva tiene un recubrimiento abierto afín y la propiedad de ser cerrado es local, podemos suponer que X es afín. Entonces el conjunto de puntos $a \in X$ en los que $\dim_k T_{X,a} \geq m$ es el conjunto de puntos en los que el rango de la matriz 5.1 es $\leq n - m$. Es decir, el conjunto de puntos en los que todos los menores de la matriz de orden $> n - m$ se anulan. Esto nos da un conjunto de polinomios que definen Z_m . $\square$

Corolario 5.9. *El conjunto de puntos regulares de una variedad cuasi-proyectiva es abierto.*

Demostración. Su complementario es el cerrado Z_{d+1} , donde $d = \dim X$. $\square$

Proposición 5.10. *El conjunto de puntos regulares de una variedad cuasi-proyectiva X es no vacío.*

Demostración. De nuevo podemos suponer que X es afín. Consideremos primero el caso en que $X = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es una hipersuperficie (de dimensión $n - 1$), donde $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio irreducible. El conjunto de puntos singulares es entonces $\mathcal{V}(f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f)$. Si fuera el total, tendríamos entonces que cada $\partial_i f$ sería múltiplo de f . Como el grado de $\partial_i f$ es menor que el de f , eso sólo es posible si $\partial_i f = 0$ para todo i . En característica 0 esto significa que f es constante. En característica $p > 0$, sólo puede pasar si cada variable aparece elevada a p en f . Entonces f sería una potencia p -ésima, y por tanto no sería irreducible.

En el caso general, X es birracionalmente equivalente a una hipersuperficie por el corolario 2.22. En particular, tienen abiertos isomorfos, que podemos suponer afines. Por el caso anterior, el conjunto de puntos regulares en la hipersuperficie es un abierto no vacío, y entonces los puntos correspondientes de X son también regulares. $\square$

Se puede probar que un anillo local regular es íntegramente cerrado. Por tanto, todo punto regular en una variedad es normal. El recíproco no es cierto en general (ejercicio 5.9). En particular, en toda variedad existe un abierto denso de puntos normales.

5.3. Explosiones

Definición 5.11. *La explosión de $\mathbb{A}_k^n$ con centro $O = (0, \dots, 0)$ es el morfismo $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^n$, donde $X \subseteq \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ es el conjunto algebraico definido por las ecuaciones (con coordenadas $x_1, \dots, x_n$ para $\mathbb{A}_k^n$ e $y_1, \dots, y_n$ para $\mathbb{P}_k^{n-1}$) $x_i y_j - x_j y_i = 0$ para $1 \leq i, j \leq n$, y $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ es la restricción a X de la proyección $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1} \rightarrow \mathbb{A}_k^n$.*

Es decir, X es el conjunto de pares $((x_1, \dots, x_n), (y_1 : \dots : y_n))$ tales que existe un $\lambda \in k$ (que puede ser 0) tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo i . Veamos la estructura de ϕ con más detalle.

Proposición 5.12. *La explosión $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ de $\mathbb{A}_k^n$ con centro $O = (0, \dots, 0)$ es un morfismo proyectivo sobreyectivo, e induce un isomorfismo $\phi : \phi^{-1}(U) \rightarrow U$, donde $U = \mathbb{A}_k^n - \{O\}$. La imagen inversa de O es $\{O\} \times \mathbb{P}_k^{n-1}$.*

Demostración. La última afirmación es evidente, ya que $\{O\} \times \mathbb{P}_k^{n-1} \subseteq X$. Veamos que $\phi : \phi^{-1}(U) \rightarrow U$ es un isomorfismo, construyendo su inversa: dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, sea $\psi(x) = ((x_1, \dots, x_n), (x_1 : \dots : x_n))$. $\psi(x)$ está bien definido, porque $x \neq O$, y está en X . Como ϕ es la proyección sobre $\mathbb{A}_k^n$, está claro que $\phi \circ \psi$ es la identidad. Por otro lado, dado $z = ((x_1, \dots, x_n), (y_1 : \dots : y_n)) \in X$ se tiene que $(\psi \circ \phi)(z) = ((x_1, \dots, x_n), (x_1 : \dots : x_n)) = z$, ya que $(x_1 : \dots : x_n) = (y_1 : \dots : y_n)$ por definición de X .

El morfismo ϕ es proyectivo por definición, ya que es composición de una inmersión cerrada seguida de la proyección $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1} \rightarrow \mathbb{A}_k^n$. Por tanto es cerrado por la proposición 4.12. Como su imagen es un cerrado que contiene al abierto denso U , debe ser el total. $\square$

Podemos considerar que la explosión “separa” las direcciones de rectas que pasan por O : por cada dirección (correspondiente a un punto del espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^{n-1}$) obtenemos un punto en la imagen inversa de O en X .

Sea ahora $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico tal que $O \in Z$, y $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ la explosión de $\mathbb{A}_k^n$ con centro O . La imagen inversa de Z por ϕ es la unión de, por un lado, $\phi^{-1}(Z - \{O\})$, que por la proposición anterior es isomorfo a $Z - \{O\}$, y por otro lado $E := \phi^{-1}(O) = \{O\} \times \mathbb{P}_k^{n-1}$.

Definición 5.13. La explosión de Z con centro O es el morfismo $\phi : Y \rightarrow Z$, donde Y es el cerrado $\overline{\phi^{-1}(Z - \{O\})} \subseteq X$ y ϕ es la restricción de $\phi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^n$.

Es decir, Y es la unión de las componentes irreducibles de $\phi^{-1}(Z)$ no contenidas en E .

Proposición 5.14. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad afín con $O \in Z$. La explosión de Z en O es un morfismo birracional.

Demostración. $\phi : Y \rightarrow Z$ induce un isomorfismo entre los abiertos $\phi^{-1}(Z - \{O\})$ de Y y $Z - \{O\}$ de Z , y por tanto es birracional por la proposición 3.38. $\square$

Si $P \in Z$ es ahora un punto arbitrario, se define la explosión de Z en P como $\phi = \tau \circ \phi_0 : Y \rightarrow Z$, donde $\tau : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ es la traslación de vector $\overrightarrow{OP}$ y $\phi_0 : Y \rightarrow \tau^{-1}(Z)$ es la explosión de $\tau^{-1}(Z)$ en O .

5.4. Resolución de singularidades

A partir de ahora nos centraremos en el caso de las curvas en $\mathbb{A}_k^2$. Sea $Z = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva que pase por $O = (0, 0)$, donde $f \in k[x, y]$ es un polinomio reducido sin término independiente. Sea $\phi : Y \rightarrow Z$ la explosión de Z en O .

Llamaremos x, y a las coordenadas en $\mathbb{A}_k^2$ y u, v a las coordenadas en $\mathbb{P}_k^1$. La explosión X de $\mathbb{A}_k^2$ en O está definida en $\mathbb{A}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1$ por la ecuación $xv - yu = 0$. La imagen inversa de Z está entonces definida por las ecuaciones $xv - yu = f(x, y) = 0$. Como $\mathbb{P}_k^1$ se descompone como unión de las rectas afines $U = \{v \neq 0\} \cong \mathbb{A}_k^1$ y $V = \{u \neq 0\} \cong \mathbb{A}_k^1$, $\phi^{-1}(Z)$ se descompone como unión de dos abiertos afines. En U podemos suponer $v = 1$, y entonces $\phi^{-1}(Z)$ está definida por las ecuaciones $x = yu$, $f(x, y) = 0$ en $\mathbb{A}_k^2 \times U \cong \mathbb{A}_k^3$. Eliminando la variable x , este conjunto es isomorfo al definido en $\mathbb{A}_k^2$ (con coordenadas y, u) por la ecuación $f(yu, y) = 0$. Tiene a la recta $y = 0$ como componente irreducible, que está contenida en $\phi^{-1}(O)$ (ya que $x = yu = 0$ también). La parte que nos interesa es la unión de

las otras componentes irreducibles, es decir, el conjunto de ceros del polinomio $g(y, u)$ obtenido al dividir $f(y, yu)$ por la mayor potencia posible de y . En el abierto V podemos poner $u = 1$, y entonces $y = xu$. En este abierto $\phi^{-1}(Z)$ está definida en $\mathbb{A}_k^2$ (con coordenadas x, v) por la ecuación $f(x, xv) = 0$, y para eliminar la componente $x = 0$ debemos dividir $f(x, xv)$ por la mayor potencia posible de x .

Proposición 5.15. *Supongamos que $O \in Z$ es un punto regular. Entonces $\phi : Y \rightarrow Z$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sabemos que $\phi : \phi^{-1}(Z - \{O\}) \rightarrow Z - \{O\}$ es siempre un isomorfismo. Basta ver entonces que ϕ induce un isomorfismo $\phi^{-1}(W) \rightarrow W$, donde $W \subseteq Z$ es un entorno de O .

Como O es un punto regular, el polinomio $f(x, y)$ tiene término lineal no nulo. Supongamos que el coeficiente de x es $\neq 0$ (el caso en el que el coeficiente de y es $\neq 0$ es similar). Sea $\psi : Z \dashrightarrow U$ la aplicación racional dada por $\psi(x, y) = (x/y, y)$. Como la explosión ϕ está definida en U como $\phi(u, y) = (uy, y)$, está claro que ψ es inversa de ϕ como aplicación racional. Veamos que ψ está definida en un entorno de O , y por tanto será una inversa de ϕ como morfismo.

Como el coeficiente de x en $f(x, y)$ es no nulo, podemos escribir $f(x, y) = xg(x) + yh(x, y)$, donde $g(x)$ es un polinomio con término constante no nulo. Entonces en Z tenemos que $xg(x) + yh(x, y) = 0$, y por tanto $x/y = -h(x, y)/g(x)$, que está definida en un entorno de O en Z por ser $g(O) \neq 0$. $\square$

Teorema 5.16. (Resolución de singularidades). *Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva. Entonces existe una sucesión finita $Z_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Z_1 \rightarrow Z$ de explosiones con centros en puntos singulares tal que Z_n no tiene puntos singulares.*

Ejemplos 5.17. Sea $Z = \mathcal{V}(y^2 - x^3 - x^2)$. La curva Z tiene un único punto singular en $O = (0, 0)$. Tomando la explosión con centro en O , obtenemos una curva $Z_1 \rightarrow Z$. Calculemos los puntos singulares de Z_1 . Como hemos visto antes, Z_1 tiene un recubrimiento compuesto de dos abiertos afines. En el primero, la ecuación de Z_1 (con coordenadas (u, y)) se obtiene haciendo el cambio de variable $(x, y) \mapsto (uy, y)$ y eliminando los factores y . Haciendo el cambio de variable obtenemos $y^2 - u^3y^3 - u^2y^2 = 0$, y dividiendo por y^2 , $1 - yu^3 - u^2 = 0$. Vemos que la imagen inversa de $(0, 0)$ contiene dos puntos: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ (correspondiendo a las dos rectas tangentes a Z en $(0, 0)$). Se comprueba fácilmente que en este abierto Z_1 no tiene puntos singulares.

En el otro abierto debemos hacer el cambio de variable $(x, y) \mapsto (x, vx)$, y obtenemos $x^2v^2 - x^3 - x^2 = 0$. Dividiendo por x^2 , la ecuación de Z_1 es $v^2 - x - 1 = 0$. De nuevo obtenemos dos puntos cuya imagen es $(0, 0)$, que se corresponden con los dos puntos obtenidos en el otro abierto. En este abierto tampoco hay puntos singulares, como se ve fácilmente tomando la derivada con respecto a x .

Por tanto, con una única explosión conseguimos desingularizar la curva Z .

5.5. Ejercicios adicionales

Ejercicio 5.2. *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo de variedades afines, $a \in X$ y $b = \phi(a) \in Y$.*

1. Probar que ϕ induce un homomorfismo natural $d\phi : T_{X,a} \rightarrow T_{Y,b}$, que llamaremos la **diferencial** de ϕ .
2. Probar que, si $\psi : Y \rightarrow Z$ es otro morfismo y $c = \psi(b)$, entonces $d(\psi \circ \phi) = (d\psi) \circ (d\phi)$.
3. Concluir que dos variedades isomorfas tienen espacios tangentes isomorfos en los puntos correspondientes.

Ejercicio 5.3. Sea $X = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una hipersuperficie proyectiva, donde $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ es un polinomio homogéneo irreducible. Probar que el punto $a \in X$ es singular si y sólo si $\partial_i f(a) = 0$ para todo $i = 0, \dots, n$.

Ejercicio 5.4. Hallar los puntos singulares de la superficie definida por $x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_2^2 + x_0^2 x_1^2 - x_0 x_1 x_2 x_3 = 0$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

Ejercicio 5.5. [S, Ej. II.1.16] Determinar para qué valores de a la hipersuperficie definida por $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - a x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ tiene puntos singulares, y hallar dichos puntos.

Ejercicio 5.6. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva que contenga y sea regular en $O = (0, 0)$, y $\phi : Y \rightarrow Z$ la explosión de Z en O . Probar que $\phi^{-1}(O) = \{((0, 0), (a : b))\}$, donde $(a, b) \in k^2$ es un vector que genera el espacio tangente a Z en O .

Ejercicio 5.7. Sea $Z = \mathcal{V}(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Hallar una sucesión de explosiones $Z_n \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow Z$ tal que Z_n no tenga singularidades, y calcular la imagen inversa de $(0, 0)$ en Z_n .

Ejercicio 5.8. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva de grado 3 con un punto singular P . Probar que toda recta que pase por P corta a Z como máximo en un punto más. Usar este hecho para probar que Z es racional (ver ejercicio 2.11).

Ejercicio 5.9. Sea $Z \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ la variedad dada por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Probar que el punto $(0, 0, 0) \in Z$ es normal, pero no regular. (Ayuda: Todo elemento de $\mathcal{K}(Z)$ se puede escribir como $f(x, y) + g(x, y)z$, con f, g funciones racionales en $k(x, y)$.)

Tema 6

Multiplicidad y grado

6.1. El polinomio de Hilbert de una variedad proyectiva

Empezamos definiendo el análogo al anillo de coordenadas para una variedad proyectiva.

Definición 6.1. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un conjunto algebraico proyectivo. El **anillo de coordenadas homogéneo** de X es el anillo cociente $\mathcal{S}(X) := k[x_0, x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$.

Como $\mathcal{I}(X)$ es un ideal homogéneo, la graduación natural de $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ como suma directa de los subespacios $k[x_0, x_1, \dots, x_n]_r$ formados por los polinomios homogéneos de grado r para todo $r \geq 0$ induce una descomposición $\mathcal{I}(X) = \bigoplus_r \mathcal{I}(X)_r$ (donde $\mathcal{I}(X)_r = \mathcal{I}(X) \cap k[x_0, x_1, \dots, x_n]_r$) y por tanto una graduación en $\mathcal{S}(X)$:

$$\mathcal{S}(X) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{S}_r(X)$$

donde $\mathcal{S}_r(X) = k[x_0, x_1, \dots, x_n]_r / \mathcal{I}(X)_r$ como k -espacio vectorial.

Ejercicio 6.1. Probar que se tiene dicha descomposición para $\mathcal{S}(X)$.

Para todo $r \geq 0$, $\mathcal{S}_r(X)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, por ser un cociente de $k[x_0, x_1, \dots, x_n]_r$, que tiene dimensión $\binom{n+r}{n}$.

Definición 6.2. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un conjunto algebraico proyectivo. La **función de Hilbert** de X es la función $\varphi_X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$\varphi_X(r) = \dim_k \mathcal{S}_r(X).$$

Ejemplos 6.3.

1. La función de Hilbert de $\mathbb{P}_k^n$ viene dada por

$$\varphi_{\mathbb{P}_k^n}(r) = \binom{r+n}{n} = \frac{1}{n!} (r+1)(r+2) \cdots (r+n)$$

2. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^1$ un conjunto finito formado por d puntos. Entonces $\mathcal{I}(X)$ está generado por un polinomio homogéneo reducido $f(x_0, x_1)$ de grado d . Para cada $r \geq 0$, $\mathcal{I}(X)_r$ sólo contiene al 0 si $r < d$, y tiene dimensión $r - d + 1$ si $r \geq d$ (ya que la aplicación lineal $k[x_0, x_1]_{r-d} \rightarrow \mathcal{I}(X)_r$ dada por $g \mapsto fg$ es un isomorfismo de espacios vectoriales). Por tanto $\mathcal{S}(X)_r$ tiene dimensión $r + 1$ si $r < d$ y $r + 1 - (r - d + 1) = d$ si $r \geq d$:

$$\varphi_X(r) = \begin{cases} r + 1 & \text{si } r < d \\ d & \text{si } r \geq d. \end{cases}$$

Nuestro próximo objetivo es probar que la función de Hilbert coincide con un polinomio para valores grandes de la variable.

Proposición 6.4. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un conjunto algebraico proyectivo no vacío. Existen un entero r_0 y un polinomio $P_X \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $\varphi_X(r) = P_X(r)$ para todo $r \geq r_0$. Además, el grado de P_X es la dimensión de X .*

Demostración. Sea $I = \mathcal{I}(X)$, es un ideal homogéneo propio de $A := k[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Hay que probar que la función $\varphi_{\mathcal{I}(X)}(r) = \varphi_X(r) = \dim_k A_r/I_r$ coincide con un polinomio de grado $\dim X = \dim \mathcal{V}(I)$ para $r \geq r_0$. Lo probaremos en general para un ideal homogéneo arbitrario $I \subseteq A$ tal que $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$ (es decir, tal que $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \not\subseteq \sqrt{I}$).

La prueba se hará por inducción en n . Para $n = 0$, I debe ser el ideal $\{0\}$. Entonces $k[x_0]/I = k[x_0]$, y $k[x_0]_r$ está generado por x_0^r como espacio vectorial. La función de Hilbert en este caso es la constante 1, y coincide con el polinomio 1 de grado $0 = \dim(X)$ para $r \geq 0$.

Supongámoslo probado para $n - 1$ variables, con $n \geq 1$. Elijamos un polinomio lineal $H(x_0, x_1, \dots, x_n) \in A_1$ que no esté en ningún primo asociado a I (ver [AM, Capítulo 4]). Si $I = \mathcal{I}(X)$, esto significa simplemente que ninguna componente irreducible de X está contenida en el hiperplano definido por H . Mediante un cambio lineal de variables, podemos suponer que $H = x_n$. La multiplicación por x_n es un homomorfismo inyectivo $A/I \rightarrow A/I$ por [AM, Proposición 4.7], ya que x_n no está en la unión de los primos asociados a I . El conúcleo es $(A/I)/x_n \cdot (A/I) = A/(\langle x_n \rangle + I) \cong B/J$, donde $B = k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ y $J = (\langle x_n \rangle + I) \cap B$. Obtenemos así una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A/I \xrightarrow{x_n} A/I \rightarrow B/J \rightarrow 0.$$

Tomando las componentes homogéneas de grado r y teniendo en cuenta que multiplicar por x_n aumenta en 1 el grado, deducimos que $\varphi_I(r) - \varphi_I(r - 1) = \varphi_J(r)$ para todo r .

Supongamos en primer lugar que $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle_B \subseteq \sqrt{J}$. Entonces J (y por consiguiente $\langle x_n \rangle + I$) contiene una potencia de x_i para todo $i = 0, \dots, n - 1$, así que $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle_A \subseteq \sqrt{\langle x_n \rangle + I}$. Equivalentemente, $\mathcal{V}(\langle x_n \rangle + I) = \mathcal{V}(x_n) \cap \mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Como un punto de $\mathbb{P}_k^n$ no puede tener todas sus coordenadas nulas, concluimos que $\mathcal{V}(x_n) \cap \mathcal{V}(I) = \emptyset$. Una variedad proyectiva de dimensión > 0 corta a cualquier hiperplano (de lo contrario, sería isomorfa a una variedad afín, en contradicción con el corolario 4.16). Por tanto toda componente irreducible de $\mathcal{V}(I)$ debe tener dimensión 0.

Por otra parte, B/J es un $k[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ -módulo finitamente generado que es anulado por una potencia de x_i para todo $i = 0, \dots, n - 1$. En particular

es un k -espacio vectorial de dimensión finita, y por tanto $\varphi_J(r)$ sólo puede ser positivo para un número finito de r . Existe entonces un r_0 tal que $\varphi_J(r) = 0$ para $r \geq r_0$, y por tanto $\varphi_I(r) - \varphi_I(r-1) = 0$ para $r \geq r_0$. Así que $\varphi_I(r)$ es constante para $r \geq r_0$, y coincide con un polinomio de grado $0 = \dim \mathcal{V}(I)$.

Supongamos ahora que $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle_B \not\subseteq \sqrt{J}$. Por hipótesis de inducción, $\varphi_J(r)$ coincide con un polinomio $P_J \in \mathbb{Q}[t]$ para todo r suficientemente grande. Además, el grado de P_J es la dimensión de $\mathcal{V}(J)$ en $\mathbb{P}_k^{n-1}$ o, equivalentemente, la dimensión de $\mathcal{V}(\langle x_n \rangle + I) = \mathcal{V}(x_n) \cap \mathcal{V}(I)$ en $\mathbb{P}_k^n$. Por hipótesis, ninguna componente irreducible de $\mathcal{V}(I)$ está contenida en la hipersuperficie $x_n = 0$, así que $\dim(\mathcal{V}(x_n) \cap \mathcal{V}(I)) = \dim \mathcal{V}(I) - 1$ por el ejercicio 3.26. Por tanto el grado de P_J es $\dim \mathcal{V}(I) - 1$. Concluimos por el lema siguiente y su corolario. $\square$

Lema 6.5. *Sea $P \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio de grado d tal que $P(r) \in \mathbb{Z}$ para todo $r \in \mathbb{Z}$ mayor o igual que un r_0 fijo. Entonces existen enteros $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$P(r) = a_d \binom{r}{d} + a_{d-1} \binom{r}{d-1} + \dots + a_1 \binom{r}{1} + a_0.$$

Demostración. Por inducción en d . Para $d = 0$ el resultado es evidente. Supongámoslo probado para $d-1 \geq 0$, y sea $P \in \mathbb{Q}[t]$ de grado d cumpliendo la hipótesis. Entonces $Q(t) := P(t+1) - P(t)$ también verifica la hipótesis y tiene grado $d-1$, por tanto existen $b_0, \dots, b_{d-1} \in \mathbb{Z}$ tales que

$$P(r+1) - P(r) = b_{d-1} \binom{r}{d-1} + \dots + b_1 \binom{r}{1} + b_0.$$

Sea

$$R(r) = b_{d-1} \binom{r}{d} + \dots + b_1 \binom{r}{2} + b_0 \binom{r}{1},$$

entonces $R(j+1) - R(j) = P(j+1) - P(j)$ para todo j . Sumando desde $j = 0$ hasta $r-1$, obtenemos $R(r) - R(0) = P(r) - P(0)$, es decir, $P(r) = R(r) + (P(0) - R(0))$. Basta entonces tomar $a_j = b_{j-1}$ para $j = 1, \dots, d$ y $a_0 = P(0) - R(0)$. $\square$

Corolario 6.6. *Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que existen un entero r_0 y un polinomio $Q \in \mathbb{Q}[t]$ de grado $d-1 \geq 0$ con $f(r) - f(r-1) = Q(r)$ para todo $r \geq r_0$. Entonces existe un polinomio $P \in \mathbb{Q}[t]$ de grado d tal que $f(r) = P(r)$ para $r > r_0$.*

Demostración. Por el lema, existen $c_0, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f(r) - f(r-1) = c_{d-1} \binom{r}{d-1} + \dots + c_1 \binom{r}{1} + c_0$$

para $r \geq r_0$. Sea $R(r) = c_{d-1} \binom{r}{d} + \dots + c_1 \binom{r}{2} + c_0 \binom{r}{1}$, entonces $R(j) - R(j-1) = f(j) - f(j-1)$ para $j \geq r_0$. Sumando desde $j = r_0 + 1$ hasta r , obtenemos $R(r) - R(r_0) = f(r) - f(r_0)$ para $r > r_0$. Es decir, $f(r)$ coincide con el polinomio $P(r) := R(r) + (f(r_0) - R(r_0))$ para $r > r_0$. $\square$

Definición 6.7. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un conjunto algebraico. El **polinomio de Hilbert** de X es el único polinomio $P_X \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $\varphi_X(r) = P_X(r)$ para todo r mayor o igual que un cierto r_0 . Más generalmente, dado un ideal homogéneo $I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ tal que $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$, su **polinomio de Hilbert** es el único polinomio $P_I \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $\varphi_I(r) = P_I(r)$ para todo r mayor o igual que un cierto r_0 .

6.2. El grado de una variedad proyectiva

Definición 6.8. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un conjunto algebraico de dimensión d , y P_X su polinomio de Hilbert. El **grado** de X es $d!$ multiplicado por el coeficiente del término de mayor grado de P_X .

Ejemplos 6.9.

1. Sea $X = \mathbb{P}_k^n$. Por 6.3, el polinomio de Hilbert de X es $\frac{1}{n!}(r+1)(r+2)\cdots(r+n)$. Su término de mayor grado es $\frac{r^n}{n!}$, y por tanto su grado es $\frac{n!}{n!} = 1$.
2. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^1$ un conjunto finito formado por d puntos. Por 6.3, su polinomio de Hilbert es la constante d . Por tanto, su grado es $0!d = d$.

Proposición 6.10. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un conjunto algebraico proyectivo de grado d y $H = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo de grado e que no contenga a ninguna componente irreducible de X . Supongamos que el ideal $\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle$ es radical. Entonces el grado de $X \cap H$ es igual a de .

Demostración. Como $\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle$ es radical, $\mathcal{I}(X \cap H) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle)) = \mathcal{I}(X) + \langle f \rangle$. Al igual que en la prueba de la proposición 6.4, como H no contiene ninguna componente irreducible de X la multiplicación por f es un homomorfismo inyectivo $A/\mathcal{I}(X) \rightarrow A/\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle$ por [AM, Proposición 4.7]. Obtenemos así una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A/\mathcal{I}(X) \xrightarrow{f} A/\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle \rightarrow A/(\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle) = A/\mathcal{I}(X \cap H) \rightarrow 0.$$

Comparando las componentes homogéneas de grado r y teniendo en cuenta que la multiplicación por f aumenta el grado en e , concluimos que $\varphi_{X \cap H}(r) = \varphi_X(r) - \varphi_X(r - e)$ para $r \geq e$. Por tanto $P_{X \cap H}(r) = P_X(r) - P_X(r - e)$. Si $m = \dim(X)$, el término de mayor grado de $P_X(r)$ es $d \frac{r^m}{m!}$, así que el término de mayor grado de $P_{X \cap H}(r) = P_X(r) - P_X(r - e)$ es $\frac{dmr^{m-1}e}{m!} = de \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}$. El grado de $X \cap H$ es entonces de por definición. $\square$

Ejemplos 6.11. La hipótesis de que $\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle$ sea radical es fundamental: sea $X = \mathcal{V}(x_0x_1 - x_2^2) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, y $H = \mathcal{V}(x_0)$. Entonces X tiene grado 2 (ejercicio 6.3) pero $X \cap H = \{(0 : 1 : 0)\}$ tiene grado 1. En este caso, $\mathcal{I}(X) + \langle x_0 \rangle = \langle x_0, x_2^2 \rangle$ no es radical.

En general, es necesario considerar no sólo el grado de $X \cap H$, sino también la *multiplicidad* de cada una de sus componentes irreducibles. En estas notas nos limitaremos al caso de multiplicidad 1 (es decir, $\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle$ radical).

El conjunto de hiperplanos en $\mathbb{P}_k^n$ puede dotarse de una estructura de espacio proyectivo (el espacio dual de $\mathbb{P}_k^n$). Se puede probar que, si X es una variedad, el conjunto de hiperplanos $H = \mathcal{V}(f)$ tales que $X \not\subseteq H$, $\mathcal{I}(X) + \langle f \rangle$ es radical y (si $m \geq 2$) $X \cap H$ es irreducible contiene un abierto denso en dicho espacio proyectivo. Supongamos que X tiene dimensión m y grado d . Repitiendo el proceso m veces, deducimos que para la “mayoría” (en un cierto sentido que no definiremos aquí) de subvariedades lineales $L = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ de $\mathbb{P}_k^n$ de dimensión $n - m$, $X \cap L$ tiene dimensión 0 (es decir, es un conjunto finito de puntos) y ideal $\mathcal{I}(X) + \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ es radical. Por la proposición 6.10 tenemos entonces que el grado de $X \cap L$ es d , y por tanto es un conjunto de d puntos (ejercicio 6.6).

Vemos así que el grado de una variedad $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ de dimensión m es el número de puntos de intersección de X con una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_k^n$ de dimensión $n - m$ suficientemente general.

6.3. Multiplicidad de intersección. El teorema de Bézout

Sean $X = \mathcal{V}(f)$ e $Y = \mathcal{V}(g)$ dos curvas en $\mathbb{P}_k^2$, donde $f, g \in k[x_0, x_1, x_2]$ son polinomios homogéneos irreducibles. Por el ejercicio 3.27, su intersección $X \cap Y$ es no vacía.

Definición 6.12. Se dice que X e Y están en **posición general** si su intersección tiene dimensión 0 (es decir, es un conjunto finito de puntos).

Ejercicio 6.2. Probar que dos curvas están en posición general si y sólo si no tienen ninguna componente irreducible en común.

Sea $a \in X \cap Y$. Si el grado de f es d , dado cualquier $h \in k[x_0, x_1, x_2]$ homogéneo de grado d que no se anule en a la función racional f/h está definida en a , y por tanto pertenece a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, a}$. Además, el ideal generado por f/h en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, a}$ sólo depende de f , ya que si elegimos otro h' homogéneo de grado d que no se anule en a , las funciones f/h y f/h' difieren en una unidad. Por abuso de lenguaje, lo llamaremos simplemente el ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, a}$ generado por f . El anillo local de $X \cap Y$ en a es entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, a} / \langle f, g \rangle$. Como tiene dimensión 0, su ideal maximal es nilpotente [AM, Proposición 8.6] y por tanto es un k -espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 6.13. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ dos curvas en posición general y $a \in X \cap Y$. La **multiplicidad de intersección** de X e Y en a es la dimensión de $\mathcal{O}_{X \cap Y, a}$ como espacio vectorial sobre k .

Proposición 6.14. Sean $X = \mathcal{V}(f)$ e $Y = \mathcal{V}(g) \subseteq \mathbb{P}_k^2$ dos curvas en posición general, con $X \cap Y = \{P_1, \dots, P_r\}$. Sea μ_i la multiplicidad de intersección de X e Y en P_i para $i = 1, \dots, r$. El polinomio de Hilbert del ideal $I = \langle f, g \rangle$ (que es constante, ya que $\dim \mathcal{V}(I) = 0$) es $\mu_1 + \dots + \mu_r$.

Demostración. Sea H una recta que no contenga a ninguno de los puntos $P_1, \dots, P_r$. Mediante un cambio lineal de variables, podemos suponer que H es la recta $x_0 = 0$. Entonces todos los P_i están en $\mathbb{A}_k^2 \subseteq \mathbb{P}_k^2$. Es decir, el ideal

$\langle x_0, f, g \rangle$ define el conjunto vacío y por tanto su radical es $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$. En particular, este ideal contiene a todo polinomio homogéneo de grado mayor o igual que un cierto d_0 o, dicho de otra forma, $I_d + x_0 \cdot A_{d-1} = A_d$ para todo $d \geq d_0$, donde $A_d = k[x_0, x_1, x_2]_d$. Entonces el homomorfismo de espacios vectoriales $A_d/I_d \rightarrow A_{d+1}/I_{d+1}$ dado por la multiplicación por x_0 es sobreyectivo para $d \geq d_0$.

Por otra parte, sabemos que la dimensión de A_d/I_d es constante para d mayor o igual a un cierto d_1 , ya que el polinomio de Hilbert tiene grado 0. Por tanto, la multiplicación por x_0 induce un isomorfismo $A_d/I_d \rightarrow A_{d+1}/I_{d+1}$ para $d \geq \sup\{d_0, d_1\}$, y más generalmente la multiplicación por x_0^e induce un isomorfismo $A_d/I_d \rightarrow A_{d+e}/I_{d+e}$ para $e \geq 0$.

Sea $d \geq \sup\{d_0, d_1\}$, y sea $\phi : k[x_0, x_1, x_2]_d \rightarrow k[x_1, x_2]$ el homomorfismo de deshomogeneización que lleva un polinomio $f(x_0, x_1, x_2)$ homogéneo de grado d en $f(1, x_1, x_2)$. Como $\phi(I_d) \subseteq J$ (donde J es el deshomogeneizado de I), obtenemos un homomorfismo de k -espacios vectoriales

$$\phi : A_d/I_d \rightarrow k[x_1, x_2]/J.$$

Veamos que ϕ es inyectivo: dado $F \in A_d$ tal que su deshomogeneizado esté en J , debe existir un $e \geq 0$ tal que $x_0^e F \in I_{d+e}$ (ya que dos polinomios tienen el mismo deshomogeneizado si y sólo si uno se obtiene a partir del otro multiplicando por una potencia de x_0). Pero sabemos que la multiplicación por x_0^e induce un isomorfismo $A_d/I_d \rightarrow A_{d+e}/I_{d+e}$, en particular F debe estar en I_d .

Veamos ahora que ϕ es sobreyectivo para d suficientemente grande. Como $k[x_1, x_2]/J$ tiene dimensión finita, está generado como k -espacio vectorial por un número finito de polinomios. Si d es mayor que todos sus grados, cada uno de ellos será el deshomogeneizado de un polinomio homogéneo de grado d (multiplicando sus homogeneizados por la potencia conveniente de x_0). Por tanto ϕ es sobreyectiva para dicho d . Concluimos que la dimensión de A_d/I_d para d suficientemente grande (y en particular el polinomio de Hilbert de I_d) coincide con la dimensión de $k[x_1, x_2]/J$.

El cociente $k[x_1, x_2]/J$ es un anillo artiniiano, y por tanto es suma directa de sus localizados en los ideales maximales. En particular, su dimensión es la suma de las dimensiones, para cada $i = 1, \dots, r$, del localizado de $k[x_1, x_2]/J$ en P_i , es decir, del anillo local de $X \cap Y$ en P_i . Pero esta es la multiplicidad de intersección de X e Y en P_i por definición. $\square$

Teorema 6.15 (de Bézout). Sean X e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ dos curvas en posición general de grados d y e respectivamente. Entonces la suma de las multiplicidades de los puntos de intersección de X e Y es de.

Demostración. Sean $A = k[x_0, x_1, x_2]$, y f y g generadores de $\mathcal{I}(X)$ e $\mathcal{I}(Y)$ respectivamente (son ideales principales por la proposición 3.15 aplicada a sus componentes irreducibles). La multiplicación por g induce un homomorfismo inyectivo $A/\langle f \rangle \rightarrow A/\langle f, g \rangle$, ya que f y g no tienen factores comunes (de lo contrario X e Y tendrían una componente irreducible en común y no estarían en posición general). Obtenemos así una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A/\langle f \rangle \xrightarrow{g} A/\langle f, g \rangle \rightarrow 0.$$

Comparando las componentes homogéneas de grado r , deducimos que el polinomio de Hilbert de $\langle f, g \rangle$ es $P_X(r) - P_X(r - e)$, ya que multiplicar por g

aumenta el grado en e . Como P_X tiene grado 1 y su término de mayor grado es dr , concluimos que $P_{(f,g)}(r) = de$. Comparando con el resultado obtenido en la proposición anterior se obtiene que de es la suma de las multiplicidades de los puntos de intersección de X e Y . $\square$

El resultado es válido más generalmente en dimensión n , si consideramos n hipersuperficies $X_1, \dots, X_n$ en posición general (es decir, tales que su intersección tenga dimensión 0).

6.4. Ejercicios adicionales

Ejercicio 6.3. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo irreducible de grado d . Calcular la función de Hilbert, el polinomio de Hilbert y el grado de X .

Ejercicio 6.4. Dar un ejemplo de dos variedades proyectivas isomorfas que tengan distinto grado. Por tanto, el grado no es un invariante intrínseco de la variedad, depende de cómo esté sumergida en el espacio proyectivo.

Ejercicio 6.5. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{P}_k^n$ dos conjuntos algebraicos de dimensión d tales que $X \cap Y$ tiene dimensión $< d$. Probar que el grado de $X \cup Y$ es la suma de los grados de X e Y .

Ejercicio 6.6. Probar que el grado de un conjunto finito $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ formado por d puntos es d . (Ayuda: Usar el ejercicio anterior.)

Ejercicio 6.7. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva. Probar que la dimensión de Krull de $\mathcal{S}(X)$ es $\dim(X) + 1$. (Ayuda: Considerar el cono afín de X .)

Ejercicio 6.8. Sean X e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ dos curvas y $x \in X \cap Y$. Probar que la multiplicidad de intersección de X e Y en x es 1 si y sólo si x es un punto regular de X y de Y y las rectas tangentes a X e Y en x son distintas.

Índice general

1. El espacio afín. Conjuntos algebraicos	3
1.1. Conjuntos algebraicos en el espacio afín	3
1.2. Conjuntos algebraicos e ideales	4
1.3. Funciones regulares	6
1.4. Variedades algebraicas afines	7
1.5. Dimensión de un conjunto algebraico	8
1.6. Funciones racionales	10
1.7. El anillo local de una variedad en un punto	11
1.8. Ejercicios adicionales	12
2. Morfismos entre variedades afines	15
2.1. Morfismos	15
2.2. Variedades cuasi-afines	16
2.3. Isomorfismos	18
2.4. Aplicaciones racionales	18
2.5. Variedades birracionalmente equivalentes	19
2.6. Ejercicios adicionales	20
3. Variedades en el espacio proyectivo	23
3.1. Conjuntos algebraicos proyectivos	23
3.2. Conjuntos algebraicos proyectivos e ideales homogéneos	24
3.3. Variedades proyectivas. Dimensión	25
3.4. Funciones regulares y racionales. Variedades cuasi-proyectivas	26
3.5. El recubrimiento afín de una variedad proyectiva	27
3.6. La inmersión del espacio afín en el espacio proyectivo	28
3.7. Morfismos entre variedades cuasi-proyectivas	30
3.8. Aplicaciones racionales entre variedades cuasi-proyectivas	32
3.9. Ejercicios adicionales	33
4. Propiedades de los morfismos	37
4.1. Producto de variedades	37
4.2. Inmersiones. Morfismos proyectivos	40
4.3. Morfismos finitos	41
4.4. Normalización	43
4.5. Ejercicios adicionales	45

5. Singularidades	47
5.1. El espacio tangente a una variedad en un punto	47
5.2. Puntos singulares	49
5.3. Explosiones	50
5.4. Resolución de singularidades	51
5.5. Ejercicios adicionales	52
6. Multiplicidad y grado	55
6.1. El polinomio de Hilbert	55
6.2. El grado de una variedad proyectiva	58
6.3. Multiplicidad de intersección	59
6.4. Ejercicios adicionales	61

Bibliografía

- [AC] L. Narváez Macarro, A. Rojas León. *Apuntes de Álgebra Conmutativa*.
<http://personal.us.es/arojas/files/notasAC.pdf>
- [AM] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. *Introducción al Álgebra Conmutativa*. Ed. Reverté.
- [H] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer.
- [S] I.R. Shafarevic. *Basic Algebraic Geometry I. Second Edition*. Springer-Verlag 1988.