

Geometría

Notas de Teoría

Juan González–Meneses y José M. Tornero

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

Curso 2007/08

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



El contenido de estas notas ha sido diseñado y redactado por el profesorado de la asignatura. Se permite su reproducción, única y exclusivamente para estudio *personal*. No se permite la copia indiscriminada, ni con fines lucrativos o diferentes del citado, de la totalidad o de parte de las presentes notas. © 2006.

Índice

1	Introducción a la geometría del plano	4
1.1	Introducción histórica: los axiomas de Euclides.	4
1.2	Triángulos. Área del triángulo.	5
1.3	Los teoremas de Pitágoras y Thales.	8
1.4	El seno y el coseno.	10
1.5	El teorema del coseno.	12
1.6	Elementos notables del triángulo (I).	14
1.7	Elementos notables del triángulo (II).	17
2	Espacio afín y proyectivo	20
2.1	Espacio afín.	20
2.2	Espacio proyectivo.	22
2.3	Variedades lineales (I).	24
2.4	Variedades lineales (II).	25
2.5	Variedades lineales (III).	27
2.6	Operaciones con variedades.	29
2.7	Dimensión. Teoremas de dimensión.	31
2.8	Sistemas de referencia (I).	33
2.9	Sistemas de referencia (II).	35
2.10	El espacio proyectivo dual.	37
2.11	El principio de dualidad: Teoremas de Pappus y Desargues.	39
3	Homografías y afinidades	44
3.1	Aplicaciones proyectivas (I).	44
3.2	Aplicaciones proyectivas (II): Homografías.	46
3.3	Puntos fijos de homografías.	47
3.4	Hiperplanos fijos de homografías.	49
3.5	Proyecciones, secciones, homologías.	51
3.6	Homologías planas.	52
3.7	Afinidades (I).	54
3.8	Afinidades (II): Dilataciones.	56
4	El espacio euclídeo	59
4.1	El espacio euclídeo.	59
4.2	Versión sintética del espacio euclídeo	61
4.3	Distancias (I): Perpendicular común.	63

4.4	Distancias (II): Hiperplano mediador.	64
4.5	Movimientos.	67
4.6	El teorema de Cartan–Dieudonné.	69
4.7	Movimientos y algunos conjuntos afines.	70
4.8	Movimientos del plano.	73
4.9	Movimientos del espacio (I).	76
4.10	Movimientos del espacio (II).	78
4.11	Semejanzas.	82
4.12	Semejanzas en el plano y en el espacio.	84
5	La geometría del triángulo	87
5.1	Elementos notables.	87
5.2	La circunferencia de los nueve puntos.	89

Tema 1

Introducción a la geometría del plano

1.1 Introducción histórica: los axiomas de Euclides.

La Geometría, que significa literalmente “medida de la tierra”, es una ciencia que nació precisamente como eso: una técnica para la medición de terrenos. Es famoso el caso de los Egipcios, que debían medir con exactitud las fincas inundadas por la crecida del Nilo. Pero fue en la antigua Grecia donde se desarrolló como disciplina, alcanzando su momento cumbre con la aparición de los *Elementos* de Euclides de Alejandría: Una obra de trece tomos, escrita hacia el año 300 a. C., donde Euclides recoge los conocimientos matemáticos “elementales” de su tiempo, y los desarrolla y perfecciona de tal manera, que es sin duda la obra más famosa e influyente de la historia de las Matemáticas.

De los trece tomos de los Elementos, nueve están dedicados a la Geometría, lo que pone de manifiesto la importancia de esta disciplina en el mundo antiguo. Una de las principales novedades de los Elementos es la axiomatización de la Geometría. Es decir, introduce primero unos conceptos básicos, como son los puntos, rectas, circunferencias, planos, y luego enuncia una serie de axiomas o postulados, que son propiedades de los objetos definidos antes, que son intuitivamente ciertos, y que se dejan sin demostrar. Estos axiomas son la base de toda la teoría, ya que cualquier otro resultado que se enuncie debe demostrarse a partir de los axiomas.

Escritos en lenguaje moderno, los cinco axiomas que propone Euclides en los Elementos son los siguientes:

Axioma I: Dos puntos determinan una sola recta.

Axioma II: Toda recta puede prolongarse indefinidamente.

Axioma III: Con cualquier centro y cualquier radio puede trazarse una circunferencia.

Axioma IV: Todos los ángulos rectos son iguales.

Axioma V: Por un punto exterior a una recta existe una sola paralela a la recta dada.

Observación.– En realidad el Axioma V de Euclides era el siguiente: “*Si una recta corta a otras dos rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos*”. Pero normalmente se sustituye por el Axioma V anterior, que es equivalente y mucho más conciso.

En realidad, estos cinco axiomas de Euclides son insuficientes para desarrollar todos los resultados geométricos, incluso aquellos contenidos en los Elementos, y por ello se

han ido modificando a lo largo del tiempo, tratando de obtener un número pequeño pero suficiente de axiomas independientes, en los que se base la Geometría. Posiblemente una de las propuestas más importantes, aunque también haya sido mejorada posteriormente, se debe a David Hilbert. En su obra "*Fundamentos de la Geometría*", de 1899, Hilbert propone 20 axiomas, agrupados de la siguiente manera: siete de pertenencia, cinco de orden, uno de paralelismo (Axioma V), seis de congruencia y uno de continuidad.

No entraremos aquí a enumerar los axiomas de Hilbert, ni sus sucesivas modificaciones. Supondremos conocidos los conceptos intuitivos de punto, recta, ángulo o distancia, y las nociones de pertenencia como "*un punto pertenece a una recta*", de orden como "*un segmento es el trozo de recta formado por los puntos que están entre dos puntos dados*", o de congruencia como "*dos segmentos tienen el mismo tamaño*" o "*dos ángulos son iguales*".

Así podemos definir, por ejemplo, una circunferencia como el conjunto de puntos que están a la misma distancia de uno dado, llamado centro. O un triángulo como un conjunto de tres puntos.

Los resultados que se obtienen a partir de estas nociones básicas determinan lo que se llama la *Geometría sintética*. Fue la única forma de Geometría que se conoció y utilizó durante muchos siglos, hasta que en el siglo XVII, principalmente por el trabajo de René Descartes, apareció la *Geometría analítica*, donde se estudian las propiedades de los objetos geométricos utilizando el Álgebra. En el siglo XVIII hubo mucha controversia sobre cuál de los dos puntos de vista era el adecuado. Aunque actualmente la eficacia de la Geometría Analítica ha desbancado casi por completo a la Geometría sintética, los resultados expuestos en este tema se verán utilizando exclusivamente la Geometría sintética, para que el alumno comprenda de qué se trata, admire la belleza de las demostraciones, y reconozca una parte de las Matemáticas que ha predominado durante más de veinte siglos.

1.2 Triángulos. Área del triángulo.

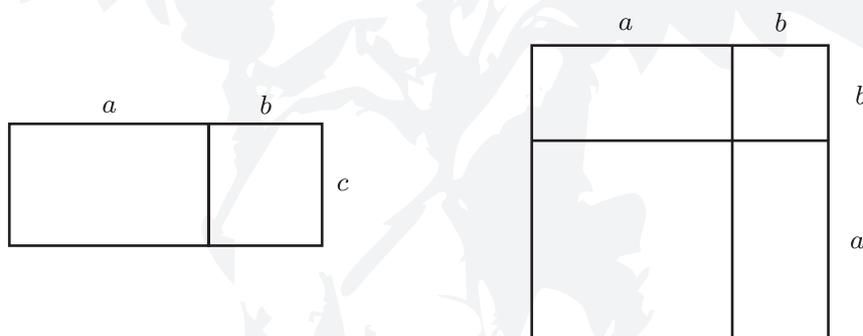
La Geometría que se estudia en los Elementos de Euclides, que es aquella de la que todo el mundo tiene una idea intuitiva, se ha dado en llamar *Geometría Euclídea*. Esto da una idea de la importancia de Euclides en la historia de las matemáticas. En este tema estudiaremos la Geometría Euclídea en el plano, donde los elementos básicos son los puntos y las rectas. De hecho, estudiaremos solamente una parte del primer libro de los Elementos, dedicado a los triángulos. Aunque usemos un lenguaje moderno, las demostraciones serán sintéticas, sin hacer ningún uso de coordenadas o ecuaciones (que veremos más adelante).

A partir de ahora denotaremos a los puntos del plano con letras mayúsculas, A, B, C, \dots . La recta que pasa por dos puntos A y B la denotaremos AB , y el segmento que une A y B se denotará \overline{AB} . A veces usaremos el nombre de un segmento para referirnos a su longitud, pero esto estará claro por el contexto. Por otra parte, los ángulos los denotaremos normalmente con letras griegas, aunque el ángulo que forma un segmento \overline{AB} con un segmento \overline{AC} lo denotaremos \widehat{BAC} (observemos que el punto central, A , es el vértice del ángulo). Si los puntos A, B y C están alineados y A se encuentra entre B y C , diremos que el ángulo \widehat{BAC} es llano y lo denotaremos π . Si los segmentos \overline{AB} y \overline{AC} son perpendiculares, diremos que el ángulo \widehat{BAC} es recto y lo denotaremos $\pi/2$.

Estudiaremos en esta sección el concepto intuitivo de área de un objeto geométrico en el plano. Más concretamente, nos centraremos en la región del plano delimitada por un rectángulo o un triángulo. A un rectángulo cuyos lados tengan longitudes respectivas a y b , le asociaremos una magnitud llamada área, que denotaremos ab (en analogía al producto de números reales). El área de un cuadrado de lado a , que hemos denotado aa , también se denotará a^2 (de hecho, esta magnitud se denomina *a al cuadrado* precisamente por este motivo).

La única propiedad del área que supondremos cierta es que se trata de una magnitud *aditiva*, es decir, que si una región es unión disjunta de dos regiones más pequeñas, entonces el área de la mayor es la suma del área de las dos pequeñas. Usando esta propiedad, es fácil ver mediante dibujos que las siguientes propiedades, bien conocidas para los números reales, se cumplen también en el contexto de las áreas de regiones del plano.

$$ab = ba, \quad (a + b)c = ac + bc, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Otro concepto que usaremos con cierta asiduidad es el de *proporción*. La proporción entre dos magnitudes a y b , que denotaremos a/b (por analogía a la razón o a la división de números reales), viene determinada por el hecho de que la proporción entre a y b es igual a la proporción entre c y d (es decir, $a/b = c/d$) si se tiene $ad = bc$, lo cual ya es una igualdad entre el área de dos rectángulos. Geométricamente, la igualdad $a/b = c/d$ significa que el rectángulo de lados a y b se puede transformar en el rectángulo de lados c y d mediante una amplificación o reducción, sin alterar sus “proporciones”.

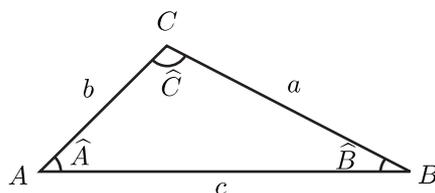


Una propiedad importante de las proporciones es que pueden ser tratadas como magnitudes de longitud. En efecto, la magnitud a/b es aquella tal que el rectángulo de lados a/b y b tiene la misma área que el rectángulo de lados a y 1 . Por tanto, podemos permitirnos a partir de ahora hacer cálculos con la proporción a/b . Por ejemplo podemos elevarla al cuadrado, cosa que haremos con unas proporciones bien conocidas: el seno y el coseno de un ángulo.

Definición.– Un triángulo es un conjunto de tres puntos del plano, A , B y C . Lo denotaremos simplemente por ABC .

Los lados del triángulo ABC son los segmentos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ y $c = \overline{AB}$.

Los ángulos del triángulo ABC son los ángulos $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{CBA}$ y $\hat{C} = \widehat{ACB}$.



Definición.– Diremos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes o iguales si se tienen las siguientes igualdades:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'.$$

Observación.– Según uno de los axiomas de Hilbert, para que ABC y $A'B'C'$ sean iguales basta con que $b = b'$, $c = c'$ y $\hat{A} = \hat{A}'$.

Observación.– Recordemos que un triángulo se dice rectángulo si uno de sus ángulos es un ángulo recto. Por contra, un triángulo acutángulo tiene sus tres ángulos agudos (menores que el ángulo recto), y un triángulo obtusángulo tiene un ángulo obtuso (mayor que un ángulo recto). En un triángulo rectángulo, los dos lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, y el otro lado se llama hipotenusa.

Definición.– Diremos que un triángulo es equilátero si sus tres lados son iguales, isósceles si dos de sus lados son iguales entre sí y distintos del tercero, y escaleno si sus tres lados son distintos dos a dos.

Uno de los primeros resultados que se puede demostrar sobre los triángulos es el cálculo de su área. Para ello suponemos que, como en la figura anterior, el lado c del triángulo es horizontal, y lo llamamos base, y al segmento vertical que une el punto C con la recta AB lo llamamos altura, y lo denotamos h_C . Esto se podría haber hecho también con los otros lados a y b , denotando la altura h_A como el segmento perpendicular a BC que une el vértice A con la recta BC , y definiendo la altura h_B de forma análoga.

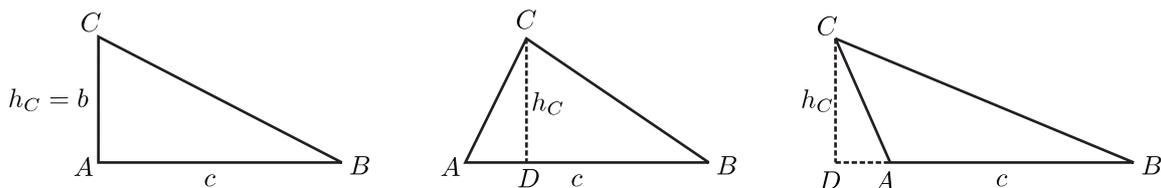
Por otra parte, por definición, el área de un cuadrado de lado 1 es igual a 1, por lo que el área de un cuadrado de lado r es igual a r^2 , y el área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab . De aquí podemos obtener el área de un triángulo cualquiera.

Teorema.– El área de un triángulo ABC es igual a la mitad del producto de su base por su altura. Es decir,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{a h_A}{2} = \frac{b h_B}{2} = \frac{c h_C}{2}.$$

Demostración.– Demostraremos el teorema para el lado c y la altura h_C , siendo los otros casos análogos. Se dan tres casos, dependiendo si la altura h_C corta al lado c en uno de sus vértices, lo corta en el interior, o no lo corta. Estos tres casos son los del siguiente dibujo:

En el primer caso, $h_C = b$ (o bien $h_C = a$, que es un caso análogo), luego el teorema dice que el área de este triángulo rectángulo será $bc/2$. En efecto, si consideramos el rectángulo de lados b y c , que tiene área bc , su diagonal será el lado a , que divide a este



rectángulo en dos triángulos iguales a ABC . Por tanto, el área de ABC es la mitad de $bc = h_C c$.

En el segundo caso, el área de ABC es la suma de las áreas de los triángulos ADC y DBC . Como estos dos son triángulos rectángulos, deducimos que el área de ABC es igual a

$$\frac{\overline{AD} h_C}{2} + \frac{\overline{DB} h_C}{2} = \frac{(\overline{AD} + \overline{DB}) h_C}{2} = \frac{c h_C}{2}.$$

Por último, en el tercer caso, el área de ABC es la diferencia entre el área de DBC y el área de DAC , que son ambos triángulos rectángulos. Por tanto, el área de ABC será

$$\frac{\overline{DB} h_C}{2} - \frac{\overline{DA} h_C}{2} = \frac{(\overline{DB} - \overline{DA}) h_C}{2} = \frac{c h_C}{2},$$

como queríamos demostrar. *Q.E.D.*

1.3 Los teoremas de Pitágoras y Thales.

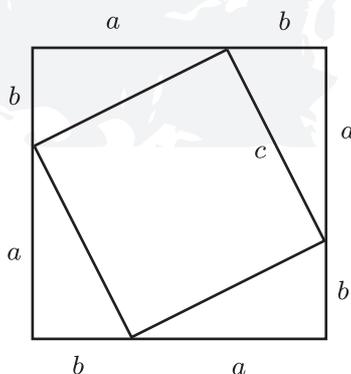
Continuaremos ahora demostrando unos de los resultado más conocidos de la geometría clásica, que trata de triángulos rectángulos: el Teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras.– En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Demostración.– Dado un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c , demostraremos el teorema de Pitágoras expresando el área del cuadrado de lado $a + b$ de dos formas distintas. Por un lado, ya vimos que el área de este cuadrado es:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por otra parte, podemos descomponer el mismo cuadrado como en el dibujo,



donde se ve claramente que el área del cuadrado de lado $a + b$ es igual a cuatro veces el área del triángulo rectángulo considerado, es decir, $4(ab/2) = 2ab$, más el área de un cuadrado de lado c . Esto es:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2.$$

Igualando las dos magnitudes, se tiene finalmente

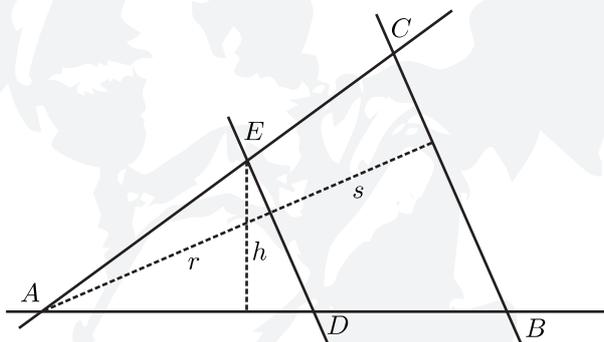
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

como queríamos probar. *Q.E.D.*

A continuación demostraremos otro de los teoremas clásicos de la geometría, muy anterior a los Elementos, ya que su autor fue Tales de Mileto (634-547 a.C.).

Teorema de Tales.— Si dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes (formando por tanto dos triángulos de ángulos iguales), entonces la proporción entre cada lado del triángulo mayor y el lado correspondiente del triángulo menor es constante.

Demostración.— El enunciado del teorema se entiende mejor con el siguiente dibujo:



Podemos considerar que las rectas paralelas están del mismo lado de A , ya que si DE estuviera del otro lado, el triángulo ADE sería igual a otro triángulo $AD'E'$ cuyo lado $D'E'$ será paralelo a DE , del mismo tamaño, y estará del mismo lado de A que la recta BC . Además, demostrar el teorema para $AD'E'$ equivaldría a demostrarlo para ADE , luego consideraremos que la situación es exactamente la del dibujo.

El Teorema de Tales dice que en este caso

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

Para demostrarlo, sean h y r las alturas del triángulo ADE correspondientes a los lados AD y DE respectivamente, y sea s la distancia entre las dos rectas paralelas. Vamos a probar que las tres fracciones anteriores son iguales a $(r + s)/r$.

En primer lugar, el área del triángulo EDB es igual a $\overline{DB}h/2$, pero también a $\overline{DE}s/2$. Por otro lado, el área de ADE es $\overline{AD}h/2$, y también $\overline{DE}r/2$. Por tanto, se tienen las siguientes proporciones:

$$\frac{\text{Área}(EDB)}{\text{Área}(ADE)} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{s}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{DB}r = \overline{AD}s.$$

Pero entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{DB}r = \overline{AD}s &\Leftrightarrow \overline{AD}r + \overline{DB}r = \overline{AD}r + \overline{AD}s \Leftrightarrow \\ (\overline{AD} + \overline{DB})r &= \overline{AD}(r + s) \Leftrightarrow \overline{AB}r = \overline{AD}(r + s). \end{aligned}$$

O, dicho de otra manera:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{r + s}{r}.$$

De forma completamente análoga se demuestra que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{r+s}{r}.$$

Por último, el área del triángulo ABC es $\overline{BC}(r+s)/2$, pero también es la suma de las áreas de los triángulos ADE , EDC y CDB , por tanto se tiene:

$$\frac{1}{2}\overline{BC}(r+s) = \frac{1}{2}\overline{DE}r + \frac{1}{2}\overline{DE}s + \frac{1}{2}\overline{BC}s \Leftrightarrow \overline{BC}(r+s) = \overline{DE}(r+s) + \overline{BC}s \Leftrightarrow$$

$$\overline{BC}r = \overline{DE}(r+s) \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{r+s}{r},$$

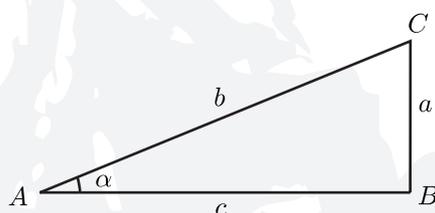
luego las tres proporciones son iguales, como queríamos demostrar. *Q.E.D.*

1.4 El seno y el coseno.

Una de las aplicaciones más interesantes del Teorema de Thales es que nos permite definir el *seno* y el *coseno* de un ángulo dado, como sigue:

Definición.— Sea α un ángulo agudo, y sea ABC un triángulo tal que $\hat{A} = \alpha$ y \hat{B} es un ángulo recto. Se definen el **seno** y el **coseno** de α como las proporciones siguientes:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{cos } \alpha = \frac{c}{b}.$$



Definición.— Dados dos ángulos α y β diremos que son complementarios cuando $\alpha + \beta = \pi/2$ y diremos que son suplementarios cuando $\alpha + \beta = \pi$.

Usando ángulos suplementarios, podemos definir el seno y el coseno para ángulos obtusos:

Definición.— Si α es un ángulo recto, entonces

$$\text{sen}(\alpha) = 1, \quad \text{cos}(\alpha) = 0.$$

Si α es un ángulo obtuso, entonces

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\pi - \alpha), \quad \text{cos}(\alpha) = -\text{cos}(\pi - \alpha),$$

donde π representa un ángulo recto (luego $\pi - \alpha$ es un ángulo agudo).

Proposición.— El seno y el coseno de un ángulo están bien definidos.

Demostración.— La definición será correcta si lo es para ángulos agudos, ya que el seno y el coseno de un ángulo recto están unívocamente determinados, y los de un ángulo

obtuso están definidos a partir de su ángulo suplementario, que es agudo. Supongamos entonces que α es un ángulo agudo, y consideremos dos triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ como el del dibujo anterior, donde $\widehat{A} = \widehat{A'} = \alpha$. Si superponemos los dos triángulos, el teorema de Thales nos dice que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

de donde se obtienen las igualdades

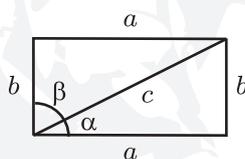
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}.$$

Por tanto, la definición del seno y el coseno de α no depende del triángulo rectángulo que tomemos, luego es una definición correcta. *Q.E.D.*

Observación.— Sólo hemos definido los senos y cosenos de ángulos mayores que cero y menores que π , ya que estamos estudiando triángulos, cuyos ángulos siempre estarán en este conjunto. En este contexto una propiedad útil es la siguiente:

Observación.— De las definiciones son inmediatas las siguientes igualdades:

- (a) Si α y β son complementarios, $\text{sen}(\alpha) = \text{cos}(\beta)$ y $\text{cos}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$.
- (a) Si α y β son suplementarios, $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$ y $\text{cos}(\alpha) = -\text{cos}(\beta)$.



Además de estar bien definidos, el seno y el coseno de un ángulo determinan al propio ángulo:

Proposición.— Si α y β son dos ángulos menores que uno llano, y se tiene $\text{cos } \alpha = \text{cos } \beta$, entonces $\alpha = \beta$. Si se tiene $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$, entonces o bien $\alpha = \beta$ o bien $\alpha = \pi - \beta$.

Demostración.— Supongamos primero que $\text{cos } \alpha = \text{cos } \beta$. Al igual que en el resultado anterior, podemos suponer que α y β son ángulos agudos (su coseno es positivo). Supongamos que $\text{cos } \alpha = \text{cos } \beta = c/b$ para ciertos números positivos b y c . Esto quiere decir que tanto α como β son ángulos de sendos triángulos rectángulos, cuyos lados contiguos a α y β miden b y c , respectivamente. Pero el Teorema de Pitágoras nos dice entonces cuánto mide el lado opuesto en ambos triángulos, luego los dos triángulos son iguales, y por tanto $\alpha = \beta$.

Por otra parte, si $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$ y ambos son ángulos agudos, un razonamiento idéntico al anterior nos dice que $\alpha = \beta$. Por tanto, si alguno de ellos es obtuso, sabemos que sólo hay un ángulo agudo que tenga el mismo seno. Esto demuestra el resultado. *Q.E.D.*

También se demuestra fácilmente la famosa fórmula que relaciona el seno y el coseno:

Proposición.— Sea α un ángulo menor que uno llano. Se tiene $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$.

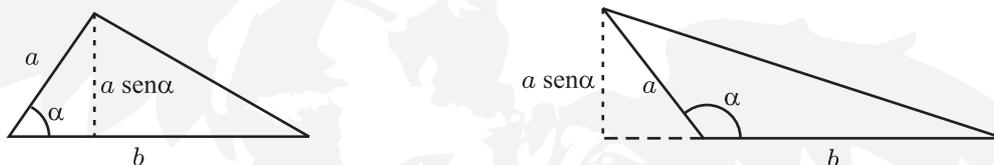
Demostración.— Si α es recto, el resultado es inmediato. Si es obtuso, se puede sustituir por su suplementario, ya que en la fórmula el seno y el coseno aparecen al cuadrado.

Por tanto, podemos considerar que α es agudo. Consideramos entonces un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, uno de cuyos ángulos sea α . Los dos catetos deben medir, respectivamente, $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$, luego la fórmula que queremos demostrar nos la da el Teorema de Pitágoras. *Q.E.D.*

Por último, veamos cómo el seno de un ángulo puede servirnos para hallar el área de un triángulo:

Proposición.— Sea ABC un triángulo. Entonces el área de ABC es la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que forman.

Demostración.— Inmediata, ya que uno de los lados por el seno es la altura correspondiente al otro lado.



Corolario (Teorema del seno).— Sea ABC un triángulo. Entonces:

$$\frac{\text{sen}(\hat{A})}{a} = \frac{\text{sen}(\hat{B})}{b} = \frac{\text{sen}(\hat{C})}{c}.$$

Demostración.— Se deduce directamente de la fórmula anterior, aplicándola en los tres ángulos de ABC . Los tres términos son iguales a $\frac{\text{área}(ABC)}{abc}$.

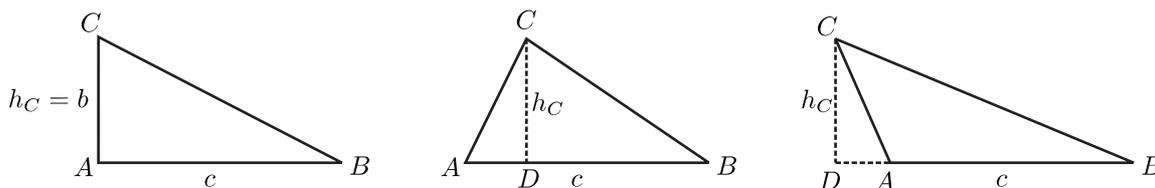
1.5 El teorema del coseno.

Una vez definido el coseno, podemos hacer una generalización del Teorema de Pitágoras para triángulos que no sean rectángulos:

Teorema del coseno.— Dado un triángulo cualquiera ABC , se cumple lo siguiente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Demostración.— Al igual que en el teorema del área del triángulo, tenemos tres posibilidades, dependiendo de si \hat{A} es un ángulo recto, agudo u obtuso.



Si \hat{A} es recto, entonces $\cos \hat{A} = 0$, por lo que el Teorema del coseno dice lo mismo que el teorema de Pitágoras, que ya hemos demostrado.

Si \hat{A} es agudo, dividimos el triángulo ABC en dos triángulos rectángulos, ADC y CDB . Sabemos por definición que $\cos \hat{A} = \overline{AD}/b$. Aplicando el teorema de Pitágoras a estos dos triángulos rectángulos, obtenemos:

$$b^2 = h_C^2 + \overline{AD}^2, \quad a^2 = h_C^2 + \overline{DB}^2.$$

Restando estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2 = (c - \overline{AD})^2 - \overline{AD}^2 = c^2 - 2c\overline{AD},$$

de donde obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c\overline{AD} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

como queríamos probar.

Por último, si \hat{A} es un ángulo obtuso, su coseno es el opuesto al coseno de su suplementario, luego $\cos \hat{A} = -\overline{AD}/b$. Ahora consideramos los dos triángulos rectángulos DAC y CAB , a los que aplicamos, como antes, el teorema de Pitágoras. La única diferencia con las fórmulas anteriores es que, en este caso, $\overline{DB} = c + \overline{AD}$, con lo que obtenemos:

$$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2 = (c + \overline{AD})^2 - \overline{AD}^2 = c^2 + 2c\overline{AD}.$$

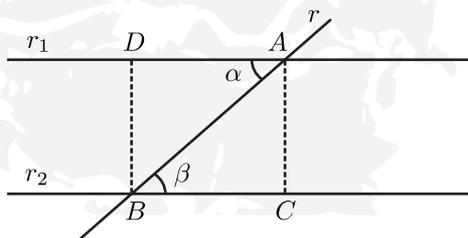
Pero el cambio de signo del coseno hace que la fórmula final sea correcta:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c\overline{AD} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Q.E.D.

Veamos ahora un resultado muy conocido sobre los ángulos de un triángulo. Primero necesitamos lo siguiente:

Lema.— Sean r_1 y r_2 dos rectas paralelas, y sea r una recta secante a las dos. Sea α uno de los ángulos que forma r con r_1 , del lado de r_1 donde está r_2 . Sea β el ángulo que forma r con r_2 , del otro lado de r , y del lado de r_2 donde está r_1 . Entonces α y β , que se llaman ángulos alternos internos, son iguales.



Demostración.— Si r es perpendicular a r_1 y r_2 ambos ángulos son rectos. Supongamos que α y β son agudos, como en el dibujo. Consideremos los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} . Ambos segmentos son iguales, pues su tamaño es la distancia entre las paralelas. Por tanto,

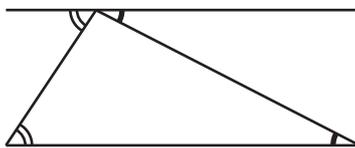
$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \text{sen } \beta.$$

Como ambos ángulos son agudos, esto implica que $\alpha = \beta$. Por último, si α y β fueran obtusos, entonces sus ángulos suplementarios son agudos e iguales, por el razonamiento anterior, luego α y β también son iguales. *Q.E.D.*

Observación.– En algunos tratados, este lema sustituye al Axioma V de Euclides, ya que ambos son equivalentes.

Teorema.– La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

Demostración.– Este resultado es una consecuencia inmediata del resultado anterior, a la vista del siguiente dibujo. *Q.E.D.*



Terminaremos esta sección con un resultado que nos dice cuál es el área del triángulo ABC en función de sus lados a , b y c . Se trata de la famosa *fórmula de Herón*, atribuida a Herón de Alejandría (hacia el 60 d. C.), aunque parece ser que su descubridor fue el gran matemático Arquímedes (287-212 a. C.).

Teorema (Fórmula de Herón).– Dado un triángulo ABC , sea Δ su área, y sea $s = \frac{a+b+c}{2}$ su semiperímetro. Se tiene:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Demostración.– Esta demostración es casi más algebraica que geométrica, aunque sigue siendo una demostración sintética, ya que no hacemos uso de coordenadas. Hay demostraciones más geométricas, como la demostración clásica u otra más sencilla debida a Euler, pero daremos esta por su concisión.

Por el Teorema del coseno, sabemos que $\cos \hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$. Por otra parte, sabemos que $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$, es decir, $\sin \hat{A} = 2\Delta/bc$.

Como $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$, obtenemos finalmente:

$$\frac{4\Delta^2}{b^2c^2} + \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 16\Delta^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \end{aligned}$$

como queríamos probar. *Q.E.D.*

1.6 Elementos notables del triángulo (I).

Para terminar el estudio de los triángulos usando métodos sintéticos, describiremos los puntos notables de un triángulo, y algunas de sus principales propiedades. Estos puntos han interesado a los matemáticos desde la antigüedad, y satisfacen propiedades sorprendentes. Son los siguientes: circuncentro, incentro, baricentro, y ortocentro. Para

definirlos, usaremos algunas rectas notables del triángulo, como son las mediatrices, las bisectrices, las medianas y las alturas, y también circunferencias como la inscrita o la circunscrita.

Comenzaremos por las rectas notables de un triángulo.

Definición.– Dado un triángulo cualquiera, se definen las siguientes rectas:

Mediatrices: Son las que pasan por el punto medio de cada lado, y son perpendiculares a éste.

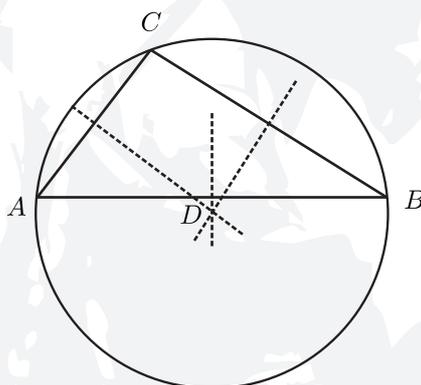
Bisectrices: Son las que pasan por cada vértice, dividiendo al ángulo correspondiente en dos ángulos iguales.

Medianas: Son las que pasan por cada vértice, y por el punto medio del lado opuesto.

Alturas: Son las que pasan por cada vértice, y son perpendiculares al lado opuesto.

De la definición se desprende que todo triángulo tiene tres mediatrices, tres bisectrices, tres medianas y tres alturas. Veremos que en cada uno de los cuatro casos, las tres rectas se cortan en un sólo punto, que será uno de los puntos notables del triángulo. Comenzaremos por uno de los más sencillos, el circuncentro.

Teorema.– Las tres mediatrices de un triángulo ABC se cortan en un punto D llamado circuncentro.



Demostración.– Observemos que la mediatriz del lado a está formada por los puntos que están a la misma distancia de B que de C . Lo mismo ocurre con la mediatriz de b y de c . Si consideramos las mediatrices de c y de a , vemos que no pueden ser paralelas, ya que en ese caso los puntos A , B y C estarían alineados, y ABC sería un triángulo degenerado. Por tanto, las mediatrices de c y de a se cortan en un punto D . Ahora bien, D está a la misma distancia de A que de B , y también está a la misma distancia de B que de C , por tanto, está a la misma distancia de A que de C , luego también pertenece a la mediatriz de b , y así las tres mediatrices son concurrentes en D . *Q.E.D.*

Corolario.– El circuncentro D de un triángulo ABC es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos A , B y C , y que se llama circunferencia circunscrita.

Demostración.– Como D pertenece a las tres mediatrices, está a la misma distancia (digamos d) de los tres puntos A , B y C , luego la circunferencia de centro D y radio d pasa por estos tres puntos. *Q.E.D.*

Pasaremos ahora a definir el baricentro, pero para ello necesitamos dos resultados previos.

Proposición (Recíproco del Teorema de Tales).– Si una recta r corta a dos lados de un triángulo, de forma que las proporciones entre los segmentos resultantes son iguales en ambos lados, entonces r es paralela al tercer lado.

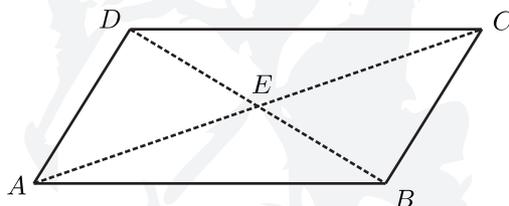
Demostración.– (Ver el dibujo del teorema de Tales) Supongamos que r corta al triángulo ABC en los puntos D y E' . Tracemos la paralela al lado a que pasa por D , que cortará al lado b en un punto E . El Teorema de Tales nos dice que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AB} \overline{AE} = \overline{AC} \overline{AD} \Rightarrow$$

$$(\overline{AD} + \overline{DB})\overline{AE} = (\overline{AE} + \overline{EC})\overline{AD} \Rightarrow \overline{DB} \overline{AE} = \overline{EC} \overline{AD} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

Pero E es el único punto del lado b que lo divide en dos segmentos con esta proporción. Por tanto, $E' = E$, lo que demuestra el resultado, ya que r resulta ser precisamente la paralela a a que pasa por D . *Q.E.D.*

Proposición.– Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas diagonales.

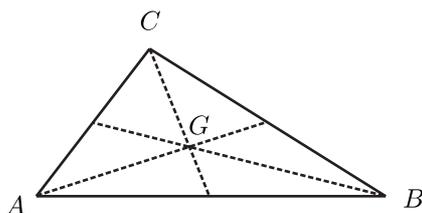


Demostración.– Recordemos que un paralelogramo es una figura formada por los segmentos que se obtienen al cortar dos pares de rectas paralelas (ver dibujo). En el paralelogramo $ABCD$, las diagonales son los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} . Debemos demostrar que su punto de corte, E , es el punto medio de \overline{AC} y de \overline{BD} . Para ello, basta demostrar que los triángulos ABE y CDE son iguales.

Por tener sus lados iguales, los triángulos ABC y CDA son iguales, luego el ángulo $\widehat{BAC} = \widehat{BAE}$ es igual al ángulo $\widehat{DCA} = \widehat{DCE}$. Por un razonamiento análogo, se tiene $\widehat{ABE} = \widehat{CDE}$. Por tanto, los triángulos ABE y CDE tienen un lado igual ($\overline{AB} = \overline{CD}$), y sus ángulos contiguos son iguales, por tanto, ambos triángulos son iguales, como queríamos demostrar. *Q.E.D.*

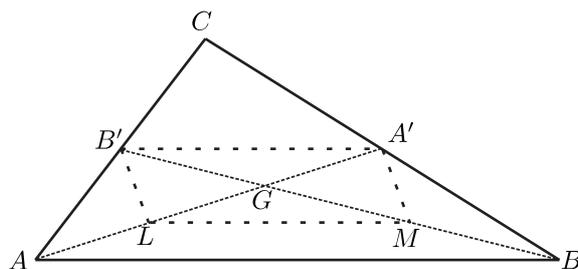
Podemos ya definir el baricentro:

Teorema.– Las tres medianas de un triángulo ABC se cortan en un punto G llamado baricentro.



Demostración.– Consideremos el dibujo siguiente:

Sean A' y B' los puntos medios de los lados a y b respectivamente, y llamemos G al punto de corte de las dos medianas AA' y BB' . Sea L es punto medio de \overline{AG} , y sea M el



punto medio de \overline{BG} . Por el recíproco del Teorema de Tales, aplicado al triángulo ABC y a la recta $A'B'$, sabemos que $A'B'$ es paralela al lado c . Análogamente, aplicándolo al triángulo GAB , la recta LM es también paralela a c . Aplicando ahora el Teorema de Tales, en ambos casos, vemos que los segmentos $\overline{B'A'}$ y \overline{LM} no sólo son paralelos, sino que tienen la misma longitud: la mitad del segmento \overline{AB} . Por tanto, el $LMA'B'$ es un paralelogramo.

Ahora bien, sabemos que las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios, luego se tiene $\overline{AL} = \overline{LG} = \overline{GA'}$, y por otra parte $\overline{BM} = \overline{MG} = \overline{GB'}$. Es decir, podemos definir G como el punto de trisección de la mediana AA' , que también es el punto de trisección de la mediana BB' , y de forma análoga se demuestra que es el punto de trisección de la tercera mediana. Por tanto, las medianas se cortan en el baricentro G , como queríamos demostrar. *Q.E.D.*

Observación.— Se suele llamar G al baricentro porque es el centro de gravedad del triángulo, suponiendo que el interior del triángulo tuviera masa homogénea.

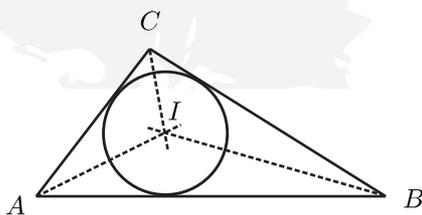
Corolario.— El baricentro G de un triángulo ABC es el punto de cualquiera de las tres medianas que está a doble distancia del vértice que del punto medio del lado opuesto.

Demostración.— Ya está demostrado en el resultado anterior. *Q.E.D.*

1.7 Elementos notables del triángulo (II).

Continuemos nuestro estudio del triángulo con otro punto notable:

Teorema.— Las tres bisectrices de un triángulo ABC se cortan en un punto I llamado incentro.



Demostración.— Consideremos dos lados a y b del triángulo, y llamemos r a su bisectriz correspondiente. Tracemos, desde un punto arbitrario R de r , el segmento a' que une R y a y es perpendicular a a , y el segmento b' que une R y b y es perpendicular a b . Llamemos a los puntos de corte A' y B' . Entonces los triángulos $CA'R$ y $CB'R$ son triángulos rectángulos, con la hipotenusa común (\overline{CR}), y además un ángulo en común (la

mitad de \widehat{C}). Por tanto, estos dos triángulos son simétricos, y el lado $\overline{RA'}$ es igual al lado $\overline{RB'}$.

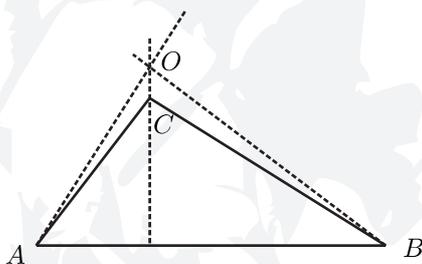
El razonamiento anterior nos dice que la bisectriz que pasa por C es el conjunto de los puntos que están a la misma distancia de a y de b . Por tanto, si tomamos la bisectriz de C y la de A (que no pueden ser paralelas), se cortarán en un punto I , que estará a la misma distancia de a que de b , y a la misma distancia de b que de c , luego estará también en la bisectriz de B . Por tanto, las tres bisectrices se cortan en un punto, I , llamado incentro. *Q.E.D.*

Corolario.— El incentro I de un triángulo ABC es el centro de una circunferencia, llamada circunferencia inscrita, que es tangente a los tres lados del triángulo.

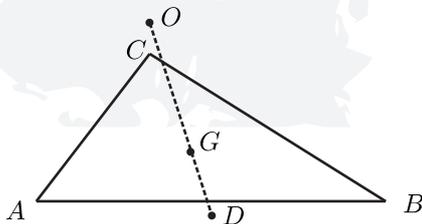
Demostración.— Hemos demostrado que el incentro está a la misma distancia (digamos d), de los tres lados a , b y c . Por tanto, la circunferencia de centro I y radio d cortará a cada uno de los lados en un solo punto, luego será tangente a los tres. *Q.E.D.*

El último punto notable del triángulo es el ortocentro.

Teorema.— En un triángulo ABC , las tres alturas se cortan en un punto O llamado ortocentro.



Observación.— En la demostración de este teorema, vamos a probar, de paso, una de las propiedades más inesperadas de los puntos notables de un triángulo: el circuncentro, el baricentro y el ortocentro están alineados. Lo más sorprendente de todo es que esta propiedad pasó inadvertida a los antiguos griegos, y no fue hasta el siglo XVIII en que Leonhard Euler la demostró. Por eso a la recta que pasa por D , G y O se la conoce como *recta de Euler*. Aunque la demostración de Euler es analítica, calculando las coordenadas de cada uno de estos tres puntos, daremos una demostración sintética muy sencilla. Probaremos pues el siguiente resultado:

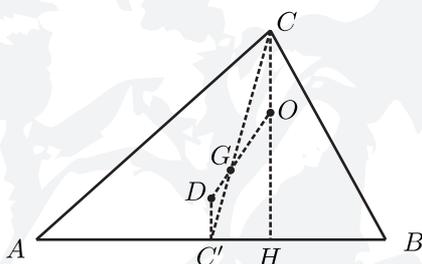


Teorema.— En un triángulo equilátero, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro coinciden. En un triángulo no equilátero, estos tres puntos están alineados. A la recta que los contiene se la llama **recta de Euler**. Además, G está entre los otros dos, a doble distancia de O que de D .

Demostración de los dos últimos teoremas enunciados.— Si el triángulo ABC es equilátero, es fácil ver que las mediatrices, las medianas y las alturas coinciden. Por tanto, el ortocentro existe, y es igual al circuncentro y al baricentro (y también al incentro).

Supongamos entonces que el triángulo ABC no es equilátero. Observemos lo siguiente: si una mediatriz coincide con una mediana (digamos las del lado a), entonces los lados b y c deben ser iguales (ABC sería isósceles). Si consideramos ahora la mediatriz y la mediana del lado b , éstas no pueden coincidir ya que ABC no es equilátero, luego se cortan en el punto medio B' del lado b . De la misma manera, la mediatriz y la mediana del lado c se cortan en el punto medio C' del lado c . Por tanto, si D y G coincidieran (si las tres mediatrices y las tres medianas se cortaran en el mismo punto), tendríamos $B' = C'$, lo cual es imposible.

Hemos demostrado entonces que si ABC no es equilátero, los circuncentro D y el baricentro G no coinciden, luego determinan una recta. En esta recta, tomamos el punto O que está más cerca de G que de D , y a una distancia tal que $\overline{OG} = 2\overline{GD}$. Vamos a demostrar que O es la intersección de las tres alturas de ABC , y con esto habremos probado los dos teoremas.



Consideremos los triángulos GOC y GDC' . Como $\overline{OG} = 2\overline{GD}$ y además sabemos que $\overline{CG} = 2\overline{GC'}$, el recíproco del Teorema de Tales nos dice que $C'D$ y OC son paralelas. Pero $C'D$ es la mediatriz del lado c , que es perpendicular a c , luego OC también es perpendicular a c . Como además pasa por C , se trata de la altura correspondiente a C . Acabamos de demostrar, por tanto, que la altura correspondiente a C pasa por el punto O . De la misma forma se demuestra que las otras dos alturas pasan por O , luego las tres alturas son coincidentes, y así el ortocentro existe y está alineado con el circuncentro y el baricentro. *Q.E.D.*

Terminamos aquí el estudio de los triángulos, como ejemplo de los razonamientos de la geometría sintética y como muestra de algunos de los resultados más importantes de la geometría clásica. A partir del tema siguiente, comenzaremos a utilizar la geometría analítica, que en la mayoría de los casos es mucho más eficaz y potente que la geometría clásica, aunque en ocasiones pierde gran parte de su elegancia.

Tema 2

Espacio afín y proyectivo

2.1 Espacio afín.

Definición.– Sea k un cuerpo arbitrario. El espacio afín n -dimensional sobre k es una terna $(\mathbf{A}^n(k), V, +)$, donde:

- (a) $\mathbf{A}^n(k) = k^n$ como conjunto (esto es, NO hay operaciones definidas entre elementos de $\mathbf{A}^n(k)$). Los elementos de $\mathbf{A}^n(k)$ se denominan puntos y se notarán con letras mayúsculas: $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$
- (b) $V = k^n$ como espacio vectorial. Sus elementos se denotarán: $\underline{u}, \underline{v}, \dots$. Cuando se escriban sus coordenadas usaremos la notación clásica

$$\underline{u} = \overrightarrow{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}.$$

- (c) La operación $+$ es una operación externa, de $\mathbf{A}^n(k) \times V$ en $\mathbf{A}^n(k)$ que asocia al par (P, \underline{u}) el punto $P + \underline{u}$ definido por

$$P + \underline{u} = (a_1, \dots, a_n) + \overrightarrow{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = (a_1 + \alpha_1, \dots, a_n + \alpha_n).$$

Observación.– Se verifican de manera inmediata las siguientes propiedades:

- (a) Fijado $P \in \mathbf{A}^n(k)$, se tiene la igualdad de conjuntos $\{P + \underline{u} \mid \underline{u} \in V\} = \mathbf{A}^n(k)$.
- (b) Dados $P \in \mathbf{A}^n(k)$ y $\underline{u}, \underline{v} \in V$, $(P + \underline{u}) + \underline{v} = P + (\underline{u} + \underline{v})$.
- (c) Dados $P \in \mathbf{A}^n(k)$, $\underline{u}, \underline{v} \in V$, si $P + \underline{u} = P + \underline{v}$ entonces $\underline{u} = \underline{v}$.
- (d) Dados $P, Q \in \mathbf{A}^n(k)$ existe un único $\underline{u} \in V$ que verifica $P + \underline{u} = Q$. En estas condiciones el vector \underline{u} también se notará \overrightarrow{PQ} . Observemos que la unicidad es sobre \underline{u} y no sobre el par (P, Q) : es posible que haya otros pares de puntos (A, B) tales que $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$.

Obviamente, la notación \overrightarrow{PQ} corresponde, intuitivamente, al vector que va de P a Q . Por ello también se llaman a P y Q puntos origen y final de \overrightarrow{PQ} .

Observación.– Usando la notación anteriormente introducida, se pueden probar (en realidad, es poco más que reescribir las propiedades anteriores en esta notación):

- (a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ para cualesquiera $P, Q, R \in \mathbf{A}^n(k)$.
- (b) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ para cualesquiera $P, Q \in \mathbf{A}^n(k)$.
- (c) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ si y sólo si $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$, para cualesquiera $P, Q, R, S \in \mathbf{A}^n(k)$ (teorema de Thales paralelo).

Veremos a continuación el concepto de dependencia afín en un conjunto de puntos, que se corresponde con el de dependencia lineal de vectores.

Definición.— Sea $S \subset \mathbf{A}^n(k)$ un conjunto de puntos de $\mathbf{A}^n(k)$. Diremos que S es afínmente (in)dependiente si existe $O \in S$ tal que el conjunto

$$S_O = \{\overrightarrow{OQ} \mid Q \in S, Q \neq O\} \subset V$$

es linealmente (in)dependiente.

Lema.— Para comprobar si $S \subset \mathbf{A}^n(k)$ es afínmente (in)dependiente es indiferente qué punto O escogamos en S como origen de todos los vectores.

Demostración.— En efecto, veamos qué sucede si escogemos otro punto $P \in S$ y usamos, en lugar de S_O el conjunto correspondiente S_P .

El conjunto S_O es linealmente dependiente si y sólo si existe una combinación lineal no trivial igualada a $\underline{0}$ en S_O . Esto es, si y sólo si existen puntos $R_1, \dots, R_t \in S$ (distintos de O) y escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in k$, no todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \alpha_1 \overrightarrow{OR_1} + \dots + \alpha_t \overrightarrow{OR_t} \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR_1}) + \dots + \alpha_t (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR_t}) \\ &= \alpha_1 \overrightarrow{PR_1} + \dots + \alpha_t \overrightarrow{PR_t} - (\alpha_1 + \dots + \alpha_t) \overrightarrow{PO} \end{aligned}$$

de donde S_P ha de ser linealmente dependiente, puesto que algún α_i es no nulo. Esto prueba lo que queremos salvo en el caso de que exista i entre 1 y t verificando

$$P = R_i, \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \dots = \alpha_t = 0,$$

en cuyo caso la suma anterior se reduce a $\underline{0} = \alpha_i \overrightarrow{PO}$ por lo cual, al ser $\alpha_i \neq 0$, ha de ser $O = P$ en contra de la hipótesis. *Q.E.D.*

Observación.— Obviamente, por los resultados conocidos de espacios vectoriales, en el espacio afín n -dimensional no puede haber más de $n+1$ puntos afínmente independientes. Es más, un conjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$, dado por

$$P_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$$

es afínmente independiente si y sólo si

$$t = \text{rg} \begin{pmatrix} a_{11} - a_{10} & \dots & a_{1t} - a_{10} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{n0} & \dots & a_{nt} - a_{n0} \end{pmatrix},$$

o, utilizando las propiedades del rango, si y sólo si

$$t + 1 = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nt} \end{pmatrix},$$

que resulta más sencillo de recordar. Obviamente, el conjunto es afínmente dependiente si el rango de la matriz anterior es menor estrictamente que $t + 1$.

2.2 Espacio proyectivo.

Dado el espacio vectorial $W = k^{n+1}$ consideramos la siguiente relación en $W \setminus \{0\}$:

$$\underline{u} \sim \underline{v} \iff \exists \alpha \in k \text{ con } \underline{u} = \alpha \underline{v}.$$

Observación.— La relación \sim es de equivalencia y probarlo es trivial. Por ejemplo, la transitividad es directa: si $\underline{u} \sim \underline{v} \sim \underline{w}$, entonces

$$\underline{u} = \alpha \underline{v} = \alpha \beta \underline{w} \implies \underline{u} \sim \underline{w}.$$

Definición.— El conjunto de clases de equivalencia de la relación \sim se denomina el espacio proyectivo n -dimensional (atención a la dimensión) definido sobre k , notado $\mathbf{P}^n(k)$.

Un elemento de $\mathbf{P}^n(k)$, consistente en la clase de equivalencia de $\underline{u} = (a_0, \dots, a_n)$, se notará $[a_0 : \dots : a_n]$ y se denominará punto proyectivo. Notemos que, para cualquier $\alpha \neq 0$,

$$[a_0 : \dots : a_n] = [\alpha a_0 : \dots : \alpha a_n].$$

Dicho de otro modo, $[a_0 : \dots : a_n] = [b_0 : \dots : b_n]$ si y sólo si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_n \\ b_0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 1.$$

Observación.— La notación para los puntos proyectivos se hereda del caso unidimensional, $\mathbf{P}^1(k)$, denominado la recta proyectiva, donde los puntos $[a_1 : b_1]$ y $[a_2 : b_2]$ son iguales si y sólo si lo son las proporciones que determinan; esto es, si y sólo si $a_1/b_1 = a_2/b_2$.

Definición.— La aplicación natural

$$\begin{aligned} \pi : W \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbf{P}^n(k) \\ (a_0, \dots, a_n) &\longmapsto [a_0 : \dots : a_n] \end{aligned}$$

se denomina proyección (natural de $W \setminus \{0\}$ en el espacio proyectivo $\mathbf{P}^n(k)$).

Definición.— Sea $S = \{P_1, \dots, P_t\} \subset \mathbf{P}^n(k)$. Diremos que S es un conjunto proyectivamente (in)dependiente si, dados $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t \in V$ cualesquiera verificando que $\pi(\underline{v}_i) = P_i$, el conjunto $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t\}$ es linealmente (in)dependiente en W .

Observación.— Algunos comentarios a tener en cuenta relativos a esta definición son:

- (a) Podemos, por supuesto (como se hace, por ejemplo, en espacios vectoriales) definir el concepto de (in)dependencia lineal sin forzar el hecho de que el conjunto S sea finito. Sin embargo, esto sólo complica innecesariamente la definición: es mucho más sencillo extender de manera natural la definición al caso infinito donde, como es evidente, todo $S \subset W$ infinito es proyectivamente dependiente (en realidad basta con que S tenga más de $n + 1$ puntos).
- (b) El hecho de que $S = \{P_1, \dots, P_t\}$ sea proyectivamente (in)dependiente no depende de la elección de los \underline{v}_i , como se desprende por otro lado de la definición. En efecto, como sabemos, si notamos

$$\underline{v}_i = (a_{0i}, a_{1i}, \dots, a_{ni}),$$

el conjunto S es linealmente dependiente si y sólo si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0t} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nt} \end{pmatrix} < t,$$

lo cual no depende de la elección de los \underline{v}_i , pues otra elección sólo habría multiplicado la columna correspondiente por un escalar no nulo, lo cual no varía el rango de la matriz.

Definición.— Sea $\mathbf{P}^n(k)$ el espacio proyectivo n -dimensional. Notemos $H \subset k^{n+1}$ el subespacio definido por $x_0 = 0$. Entonces el subconjunto

$$H_\infty = \{[0 : a_1 : \dots : a_n] \mid a_i \in k\} = \pi(H \setminus \{0\})$$

se denomina el hiperplano del infinito.

Observación.— Notemos que H_∞ se puede identificar canónicamente con $\mathbf{P}^{n-1}(k)$, vía

$$\begin{array}{ccc} H_\infty & \longrightarrow & \mathbf{P}^{n-1}(k) \\ [0 : a_1 : \dots : a_n] & \longmapsto & [a_1 : \dots : a_n] \end{array}$$

identificación que, por supuesto, preserva la dependencia e independencia proyectiva.

Los últimos enunciados de esta lección tienen por objeto relacionar el espacio afín y el proyectivo mediante la inmersión clásica (en este caso, fijando la primera coordenada).

Observación.— Consideremos la aplicación φ dada por

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbf{A}^n(k) & \longrightarrow & \mathbf{P}^n(k) \\ (a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & [1 : a_1 : \dots : a_n] \end{array}$$

Entonces φ es una aplicación biyectiva entre $\mathbf{A}^n(k)$ y $\mathbf{P}^n(k) \setminus H_\infty$. La inyectividad es clara, ya que puntos distintos necesariamente van en puntos distintos. Por otro parte, dado un punto proyectivo que no esté en H_∞ , pongamos $P = [a_0 : \dots : a_n]$, como $a_0 \neq 0$ podemos escribir $P = [1 : a_1/a_0 : \dots : a_n/a_0] = \varphi(a_1/a_0, \dots, a_n/a_0)$.

Así podemos identificar $\mathbf{A}^n(k)$ con el subconjunto complementario de H_∞ en $\mathbf{P}^n(k)$, y esta identificación se usará, a veces, sin mención explícita.

Notación.— Dado $P \in \mathbf{A}^n(k)$, para distinguir cuándo consideramos P como punto afín y cuándo como punto proyectivo, notaremos $[P] = \varphi(P)$.

Proposición.— La identificación anterior convierte la (in)dependencia afín en (in)dependencia proyectiva y viceversa (cuando ha lugar).

Demostración.— La prueba es trivial, ya que si $\{P_1, \dots, P_r\}$ vienen dados por

$$P_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni}),$$

son afínmente independientes si y sólo si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} = r,$$

lo cual es claramente equivalente a que $\{[P_1], \dots, [P_r]\}$ sean proyectivamente independientes. *Q.E.D.*

2.3 Variedades lineales (I).

Mantenemos las notaciones anteriores relativas a $\mathbf{A}^n(k)$ (espacio afín n -dimensional), V (el espacio vectorial k^n) y $\mathbf{P}^n(k) = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ (espacio proyectivo n -dimensional).

$$\mathbf{A}^n(k) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{P}^n(k) \xleftarrow{\pi} k^{n+1} \setminus \{0\}$$

Definición.— Una variedad lineal proyectiva es el conjunto de clases de equivalencia, por \sim , de un subespacio vectorial de k^{n+1} , del que hemos retirado el vector $\{0\}$.

En concreto, dado un subespacio $L \subset k^{n+1}$, la variedad correspondiente es $\pi(L \setminus \{0\})$, que por abuso de notación, denominaremos $\pi(L)$.

Observación.— Dado un subespacio $L \subset k^{n+1}$, es trivial probar que $\underline{u} \in L$ si y sólo si $\alpha \underline{u} \in L$ para todo $\alpha \in k$ no nulo. Esto indica que la anterior definición es consistente, pues los vectores no nulos de un subespacio están todos o no está ninguno en una clase de equivalencia.

Observación.— Notemos que, a diferencia de los subespacios vectoriales, el conjunto vacío sí es una variedad lineal proyectiva, procedente de $L = \{0\}$.

Así mismo, un punto proyectivo es una variedad lineal proyectiva, mientras que un vector (no nulo) nunca es un subespacio vectorial.

Notación.— Por herencia de la situación vectorial, si L viene dada por $L = L(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_t)$, con $\underline{u}_i \neq 0$, diremos que $\pi(L)$ está generada por (o admite como sistema generador a) $\pi(\underline{u}_1), \dots, \pi(\underline{u}_t)$, circunstancia que denotaremos

$$\pi(L) = L_p(\pi(\underline{u}_1), \dots, \pi(\underline{u}_t)).$$

Un sistema generador se dirá una base cuando sus puntos sean proyectivamente independientes.

De la misma forma denominaremos un sistema de ecuaciones implícitas de $\pi(L)$ a cualquier sistema de ecuaciones implícitas de L .

Así, por ejemplo,

$$H_\infty = L_p([0 : 1 : 0 : \dots : 0], [0 : 0 : 1 : \dots : 0], \dots, [0 : 0 : 0 : \dots : 1]),$$

y esos puntos son, de hecho, base de H_∞ . Un sistema de ecuaciones implícitas de H_∞ es, obviamente, $\{x_0 = 0\}$.

Por las propiedades ya estudiadas de los espacios vectoriales podemos decir que toda variedad lineal proyectiva admite una base y un sistema de ecuaciones implícitas independientes. Además, dos bases cualesquiera han de tener el mismo número de elementos, así como dos sistemas de ecuaciones implícitas independientes deben tener el mismo número de ecuaciones.

Definición.— Una variedad lineal afín es la intersección de una variedad lineal proyectiva con el espacio afín $\mathbf{A}^n(k) \subset \mathbf{P}^n(k)$ (mediante la inmersión φ).

Proposición.— Sea Y una variedad afín no vacía. Entonces existe una única variedad lineal proyectiva Z tal que $Y = Z \cap \mathbf{A}^n(k)$.

Demostración.— Supongamos que, en efecto $Z' \cap \mathbf{A}^n(k) = Z \cap \mathbf{A}^n(k) = Y$ para dos variedades proyectivas Z y Z' . Basta entonces probar que $Z' \cap H_\infty = Z \cap H_\infty$ para determinar que $Z' = Z$. Veamos sólo una inclusión, ya que la otra es análoga. Para empezar fijemos $P = [1 : a_1 : \dots : a_n] \in Z \cap \mathbf{A}^n(k) = Z' \cap \mathbf{A}^n(k)$.

Si tomamos $R = [0 : b_1 : \dots : b_n] \in Z' \cap H_\infty$ entonces, por provenir de un subespacio vectorial, ha de ser

$$Q = [1 : a_1 + b_1 : \dots : a_n + b_n] \in Z' \cap \mathbf{A}^n(k) = Z \cap \mathbf{A}^n(k).$$

Al tener $P, Q \in Z$, es obvio que $R \in Z$, lo que prueba la inclusión. *Q.E.D.*

Observación.— Notemos, en la demostración anterior, que los puntos proyectivos no se suman “coordenada a coordenada”. Esto es el punto Q no es $P + R$. Con posterioridad veremos que es $P + R$ (la recta que une al punto P con el punto R).

Definición.— Dada una variedad lineal afín no vacía Y , la única variedad proyectiva Z que verifica $Z \cap \mathbf{A}^n(k) = Y$ se denomina clausura proyectiva de Y y se denotará \bar{Y} .

Convendremos que $\bar{\emptyset} = \emptyset$, ya que no hay en general (salvo para $n = 1$) una única variedad proyectiva Z tal que $Z \subset H_\infty$ (y, por tanto, tal que $Z \cap \mathbf{A}^n(k) = \emptyset$).

2.4 Variedades lineales (II).

Observación.— Así como podemos identificar $\mathbf{A}^n(k)$ con $\mathbf{P}^n(k) \setminus H_\infty$, podemos dotar de contenido geométrico (afín) a H_∞ .

En efecto, H_∞ es, como vimos un espacio proyectivo $(n-1)$ -dimensional y, por tanto, está formado por las clases de equivalencia de $k^{n+1} \setminus \{0\}$ mediante \sim . Así, podemos interpretar H_∞ como las direcciones en X esto es, los conjuntos formados por un vector de V y todos sus múltiplos no nulos. Esta interpretación se corresponderá perfectamente con la naturaleza dual del plano afín (puntos–vectores), como se verá.

Notación.– Para distinguir cuándo hablamos de $\underline{v} \in k^n$ como vector en el espacio afín y cuándo de $\langle \underline{v} \rangle \setminus \{0\}$ como punto de H_∞ , notaremos este último como $[\underline{v}]$.

Definición.– Dada una variedad afín Y no vacía, definimos la variedad de dirección de Y como

$$D(Y) = \{ \underline{v} \in k^n \mid [\underline{v}] \in \bar{Y} \cap H_\infty \} \cup \{0\}.$$

Esto es, la dirección de Y está determinada por los puntos de la variedad proyectiva de la que procede Y que se encuentran en el infinito (H_∞) o, equivalentemente, por las direcciones contenidas en la variedad \bar{Y} .

Observación.– $D(Y)$ es un subespacio vectorial de k^n , como se puede comprobar fácilmente. Para ello basta comprobar que, dados $\underline{u} = (a_1, \dots, a_n)$, $\underline{v} = (b_1, \dots, b_n) \in D(Y)$, tenemos que

$$[\underline{u}] = [0 : a_1 : \dots : a_n], \quad [\underline{v}] = [0 : b_1 : \dots : b_n] \in \bar{Y},$$

y, por tanto, dados $\alpha, \beta \in k$,

$$[\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}] = [0 : \alpha a_1 + \beta b_1 : \dots : \alpha a_n + \beta b_n] \in H_\infty \cap \bar{Y},$$

de donde $\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} \in D(Y)$.

Alternativamente se puede comprobar que, si $\bar{Y} = \pi(L)$, entonces $D(Y) = L \cap H$, que se puede interpretar como subespacio de V mediante la identificación $H \simeq V$.

Observación.– El caso de las variedades lineales afines es algo más complejo a la hora de hablar de sistemas generadores, bases o sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, diferentes bases de una misma variedad proyectiva Z pueden dar, al cortar con $\mathbf{A}^n(k)$, conjuntos con diferente cardinal, lo cual no es en modo alguno apropiado.

Lema.– Sea $\pi(L)$ una variedad lineal proyectiva. Entonces existe una base de L , $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_t\}$, tal que $\pi(\underline{u}_i) \in H_\infty$ para $i = 2, \dots, t$. Por otra parte, si $\pi(L) \not\subset H_\infty$, podemos encontrar una base de L , $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t\}$, tal que $\pi(\underline{v}_i) \notin H_\infty$, para $i = 1, \dots, t$.

Demostración.– La prueba es muy simple: por el teorema de la dimensión, tenemos que

$$\dim(H \cap L) = \dim(H) + \dim(L) - \dim(H + L),$$

donde tenemos dos opciones. La primera es que $L \subset H$, en cuyo caso no hay nada que probar, ya que cualquier sistema generador verifica el enunciado evidentemente. La segunda es que $L \not\subset H$, en cuyo caso $L + H = k^{n+1}$ y, por tanto,

$$\dim(L \cap H) = \dim(L) - 1.$$

Entonces para probar el primer aserto sólo resta tomar una base de $L \cap H$ (que son los $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t$ del enunciado) y extenderla a una base de L con otro vector.

En cuanto a la segunda afirmación, si partimos de $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_t\}$ como antes, podemos considerar una nueva base de L dada por $\{\underline{u}_1, \underline{u}_1 + \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_1 + \underline{u}_t\}$, cuyos vectores no están en H . Probar que este nuevo conjunto es en efecto base de L es un ejercicio sencillo. Esto finaliza la prueba. *Q.E.D.*

Corolario.— Dada una variedad lineal proyectiva Z existe una base P_1, \dots, P_t tal que $P_2, \dots, P_t \in H_\infty$. Además, si $Z \not\subset H_\infty$ podemos hallar otra base Q_1, \dots, Q_t tal que $Q_i \notin H_\infty$.

En términos afines, esto representa que, dada Y variedad lineal afín, podemos hallar una base de \bar{Y} tal que todos sus elementos, menos el primero, sean de la forma $[\underline{v}]$, con $\underline{v} \in k^n$. Además, si $Y \neq \emptyset$, podemos también escoger una base de \bar{Y} de la forma $[P_1], \dots, [P_t]$ con $P_i \in \mathbf{A}^n(k)$.

Observación.— De la prueba de la primera afirmación se desprende que, como $L(\underline{u}_2, \dots, \underline{u}_t) = L \cap H$, el subespacio de k^{n+1} generado por los $t - 1$ últimos vectores de la base hallada de L no depende de la base en cuestión, sino tan sólo del propio L .

Proposición.— Sea Y una variedad lineal afín no vacía. Entonces, para todo $P \in Y$,

$$Y = P + D(Y) = \{P + \underline{u} \mid \underline{u} \in D(Y)\}.$$

Demostración.— Fijemos $P = (a_1, \dots, a_n)$. Probemos en primer lugar que $Y \subset P + D(Y)$. Si tomamos $Q = (b_1, \dots, b_n) \in Y$, tenemos que $[Q] \in \bar{Y} = \pi(L)$, por lo que $(1, a_1, \dots, a_n), (1, b_1, \dots, b_n) \in L \subset k^{n+1}$.

Al ser L subespacio, tenemos que $(0, b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) \in L$ y, así, $(0, b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) \in H \cap L$, de donde

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)} \in D(Y).$$

Para ver la otra inclusión tomaremos $\underline{u} \in D(Y)$ dado por $\underline{u} = \overrightarrow{(u_1, \dots, u_n)}$ de donde $(0, u_1, \dots, u_n) \in H \cap L$. Al ser $(1, a_1, \dots, a_n) \in L$ tenemos que $(1, a_1 + u_1, \dots, a_n + u_n) \in L$ y, por tanto

$$[P + \underline{u}] \in \pi(L) \implies P + \underline{u} \in Y,$$

lo que prueba la inclusión que restaba. *Q.E.D.*

Observación.— Así pues, la base que hallábamos al principio de la lección para una variedad lineal proyectiva $\pi(L)$ se traduce, en la variedad afín correspondiente Y , en un punto $P \in Y$ y una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ del subespacio $D(Y)$. La otra base hallada estaba formada, como podemos comprobar reescribiendo la prueba, por los puntos afines $P, P + \underline{v}_1, \dots, P + \underline{v}_r$.

2.5 Variedades lineales (III).

Notamos, como de costumbre, $\mathbf{A}^n(k)$, V y $\mathbf{P}^n(k)$. Además, seguiremos usando $H : x_0 = 0 \subset k^{n+1}$ y $H_\infty = \pi(H) \subset \mathbf{P}^n(k)$.

Definición.— Un conjunto de puntos afines $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbf{A}^n(k)$ se dicen sistema generador de una variedad lineal afín Y (denotado $Y = L_a(Q_1, \dots, Q_r)$) cuando $[Q_1], \dots, [Q_r]$ generan \bar{Y} .

Observación.— Por las lecciones anteriores, toda variedad lineal afín admite un sistema generador formado por puntos afines. Además, como existe una base de \bar{Y} formada por puntos afines, existe un sistema generador de Y formado por puntos afines afínmente independientes (ver 2.2.).

Recíprocamente, dado un conjunto de puntos afines (respectivamente un punto y un subespacio de V) el conjunto de puntos afines que dependen de ellos (respectivamente los puntos que se pueden formar sumando todos los vectores del subespacio al punto) son una variedad afín, proveniente de la variedad proyectiva generada por los propios puntos, vía φ (respectivamente, generada por el punto, visto en $\mathbf{P}^n(k)$ y los vectores, vistos en $H_\infty \subset \mathbf{P}^n(k)$).

Definición.— Sea Y una variedad lineal afín. Diremos que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

es un sistema de ecuaciones implícitas de Y si se verifica que $P = (a_1, \dots, a_n) \in Y$ si y sólo si (a_1, \dots, a_n) es solución del sistema.

Proposición.— Toda variedad lineal afín no vacía tiene un sistema de ecuaciones implícitas.

Demostración.— Dada Y nos fijamos en un sistema de ecuaciones implícitas de \bar{Y} :

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m0}x_0 + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Entonces, como $P = (a_1, \dots, a_n) \in Y$ si y sólo si $[1 : a_1 : \dots : a_n]$ verifica las ecuaciones, es obvio que un sistema de ecuaciones lineales de Y es

$$\begin{cases} a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m0} + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Q.E.D.

Observación.— Como las direcciones de $D(Y)$ son los puntos de \bar{Y} cuya primera coordenada es 0, un sistema de ecuaciones del subespacio $D(L) \subset k^n$ es precisamente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

esto es, el sistema homogéneo asociado al de Y .

Observación.– Recíprocamente, como sabemos de Álgebra Lineal, toda solución de un sistema compatible de ecuaciones en n indeterminadas se puede escribir como suma de una solución particular más una del sistema homogéneo asociado. A partir de aquí, el conjunto de soluciones de un sistema compatible se puede escribir como una solución particular (un punto afín) más las soluciones del sistema homogéneo (que corresponden a un subespacio de V).

Así todo sistema compatible de n incógnitas determina una variedad lineal afín Y y haciendo cada ecuación homogénea, multiplicando el término independiente por x_0 , obtenemos la variedad lineal proyectiva \bar{Y} .

En el sentido contrario, unas ecuaciones de \bar{Y} se convierten en unas de Y haciendo $x_0 = 1$ y, por tanto, en unas de $D(Y)$ haciendo $x_0 = 0$. Finalmente, notemos que de unas ecuaciones de $D(Y)$ *no podemos* obtener unas de Y . Un sistema que define Y tiene la misma matriz de coeficientes que el que define $D(Y)$, pero necesitamos un punto del que sepamos que está en Y para hallar los términos independientes, simplemente sustituyendo en el sistema e imponiendo que el punto en cuestión sea solución.

2.6 Operaciones con variedades.

Observación.– Como en el caso vectorial (o, más bien, precisamente por ello mismo), la intersección de variedades proyectivas es de nuevo una variedad proyectiva. En concreto

$$\pi(L_1) \cap \pi(L_2) = \pi(L_1 \cap L_2).$$

Más aún, si tenemos dos variedades afines $Y_1 = \pi(L_1) \cap \mathbf{A}^n(k)$, $Y_2 = \pi(L_2) \cap \mathbf{A}^n(k)$, entonces

$$Y_1 \cap Y_2 = (\pi(L_1) \cap \mathbf{A}^n(k)) \cap (\pi(L_2) \cap \mathbf{A}^n(k)) = \pi(L_1 \cap L_2) \cap \mathbf{A}^n(k),$$

con lo que la intersección de variedades afines también es una variedad afín.

Sin embargo, al igual que en el caso vectorial, la unión de variedades (tanto afines como proyectivas) no es una variedad, en general, por lo que se opta por definir la suma de variedades de la forma natural.

Definición.– Dadas dos variedades proyectivas $Z_1 = \pi(L_1)$, $Z_2 = \pi(L_2)$ definimos $Z_1 + Z_2 = \pi(L_1 + L_2)$. De la misma forma, dadas dos variedades afines $Y_1 = Z_1 \cap \mathbf{A}^n(k)$, $Y_2 = Z_2 \cap \mathbf{A}^n(k)$, definimos $Y_1 + Y_2 = (Z_1 + Z_2) \cap \mathbf{A}^n(k)$.

Proposición.– En las condiciones anteriores $Z_1 + Z_2$ (respectivamente $Y_1 + Y_2$) es la menor variedad lineal proyectiva (respectivamente afín) que contiene a Z_1 y a Z_2 (respectivamente a Y_1 e Y_2).

Demostración.– Es directa a partir de la propiedad vectorial correspondiente. *Q.E.D.*

Observación.– A partir de lo anterior (y de los enunciados correspondientes en el caso vectorial) es trivial obtener los siguientes resultados:

- (a) Unas ecuaciones de la intersección de dos variedades lineales (afines o proyectivas) se pueden obtener uniendo unos sistemas de ecuaciones de las variedades lineales en cuestión.

- (b) Un sistema generador de la suma de dos variedades lineales (afines o proyectivas) se puede obtener uniendo unos sistemas generadores de las variedades lineales en cuestión.

Estos enunciados prueban, además, que si Y_1 e Y_2 son variedades lineales afines,

- (a) $\overline{Y_1 + Y_2} = \overline{Y_1} + \overline{Y_2}$.
 (b) Si $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$.

Al igual que en el caso vectorial, el hecho de partir de sistemas de ecuaciones independientes o de sistemas de generadores independientes (proyectivamente o afínmente) no puede garantizar la independencia del sistema de ecuaciones o del sistema generador obtenido.

Observación.— En el caso de la suma de dos variedades lineales afines, si optamos por presentarlas de la forma

$$\begin{aligned} Y_1 &= P + D(Y_1) = (a_1, \dots, a_n) + \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_t \rangle \\ Y_2 &= Q + D(Y_2) = (b_1, \dots, b_n) + \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s \rangle \end{aligned}$$

y queremos presentar de la misma forma $Y_1 + Y_2$ hemos de tener en cuenta que la anterior presentación implica que las variedades lineales proyectivas de las que proceden verifican, respectivamente

$$\overline{Y_1} = L_p([P], [\underline{u}_1], \dots, [\underline{u}_t]), \quad \overline{Y_2} = L_p([Q], [\underline{v}_1], \dots, [\underline{v}_s])$$

por lo que el sistema generador de $\overline{Y_1} + \overline{Y_2}$ obtenido uniendo estos sistemas de generadores no es de la forma adecuada (un punto en $\mathbf{A}^n(k)$ y el resto en H_∞).

Esto se puede arreglar, sin mayor problema, sustituyendo el punto proyectivo $[1 : b_1 : \dots : b_n]$ por $[0 : b_1 - a_1 : \dots : b_n - a_n]$. En efecto, el sistema resultante genera el original y a su vez es generado por él, de forma que

$$\overline{Y_1} + \overline{Y_2} = L_p([P], [\underline{u}_1], \dots, [\underline{u}_t], [\underline{v}_1], \dots, [\underline{v}_s], [0 : b_1 - a_1 : \dots : b_n - a_n]).$$

Enunciamos el resultado en términos de variedades lineales afines.

Proposición.— Sean $Y_1 = P + D(Y_1)$, $Y_2 = Q + D(Y_2)$ variedades lineales afines. Entonces

$$D(Y_1 + Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2) + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle.$$

Observación.— Dado que P y Q se pueden tomar arbitrarios en Y_1 e Y_2 , respectivamente, es inmediato probar que, si $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, entonces

$$D(Y_1 + Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2).$$

Así mismo, si $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, entonces \overrightarrow{PQ} no puede estar ni en $D(Y_1)$ ni en $D(Y_2)$, por lo que el tercer sumando nunca es superfluo.

Observación.— Para estudiar la variedad de dirección de la intersección de dos variedades afines Y_1 e Y_2 supondremos de entrada que $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Entonces $D(Y_1 \cap Y_2) = D(Y_1) \cap$

$D(Y_2)$. En efecto, tomemos $P \in Y_1 \cap Y_2$ cualquiera y lo consideraremos fijado para lo que sigue.

Un vector $\underline{u} \in D(Y_1 \cap Y_2)$ si y sólo si el punto $Q = P + \underline{u} \in Y_1 \cap Y_2$. Pero entonces $P + \underline{u}$ está en Y_1 y en Y_2 , al igual que P , de donde $\underline{u} \in D(Y_1) \cap D(Y_2)$.

Para ver la otra inclusión se puede proceder de forma parecida: Si $\underline{u} \in D(Y_1) \cap D(Y_2)$, entonces $P + \underline{u} \in Y_1 \cap Y_2$, por lo que $\underline{u} \in D(Y_1 \cap Y_2)$.

2.7 Dimensión. Teoremas de dimensión.

Observación.— La dimensión de una variedad lineal proyectiva $Z = \pi(L)$ podría definirse como $\dim(Z) = \dim(L)$. Sin embargo, esto produciría ciertos fenómenos que no se corresponden con la intuición: así el espacio proyectivo n -dimensional tendría dimensión $n + 1$ y un punto proyectivo tendría dimensión 1.

Definición.— Dada una variedad lineal proyectiva $Z = \pi(L)$, definimos $\dim(Z) = \dim_V(L) - 1$. Análogamente, para una variedad lineal afín no vacía Y , definimos $\dim(Y) = \dim(\bar{Y})$

Las variedades de dimensión 0 son los puntos (afines o proyectivos). Las variedades de dimensión 1, 2 y $n - 1$ se denominan, respectivamente, rectas, planos e hiperplanos. El vacío, por ejemplo, como variedad proyectiva tiene dimensión -1 , así que, como variedad afín, también tiene dimensión -1 .

Observación.— Un caso muy interesante es el de $D(Y)$: por un lado es un subespacio vectorial de $V = k^n$; por otro se puede considerar una variedad proyectiva, contenida en H_∞ . Por coherencia, notaremos esta subvariedad $[D(Y)]$. De la definición se sigue entonces que

$$\dim_V(D(Y)) = \dim([D(Y)]) + 1.$$

Observación.— A partir de estas definiciones y de los resultados de las lecciones anteriores podemos deducir que:

- Una variedad proyectiva de dimensión r en $\mathbf{P}^n(k)$ tiene una base de $r + 1$ puntos y viene determinada por un sistema de homogéneo $n - r$ ecuaciones independientes en $n + 1$ incógnitas.
- Una variedad afín de dimensión r en $\mathbf{A}^n(k)$ tiene un sistema generador formado por $r + 1$ puntos afínmente independientes y viene determinada por un sistema de $n - r$ ecuaciones independientes en n incógnitas (en general, no homogéneo). También puede venir determinada por un punto y una base de su variedad de dirección formada por r vectores de k^n .
- Una variedad afín tiene la misma dimensión que su variedad de dirección (considerada como subespacio de k^n).

Vamos a estudiar ahora la relación de las dimensiones de la suma y la intersección de variedades.

Teorema de la dimensión para variedades proyectivas.– Sean Z_1, Z_2 variedades lineales proyectivas. Entonces

$$\dim(Z_1 + Z_2) + \dim(Z_1 \cap Z_2) = \dim(Z_1) + \dim(Z_2).$$

Demostración.– Directa del caso vectorial. *Q.E.D.*

Observación.– En el caso afín, situaciones conocidas nos hacen ver que el resultado análogo no se verifica. Por ejemplo, si tomamos dos rectas afines paralelas (posteriormente definiremos el paralelismo, pero entedemos que el alumno sabe que son rectas paralelas) R_1 y R_2 en el plano $\mathbf{A}^2(k)$. Entonces $R_1 + R_2 = \mathbf{A}^2(k)$ y por tanto

$$\dim(R_1 + R_2) = 2, \quad \dim(R_1 \cap R_2) = -1, \quad \dim(R_1) = \dim(R_2) = 1.$$

Sin embargo, en el proyectivo $R_1 \cap R_2$ no es vacío porque, al ser paralelas, tienen la misma variedad de dirección y, por tanto, R_1 y R_2 se cortan en la recta del infinito (de ahí, precisamente, su nombre).

Definición.– Dadas dos variedades afines Y_1 e Y_2 decimos que son paralelas cuando $D(Y_1) \subset D(Y_2)$ o viceversa. Dicho de otro modo, cuando $\overline{Y_1} \cap H_\infty \subset \overline{Y_2} \cap H_\infty$ (o viceversa). Esto se denota $Y_1 \parallel Y_2$.

Teorema de la dimensión para variedades afines.– Sean Y_1, Y_2 variedades lineales afines. Entonces:

(a) Si $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$,

$$\dim(Y_1 + Y_2) + \dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2).$$

(b) Si $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$,

$$\dim(Y_1 + Y_2) + \dim(Y_1 \cap Y_2) + \dim_V(D(Y_1) \cap D(Y_2)) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2).$$

Dicho de otro modo, teniendo en cuenta la relación entre las dimensiones de las variedades de dirección,

$$\dim(Y_1 + Y_2) + \dim([D(Y_1)] \cap [D(Y_2)]) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2).$$

Demostración.– Es muy simple a partir del caso proyectivo. Por ejemplo, en el caso no disjunto,

$$\begin{aligned} \dim(Y_1) + \dim(Y_2) &= \dim(\overline{Y_1}) + \dim(\overline{Y_2}) \\ &= \dim(\overline{Y_1 + Y_2}) + \dim(\overline{Y_1 \cap Y_2}) \\ &= \dim(Y_1 + Y_2) + \dim(Y_1 \cap Y_2) \end{aligned}$$

En el caso disjunto, notemos que

$$\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \subset H_\infty \implies \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} = [D(Y_1)] \cap [D(Y_2)].$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \dim(Y_1) + \dim(Y_2) &= \dim(\overline{Y_1}) + \dim(\overline{Y_2}) \\ &= \dim(\overline{Y_1 + Y_2}) + \dim(\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}) \\ &= \dim(Y_1 + Y_2) + \dim([D(Y_1)] \cap [D(Y_2)]) \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración. *Q.E.D.*

2.8 Sistemas de referencia (I).

El problema de dotar a una variedad proyectiva de coordenadas proyectivas; esto es, definidas salvo producto por un escalar, es más complejo de lo que podría parecer. En efecto, dada una variedad Z de dimensión r , una base $\{P_0, \dots, P_r\}$ de Z y un punto $Q \in Z$, no es posible definir de forma consistente las coordenadas de Q respecto de la base anterior, ya que hay que pasar al espacio vectorial k^{n+1} y la forma de hacerlo no es única.

Ejemplo.– Tomemos $H_\infty : \{x_0 = 0\} \subset \mathbf{P}^2(k)$, generado por $P = [0 : 1 : 0]$ y $Q = [0 : 0 : 1]$. Tomamos $R = [0 : 1 : 2] \in H_\infty$ y observamos que

$$(0, 1, 2) = (0, 1, 0) + 2(0, 0, 1), \quad (0, 1, 2) = (-1)(0, -1, 0) + 1(0, 0, 2),$$

donde hemos escrito un vector de la clase de R de dos formas distintas (no proporcionales) como suma de vectores de las clases de P y Q . Con el mismo derecho podemos decir que las coordenadas de R respecto de $\{P, Q\}$ son $[1 : 2]$ ó $[-1 : 1]$.

La solución está en fijar un punto más, con coordenadas convenidas, de forma que sólo haya una elección posible para los vectores que podemos utilizar. Este punto se suele denominar unidad y las coordenadas que se escogen para él son $[1 : 1 : \dots : 1]$. Veamos cómo se hace esto en concreto.

Definición.– Dada una variedad lineal proyectiva $Z = \pi(L) \subset \mathbf{P}^n(k)$ de dimensión r (eventualmente $Z = \mathbf{P}^n(k)$), un conjunto de $r + 2$ puntos P_0, \dots, P_{r+1} se dicen un sistema de referencia proyectivo de Z cuando $r + 1$ cualesquiera de dichos puntos es base de Z .

Proposición.– Sea $Z = \pi(L)$ una variedad proyectiva de dimensión r , $\{P_0, P_1, \dots, P_{r+1}\}$ un sistema de referencia de $Z \subset \mathbf{P}^n(k)$. Entonces existen $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{r+1} \in k^{n+1}$ verificando:

- (a) $\pi(\underline{u}_i) = P_i$.
- (b) $\underline{u}_0 + \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_r = \underline{u}_{r+1}$.

Además, para cualquier otra $(r + 2)$ -upla de vectores $\underline{v}_0, \dots, \underline{v}_{r+1}$ cumpliendo (a) y (b), se verifica que existe $\alpha \in k$ no nulo con

$$\underline{u}_0 = \alpha \underline{v}_0, \underline{u}_1 = \alpha \underline{v}_1, \dots, \underline{u}_{r+1} = \alpha \underline{v}_{r+1}.$$

Más aún, si denotamos $\mathcal{B}_L = \{\underline{u}_0, \dots, \underline{u}_r\}$, para cualquier punto $Q \in Z$, si $\underline{w}, \underline{w}'$ son vectores que verifican $\pi(\underline{w}) = \pi(\underline{w}') = Q$, entonces existe $\lambda \in k$ no nulo tal que

$$(\underline{w})_{\mathcal{B}_L} = \lambda (\underline{w}')_{\mathcal{B}_L}.$$

Demostración.– Para probar la primera afirmación tomamos coordenadas

$$P_0 = [a_{00} : \dots : a_{n0}], \dots, P_r = [a_{0r} : \dots : a_{nr}], P_{r+1} = [b_0 : \dots : b_n].$$

Entonces los vectores $\underline{u}_i, i = 0, \dots, r + 1$ han tener a su vez coordenadas

$$\underline{u}_i = \mu_i(a_{0i}, \dots, a_{ni}), \quad \underline{u}_{r+1} = \nu(b_0, \dots, b_n),$$

para ciertos μ_0, \dots, μ_r, ν escalares no nulos. Si imponemos que $\underline{u}_0 + \dots + \underline{u}_r = \underline{u}_{r+1}$ obtenemos el sistema de ecuaciones (en μ_0, \dots, μ_r, ν)

$$\begin{array}{ccccccc} a_{00}\mu_0 & + & \dots & + & a_{0r}\mu_r & - & \nu b_0 & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n0}\mu_0 & + & \dots & + & a_{nr}\mu_r & - & \nu b_n & = & 0 \end{array}$$

que es compatible por ser homogéneo. Pero además la matriz de los coeficientes tiene rango $r + 1$, ya que $\underline{u}_0, \dots, \underline{u}_{r+1}$ generan L , que tiene dimensión $r + 1$.

Esto implica que, al tener $r + 2$ incógnitas, las soluciones del sistema han de ser de la forma

$$\mu_i = a_i t, \quad \nu = b t, \quad \text{para cualquier } t \in k,$$

lo que prueba la primera afirmación, tomando

$$\underline{u}_i = a_i(a_{0i}, \dots, a_{ni}), \quad \underline{u}_{r+1} = b(b_0, \dots, b_n).$$

Notemos que todos los a_i y b han de ser distintos de 0. De no ser así (por ejemplo, $a_0 = 0$) tendríamos

$$\underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_r = \underline{u}_{r+1},$$

con lo que $\{P_1, \dots, P_{r+1}\}$ sería proyectivamente dependiente, contra las hipótesis. La segunda afirmación es también trivial a partir de lo ya probado.

Tomamos ahora \underline{w} tal que $\pi(\underline{w}) = Q$ y, dado que \underline{w} está en L , que está generado por $\underline{u}_0, \dots, \underline{u}_r$, podemos escribir

$$\underline{w} = \alpha_0 \underline{u}_0 + \dots + \alpha_r \underline{u}_r$$

de forma única. Si escogemos otro vector \underline{w}' que verifique $\pi(\underline{w}') = Q$ necesariamente existe δ tal que $\underline{w} = \delta \underline{w}'$ y, así,

$$\underline{w}' = \delta (\alpha_0 \underline{u}_0 + \dots + \alpha_r \underline{u}_r),$$

de donde tenemos el enunciado, por la unicidad de las coordenadas de un vector (en este caso, \underline{w} y \underline{w}') respecto de una base (en este caso $\underline{u}_0, \dots, \underline{u}_r$).

Definición.— En las condiciones anteriores, $[\alpha_0 : \dots : \alpha_r]$ se denominan las coordenadas de Q respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_r, P_{r+1}\}$, notadas $(Q)_{\mathcal{R}}$.

Observación.— Notemos que, por la proposición anterior, estas coordenadas son únicas, salvo producto por escalar: de ahí que usemos la misma notación que para los puntos proyectivos. En particular, las coordenadas de un punto de $\mathbf{P}^n(k)$ son las coordenadas respecto del sistema de referencia

$$\mathcal{R} = \{[1 : 0 : \dots : 0], [0 : 1 : \dots : 0], \dots, [0 : 0 : \dots : 1], [1 : 1 : \dots : 1]\},$$

denominado sistema de referencia canónico de $\mathbf{P}^n(k)$.

Definición.— Dado un sistema de referencia $\mathcal{R}_Z = \{P_0, \dots, P_r, P_{r+1}\}$ de una variedad $Z = \pi(L) \subset \mathbf{P}^n(k)$, la base $\{\underline{u}_0, \dots, \underline{u}_r\}$ del enunciado anterior se denomina base normalizada del sistema de referencia \mathcal{R}_Z .

Observación.— La base normalizada, pues, debe verificar,

$$\pi(\underline{u}_i) = P_i, \quad i = 0, \dots, r; \quad \pi(\underline{u}_0 + \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_r) = P_{r+1},$$

y es única salvo producto de todos sus elementos por un mismo escalar no nulo.

Notación.— El punto $(r + 2)$ -ésimo de un sistema de referencia se suele denominar punto unidad del sistema y denotarse por U . Sus coordenadas respecto del sistema al que pertenece son siempre $[1 : 1 : \dots : 1]$. Notemos que este punto sólo sirve para determinar una base normalizada. Una vez escogida ésta, U es irrelevante a efectos de cálculo de coordenadas.

2.9 Sistemas de referencia (II).

En esta clase complementaremos lo ya visto sobre sistemas de referencia proyectivos con algunos temas adyacentes, como cambios de sistemas de referencia y relación con las coordenadas usuales. Veremos el caso de los sistemas de referencia afines, como caso particular de los sistemas de referencia proyectivos.

Observación.— Sea $Z = \pi(L) \subset \mathbf{P}^n(k)$ una variedad lineal proyectiva de dimensión r , $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_r; U\}$ un sistema de referencia proyectivo de Z , $\mathcal{B} = \{\underline{u}_0, \dots, \underline{u}_r\}$ una base normalizada de \mathcal{R} , $\underline{u}_i = (a_{0i}, \dots, a_{ni})$ para $i = 0, \dots, r$. Entonces $Q = [x_0 : \dots : x_n] \in Z$ verifica

$$(Q)_{\mathcal{R}} = [z_0 : \dots : z_r] \implies \lambda \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

para un cierto $\lambda \in k$ no nulo.

Proposición.— Sea $Z \subset \mathbf{P}^n(k)$ una variedad lineal proyectiva de dimensión r , \mathcal{R} y \mathcal{R}' sistemas de referencia proyectivos de Z , \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases normalizadas cualesquiera de \mathcal{R} y \mathcal{R}' respectivamente. Entonces para todo $Q \in Z$ se verifica

$$\left. \begin{array}{l} (Q)_{\mathcal{R}} = [x_0 : \dots : x_r] \\ (Q)_{\mathcal{R}'} = [y_0 : \dots : y_r] \end{array} \right\} \iff M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix},$$

para cierto $\lambda \in k$ no nulo.

Demostración.— Evidente, ya que las coordenadas de $Q = \pi(\underline{v})$ respecto de \mathcal{R} son las coordenadas de \underline{v} respecto de una base normalizada de \mathcal{R} . *Q.E.D.*

Definición.— Dada una variedad lineal afín $Y = Z \cap \mathbf{A}^n(k)$, un sistema de referencia afín de Y es un conjunto de la forma $\{P; \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$, con $P \in Y$, $\underline{u}_i \in D(Y)$, de forma que $\{[P], [\underline{u}_1], \dots, [\underline{u}_r]\}$ sea base de Z .

Observación.— Si $Y = Z \cap \mathbf{A}^n(k)$ tiene dimensión r , un sistema de referencia afín de Y , $\mathcal{R}_Y = \{P; \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ con $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\underline{u}_i = \overrightarrow{(a_{1i}, \dots, a_{ni})}$, determina unívocamente un sistema de referencia proyectivo de Z

$$\mathcal{R}_Z = \{[P], [\underline{u}_1], \dots, [\underline{u}_r]; U\},$$

que es el que tiene por base normalizada

$$\mathcal{B} = \{(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n), (0, a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, (0, a_{1r}, \dots, a_{nr})\}.$$

Dado entonces el sistema de referencia afín \mathcal{R}_Y y el punto $Q = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in Y$, si $(Q)_{\mathcal{R}_Y} = [x_0 : \dots : x_r]$, eso quiere decir que existe $\lambda \in k$ no nulo tal que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

de donde ha de ser $x_0 \neq 0$.

Definición.– En las condiciones anteriores, las coordenadas de Q respecto del sistema de referencia \mathcal{R}_Y son

$$(Q)_{\mathcal{R}_Y} = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_r}{x_0} \right),$$

esto es, las r últimas coordenadas de $[Q]$ respecto de \mathcal{R}_Y haciendo la primera coordenada igual a 1. Por esto, en estas condiciones notaremos $[Q]_{\mathcal{R}_Y}$ las coordenadas proyectivas de $[Q]$ respecto de \mathcal{R}_Z cuya primera componente es precisamente 1.

Veamos por último cómo es posible calcular las coordenadas de Q respecto de \mathcal{R}_Y sin pasar por la clausura proyectiva y usando sólo objetos afines.

Proposición.– En las condiciones anteriores, las coordenadas de $Q \in Y$ son las coordenadas de \overrightarrow{PQ} respecto de la base de $D(Y)$ dada por $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$.

Demostración.– De la observación anterior, con las mismas notaciones, si $(Q)_{\mathcal{R}_Y} = (x_1, \dots, x_r)$, entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\beta_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^r x_j a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

y, agrupando,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)} = \sum_{j=1}^r x_j \overrightarrow{(a_{1j}, \dots, a_{nj})},$$

que es lo que pretendíamos probar. *Q.E.D.*

Observación.– Dados dos sistemas de referencia afines \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 de una variedad Y , la matriz de cambio de base entre las bases normalizadas que inducen \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 se denomina matriz de cambio de base de \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2 , se denota $M(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ y verifica la igualdad

$$M(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)[Q]_{\mathcal{R}_1}^t = [Q]_{\mathcal{R}_2}^t.$$

En estas condiciones es obvio que, si $\mathcal{R}_1 = \{O_1; \mathcal{B}_1\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{O_2; \mathcal{B}_2\}$,

$$M(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline (O_1)_{\mathcal{R}_2}^t & M(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) & & \end{array} \right).$$

2.10 El espacio proyectivo dual.

El espacio de formas lineales (esto es, de polinomios homogéneos de grado uno) sobre k es, inmediatamente, un espacio vectorial, con la suma y el producto por escalares habituales. Una forma lineal distinta de 0 en $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ define un hiperplano en $\mathbf{P}^n(k)$,

$$H : a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

Sin embargo, dos formas lineales distintas pueden definir el mismo hiperplano: concretamente $a_0x_0 + \dots + a_nx_n$ y $b_0x_0 + \dots + b_nx_n$ definen el mismo hiperplano si y sólo si existe $\lambda \in k$ no nulo tal que $a_i = \lambda b_i$. Esta situación es claramente paralela a la relación entre vectores de k^{n+1} y puntos de $\mathbf{P}^n(k)$. Esto justifica la siguiente definición.

Definición.— Definimos el espacio proyectivo dual de $\mathbf{P}^n(k)$, notado $\mathbf{P}^n(k)^*$ como el conjunto de hiperplanos de $\mathbf{P}^n(k)$.

Observación.— Denotemos por V^* el espacio vectorial de formas lineales en k en n variables x_1, \dots, x_n . Consideramos entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \pi^* : V^* \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbf{P}^n(k)^* \\ a_0x_0 + \dots + a_nx_n &\longmapsto a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0, \end{aligned}$$

que está bien definida, porque hemos retirado el vector nulo de V^* (que no correspondería a ningún hiperplano de $\mathbf{P}^n(k)$).

Además notemos que π^* , al igual que $\pi : k^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^n(k)$, lleva dos originales a la misma imagen si y sólo si los originales son proporcionales. Por ello, $\mathbf{P}^n(k)^*$ también se denomina el espacio proyectivo asociado al espacio dual de k^{n+1} .

Observación.— Podemos establecer una biyección

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n(k)^* &\longleftrightarrow \mathbf{P}^n(k) \\ H : a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 &\longmapsto [a_0 : \dots : a_n] \end{aligned}$$

y, así, podremos hablar de (in)dependencia proyectiva y de variedades lineales de $\mathbf{P}^n(k)^*$.

De esta forma, diremos que los puntos $H_1, \dots, H_t \in \mathbf{P}^n(k)^*$ o, equivalentemente, los hiperplanos H_1, \dots, H_t de $\mathbf{P}^n(k)$ son linealmente (in)dependientes cuando, fijado un sistema de referencia, exista (respectivamente no exista) una combinación lineal no trivial de las ecuaciones de H_1, \dots, H_t que nos dé la identidad $0 = 0$.

Definición.— Dada $Z \subset \mathbf{P}^n(k)$ variedad lineal proyectiva, definimos el dual de Z como

$$\star(Z) = \{H \in \mathbf{P}^n(k)^* \mid Z \subset H\}.$$

Análogamente, si $L^* \subset \mathbf{P}^n(k)^*$ es una variedad lineal proyectiva en el espacio dual, definimos el dual de L^* como

$$\star(L^*) = \bigcap_{H \in L^*} H,$$

esto es, el conjunto de puntos proyectivos que están en todos los puntos (hiperplanos) de L^* .

Proposición.— En las condiciones anteriores, dadas variedades lineales proyectivas $Z_1, Z_2 \subset \mathbf{P}^n(k)$,

- (a) Si $Z_1 \subset Z_2$, $\star(Z_1) \supset \star(Z_2)$.
- (b) $\dim(\star(Z_1)) = n - (\dim(Z_1) + 1)$.
- (c) $\star(\star(Z_1)) = Z_1$.
- (d) $\star(Z_1 \cap Z_2) = \star(Z_1) + \star(Z_2)$.
- (e) $\star(Z_1 + Z_2) = \star(Z_1) \cap \star(Z_2)$.

Demostración.— El enunciado (a) es elemental por definición de \star . Para demostrar (b), podemos comenzar suponiendo que una base de $\star(Z_1)$ es $\{H_0, \dots, H_l\}$, lo cual implica que $Z_1 = H_0 \cap \dots \cap H_l$, con H_0, \dots, H_l linealmente independientes como puntos de $\mathbf{P}^n(k)^*$. Esto quiere decir que Z_1 viene definida por un conjunto de $l + 1$ ecuaciones linealmente independientes, por lo que

$$\dim(Z_1) = n - (l + 1) \implies l = \dim(\star(Z_1)) = n - (\dim(Z_1) + 1).$$

Para demostrar (c), notemos que $\star(\star(Z_1))$ es el conjunto de puntos que están en todos los hiperplanos que contienen a Z_1 . Por tanto $Z_1 \subset \star(\star(Z_1))$. Pero, como

$$\dim(\star(\star(Z_1))) = n - \dim(\star(Z_1)) - 1 = n - (n - \dim(Z_1) - 1) - 1 = \dim(Z_1),$$

tenemos dos variedades con la misma dimensión, una contenida en la otra. Por tanto, deben ser iguales.

Hagamos por último (d) y (e). Para ello, escribimos

$$\star(Z_1) = \langle H_1, \dots, H_s \rangle, \quad \star(Z_2) = \langle H'_1, \dots, H'_t \rangle,$$

y entonces

$$Z_1 \cap Z_2 = H_1 \cap \dots \cap H_s \cap H'_1 \cap \dots \cap H'_t$$

y esto implica que

$$\begin{aligned} \star(Z_1 \cap Z_2) &= \langle H_1, \dots, H_s, H'_1, \dots, H'_t \rangle \\ &= \langle H_1, \dots, H_s \rangle + \langle H'_1, \dots, H'_t \rangle \\ &= \star(Z_1) + \star(Z_2). \end{aligned}$$

Como $Z_1, Z_2 \subset Z_1 + Z_2$, tenemos por (a) que

$$\star(Z_1), \star(Z_2) \supset \star(Z_1 + Z_2) \implies \star(Z_1 + Z_2) \subset \star(Z_1) \cap \star(Z_2),$$

pero un hiperplano de $\star(Z_1) \cap \star(Z_2)$ ha de contener tanto a Z_1 como a Z_2 , por lo que está en $\star(Z_1 + Z_2)$. *Q.E.D.*

Corolario.— Dadas variedades lineales proyectivas $H, L \subset \mathbf{P}^n(k)^*$,

- (a) Si $H \subset L$, $\star(H) \supset \star(L)$.
- (b) $\dim(\star(H)) = n - (\dim(H) + 1)$.
- (c) $\star(\star(H)) = H$.
- (d) $\star(H \cap L) = \star(H) + \star(L)$.
- (e) $\star(H + L) = \star(H) \cap \star(L)$.

Ejemplos.— Algunos ejemplos elementales de duales son los siguientes:

- (a) En $\mathbf{P}^2(k)$, el dual de un punto es el conjunto de rectas que pasan por él. En $\mathbf{P}^2(k)^*$, el dual de un punto (que es una recta en $\mathbf{P}^2(k)$) es el conjunto de hiperplanos del dual que lo contienen: esto es, el conjunto de puntos de $\mathbf{P}^2(k)$ que están en la recta.
- (b) En $\mathbf{P}^3(k)$, el dual de un punto es el conjunto de planos que pasan por él. El dual de una recta Z es el conjunto de planos que la contienen, que es una recta en $\mathbf{P}^3(k)^*$, ya que

$$\dim(\star(Z)) = 3 - \dim(Z) - 1 = 1.$$

2.11 El principio de dualidad: Teoremas de Pappus y Desargues.

El principio de dualidad es una de las más poderosas herramientas del espacio proyectivo y permite, dado un enunciado, establecer otro (el enunciado dual) completamente equivalente a aquél, mediante la aplicación de operador \star a todas las variedades y operaciones involucradas. Esto se conoce como principio de dualidad.

Ejemplo.— Veamos algunos ejemplos de la aplicación de \star en $\mathbf{P}^2(k)$. La afirmación de que tres puntos P, Q, R están alineados equivale a $R \subset P + Q$. Por tanto es dual a $\star(R) \supset \star(P) \cap \star(Q)$, esto es, a que sus tres rectas duales $\star(P), \star(Q), \star(R)$ son concurrentes.

En $\mathbf{P}^3(k)$ las rectas son autoduales (esto es, el dual de una recta es una recta) por lo que no ofrecen mucha información. Pero, por ejemplo, la afirmación de que cuatro puntos son coplanarios es equivalente a la de que sus planos duales se cortan en el mismo punto. De igual forma tres puntos del espacio son colineales (la dimensión de su suma es 1) si y sólo si sus planos duales se cortan en una recta (la dimensión de su intersección es $3 - 1 - 1 = 1$).

Veremos dos ejemplos concretos de aplicación del principio de dualidad, que son resultados geométricos clásicos: los Teoremas de Pappus y Desargues. Además, ilustraremos cómo una buena elección de un sistema de referencia puede reducir una demostración a un simple cálculo. Lo idóneo es dejar que, una vez probados los teoremas, los alumnos desarrollen constructivamente los enunciados duales.

Teorema de Pappus.— Sean L y L' rectas de $\mathbf{P}^n(k)$ tales que $L \cap L' = \{O\}$. Escogemos puntos $A, B, C \in L, A', B', C' \in L'$ todos distintos de O y definimos

$$P = AB' \cap A'B, \quad Q = AC' \cap A'C, \quad R = BC' \cap B'C.$$

Entonces P , Q y R están alineados.

Demostración.— Dado que todas las variedades están dentro del plano $L + L'$, podemos suponer sin problemas que el espacio ambiente es $L + L' = \mathbf{P}^2(k)$. Fijemos un sistema de referencia, para lo cual necesitamos cuatro puntos de forma que no haya tres de ellos alineados. Una elección tan sensata como otra cualquiera es

$$\mathcal{R} = \{A, B, A'; B'\},$$

así que, identificando puntos y rectas con sus coordenadas y ecuaciones respecto de \mathcal{R} (aunque no son lo mismo), tenemos

$$L : x_2 = 0, \quad L' : x_0 - x_1 = 0, \quad \implies O = [1 : 1 : 0]$$

$$\begin{aligned} A &= [1 : 0 : 0], & B &= [0 : 1 : 0], & C &= [1 : \lambda : 0] \text{ con } \lambda \in k \setminus \{0\} \\ A' &= [0 : 0 : 1], & B' &= [1 : 1 : 1], & C' &= [\mu : \mu : 1] \text{ con } \mu \in k \setminus \{0, 1\} \end{aligned}$$

Así, por cálculo directo,

$$\left. \begin{array}{l} AB' : \quad x_1 - x_2 = 0 \\ A'B : \quad x_0 = 0 \end{array} \right\} \implies P = [0 : 1 : 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} AC' : \quad x_1 - \mu x_2 = 0 \\ A'C : \quad \lambda x_0 - x_1 = 0 \end{array} \right\} \implies Q = [\mu : \lambda\mu : \lambda]$$

$$\left. \begin{array}{l} BC' : \quad x_0 - \mu x_2 = 0 \\ B'C : \quad \lambda x_0 - x_1 - (\lambda - 1)x_2 = 0 \end{array} \right\} \implies R = [\mu : \lambda(\mu - 1) + 1 : 1]$$

Y simplemente resta probar que P, Q, R están alineados, lo cual es directo, porque

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \mu & \lambda\mu & \lambda \\ \mu & \lambda(\mu - 1) + 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Q.E.D.

El Teorema de Pappus dual queda entonces como sigue (mantenemos las mismas notaciones para facilitar la comprensión de la dualidad).

Teorema de Pappus dual.— Sean L y L' puntos de $\mathbf{P}^n(k)$, $O = L + L'$ la recta que los une. Escogemos rectas A, B, C pasando por L ; A', B', C' pasando por L' todas distintas de O y definimos las rectas

$$P = (A \cap B') + (A' \cap B), \quad Q = (A \cap C') + (A' \cap C), \quad R = (B \cap C') + (B' \cap C).$$

Entonces las rectas P, Q y R son concurrentes.

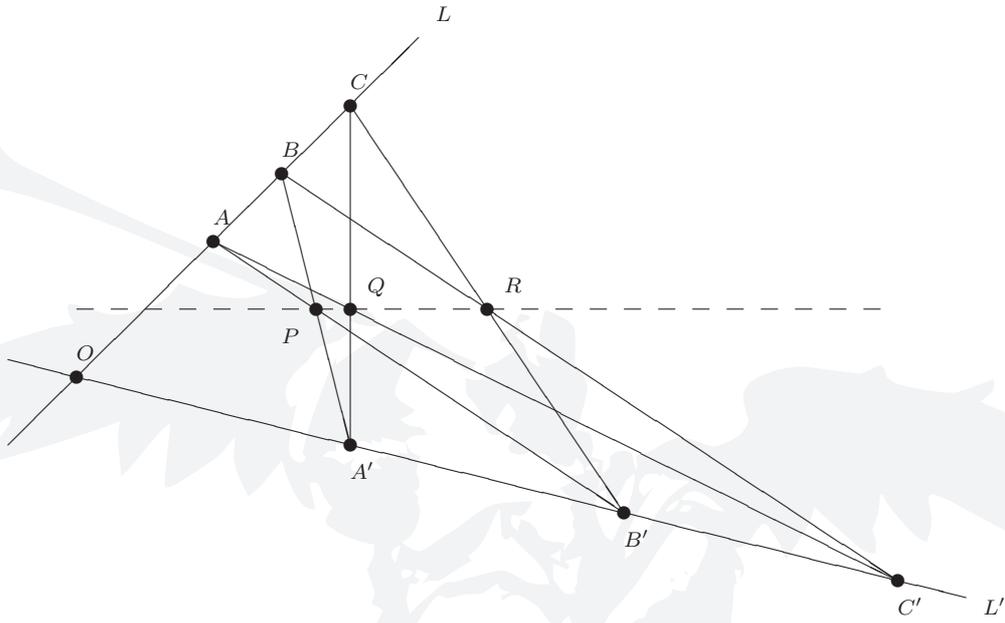


Figura 2.1: Teorema de Pappus

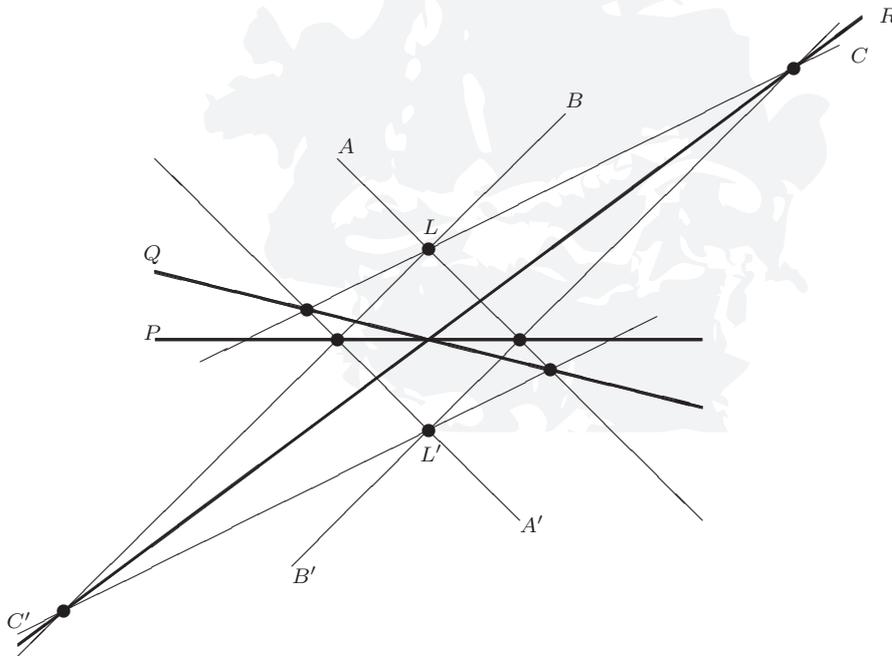


Figura 2.2: Teorema de Pappus dual

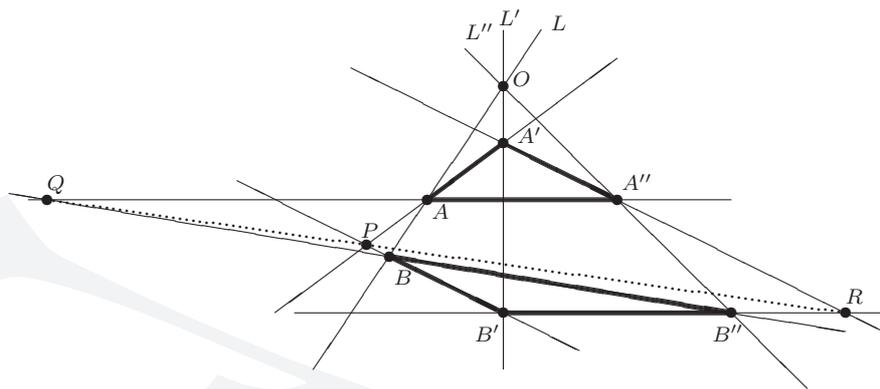


Figura 2.3: Teorema de Desargues

Teorema de Desargues.– Sean L, L', L'' tres rectas concurrentes en O . Tomamos $A, B \in L$, $A', B' \in L'$ y $A'', B'' \in L''$ todos distintos de O . Consideramos así mismo los puntos

$$P = AA' \cap BB', \quad Q = AA'' \cap BB'', \quad R = A'A'' \cap B'B''.$$

Entonces P, Q y R están alineados.

Demostración.– La demostración sigue los mismos pasos del Teorema de Pappus: escoger un sistema de referencia adecuado, calcular las coordenadas de los puntos P, Q y R y comprobar el enunciado. De nuevo todas las variedades están contenidas en el plano que contiene a L, L' y L'' . Una elección posible, en este caso, es

$$\mathcal{R} = \{A, A', A''; O\},$$

y entonces, como antes,

$$B = [1 : \alpha : \alpha], \quad B' = [\beta : 1 : \beta], \quad B'' = [\gamma : \gamma : 1], \quad \alpha, \beta, \gamma \in k \setminus \{0, 1\}.$$

Con estas coordenadas podemos calcular

$$P = \left[\frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha(\beta - 1)} : 1 : 0 \right], \quad Q = \left[\frac{\gamma(\alpha - 1)}{\alpha(\gamma - 1)} : 0 : 1 \right], \quad R = \left[0 : \frac{\gamma(\beta - 1)}{\beta(\gamma - 1)} : 1 \right],$$

que son colineales, como se puede comprobar fácilmente. *Q.E.D.*

Observación.– Mucho más interesante que la prueba es que el alumno sea capaz de dar esta otra versión.

Teorema de Desargues dual.– Sean L, L', L'' tres puntos alineados. Tomamos A, B rectas pasando por L , A', B' rectas pasando por L' y A'', B'' rectas pasando por L'' , todas ellas distintas de LL' . Consideramos así mismo las rectas

$$P = (A \cap A') + (B \cap B'), \quad Q = (A \cap A'') + (B \cap B''), \quad R = (A' \cap A'') + (B' \cap B'').$$

Entonces P, Q y R son concurrentes.

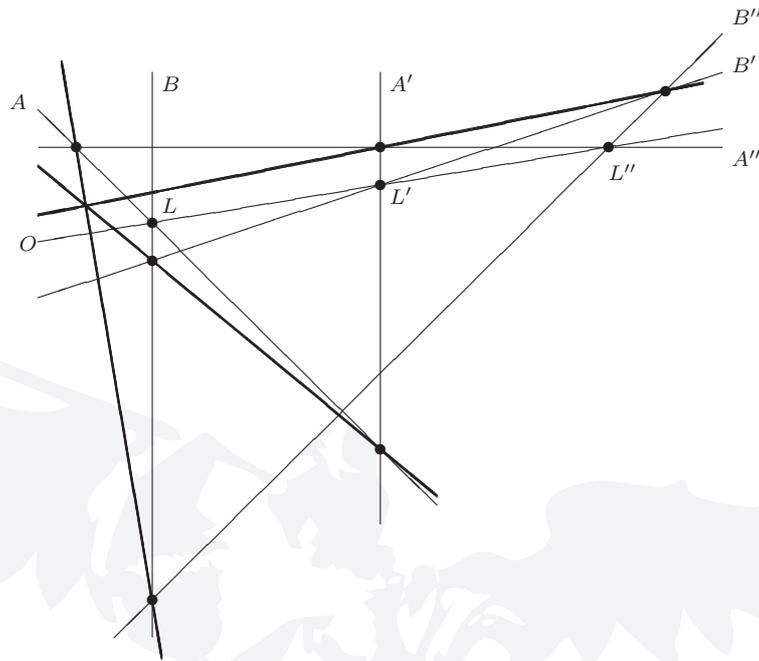


Figura 2.4: Teorema de Desargues dual

Tema 3

Homografías y afinidades

3.1 Aplicaciones proyectivas (I).

Definición.– Sean $Z_1 = \pi(L_1) \subset \mathbf{P}^n(k)$ y $Z_2 = \pi(L_2) \subset \mathbf{P}^m(k)$ dos variedades proyectivas. Entonces una aplicación $F : Z_1 \rightarrow Z_2$ se dice una aplicación proyectiva si existe $f \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ inyectivo, verificando que, para todo $\underline{u} \in L_1, \underline{u} \neq \underline{0}$,

$$\pi(f(\underline{u})) = F(\pi(\underline{u})).$$

En estas condiciones, F se dice la aplicación proyectiva asociada al homomorfismo f , y se denota $F = \pi(f)$.

Observación.– Dicho de otro modo, una aplicación proyectiva no es más que trasladar a las clases de equivalencia que son los puntos proyectivos un homomorfismo de espacios vectoriales. Claro que el paso a clases de equivalencia puede variar ciertos aspectos.

Proposición.– Sean L_1, L_2 como antes, $f, g \in \text{Hom}(L_1, L_2)$. Entonces $\pi(f) = \pi(g)$ si y sólo si existe $\lambda \in k$ no nulo tal que $f = \lambda g$.

Demostración.– Si $f = \lambda g$, llamamos $F = \pi(f)$, $G = \pi(g)$ y es obvio que para cualquier $\underline{u} \in L_1$,

$$F(\pi(\underline{u})) = \pi(f(\underline{u})) = \pi(\lambda g(\underline{u})) = \pi(g(\underline{u})) = G(\pi(\underline{u})),$$

de donde F y G coinciden en $\pi(L_1) = Z_1$, luego son iguales.

Supongamos ahora que $F = \pi(f) = \pi(g) = G$. Fijemos un vector $\underline{u} \in L_1, \underline{u} \neq \underline{0}$. Entonces

$$\pi(g(\underline{u})) = G(\pi(\underline{u})) = F(\pi(\underline{u})) = \pi(f(\underline{u})),$$

de donde ha de existir $\lambda \in k$ no nulo con $f(\underline{u}) = \lambda g(\underline{u})$. Resta probar que λ no depende de \underline{u} .

Tomemos entonces $\underline{v}, \underline{w} \in L_1 \setminus \{0\}$. Si \underline{v} y \underline{w} fueran linealmente dependientes, $\underline{v} = \alpha \underline{w}$, y entonces

$$f(\underline{w}) = \lambda g(\underline{w}) \implies \alpha f(\underline{w}) = \lambda \alpha g(\underline{w}) \implies f(\alpha \underline{w}) = \lambda g(\alpha \underline{w})$$

y así $f(\underline{v}) = \lambda g(\underline{v})$.

Así pues, supongamos que \underline{v} y \underline{w} son linealmente independientes y escribamos

$$f(\underline{v}) = \lambda g(\underline{v}), \quad f(\underline{w}) = \mu g(\underline{w}), \quad f(\underline{v} + \underline{w}) = \nu g(\underline{v} + \underline{w}),$$

y tratemos de probar que $\lambda = \mu = \nu$. Se tiene que

$$g(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = f(\underline{v} + \underline{w}) = \nu g(\underline{v} + \underline{w}) = g(\nu \underline{v} + \nu \underline{w}),$$

y entonces $(\lambda - \nu)\underline{v} + (\mu - \nu)\underline{w} = \underline{0}$. Por tanto ha de ser $\lambda = \nu = \mu$. *Q.E.D.*

Observación.— Consideremos entonces $\pi(f) = F : Z_1 \longrightarrow Z_2$. Queremos ahora establecer una forma cómoda para hallar la imagen de un punto $P \in Z_1$, de forma similar a como hallábamos la imagen de un vector por un homomorfismo.

Lo primero es fijar sistemas de referencia en Z_1 y Z_2 , que notaremos \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 , con bases normalizadas respectivas \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 . Tomamos ahora un punto $P = \pi(\underline{u}) \in Z_1$ y sea $Q = F(P)$. En esta situación, recordemos que

- Las coordenadas de P respecto de \mathcal{R}_1 son, salvo producto por un escalar, las coordenadas de \underline{u} respecto de \mathcal{B}_1 .
- Las coordenadas de Q respecto de \mathcal{R}_2 son, salvo producto por escalar, las de $f(\underline{u})$ respecto de \mathcal{B}_2 .
- Las coordenadas de $f(\underline{u})$ respecto de \mathcal{B}_2 son $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)(\underline{u})_{\mathcal{B}_1}^t$.

Por tanto, si notamos $(P)_{\mathcal{R}_1} = [x_0 : \dots : x_r]$, existen y_0, \dots, y_s tales que $(Q)_{\mathcal{R}_2} = [y_0 : \dots : y_s]$ y

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}.$$

Esto, combinado con la proposición anterior, prueba el siguiente resultado.

Proposición.— Dada una aplicación proyectiva $F : Z_1 \longrightarrow Z_2$ y sistemas de referencia proyectivos $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ de Z_1 y Z_2 , con bases normalizadas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, se verifica que

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)(P)_{\mathcal{R}_1}^t = (F(P))_{\mathcal{R}_2}^t,$$

donde f es cualquier homomorfismo que verifique $\pi(f) = F$.

Observación.— La matriz $A = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ parece una candidata razonable a ser la matriz de la aplicación F (respecto de \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2). No obstante, notemos que cualquier matriz de la forma λA , para $\lambda \neq 0$ también vale.

Definición.— En las condiciones anteriores, la clase-matriz de la aplicación proyectiva F respecto de \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 es el conjunto de todas las matrices de la forma $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$, con $\pi(f) = F$, notado $M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F)$.

Observación.— Por los resultados de esta lección, fijado un cierto homomorfismo f y considerada $A = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$, se tiene que

$$M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F) = \{\lambda A \mid \lambda \in k \setminus \{0\}\}.$$

De la misma forma, pues, que vectores proporcionales dan el mismo punto proyectivo, matrices proporcionales (esto es, homomorfismos proporcionales) dan la misma aplicación entre variedades proyectivas. En concreto, la relación

$$A \simeq B \iff \exists \lambda \in k \setminus \{0\} \text{ tal que } A = \lambda B$$

es de equivalencia en $\mathcal{M}(n \times m; k)$ y la clase–matriz $M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F)$ no es más que la clase de equivalencia de las matrices $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$, con las notaciones anteriores. Por ello también notaremos

$$M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F) = [A], \text{ para cualquier } A \in M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F).$$

3.2 Aplicaciones proyectivas (II): Homografías.

Ampliaremos ahora nuestro estudio de las aplicaciones proyectivas con algunas propiedades simples y el estudio de una clase concreta de aplicaciones muy útil: las homografías, que son la contrapartida proyectiva de los isomorfismos.

Observación.– Las aplicaciones proyectivas heredan las siguientes propiedades obvias de los homomorfismos de espacios vectoriales:

- (a) La composición de aplicaciones proyectivas es una aplicación proyectiva. En concreto, si tenemos $F : Z_1 \longrightarrow Z_2$ y $G : Z_2 \longrightarrow Z_3$ con sistemas de referencia respectivos $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$,

$$[M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3}(G \circ F)] = [M_{\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3}(G)] [M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F)],$$

con la multiplicación de clases–matriz definida de la forma obvia.

- (b) La restricción de una aplicación proyectiva a una subvariedad lineal de la variedad origen es una aplicación proyectiva.
- (c) La imagen por una aplicación proyectiva de una variedad lineal es una variedad lineal.
- (d) La imagen por una aplicación proyectiva de un conjunto de puntos proyectivamente dependientes es un conjunto proyectivamente dependiente.
- (e) Si \mathcal{R}'_1 y \mathcal{R}'_2 son dos nuevos sistemas de referencia en Z_1 y Z_2 ,

$$M_{\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2}(F) = [M(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)M(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)],$$

donde los conjuntos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$ son bases normalizadas correspondientes a $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}'_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}'_2$.

- (f) Si $\dim(Z_1) = \dim(Z_2)$, dados sistemas de referencia \mathcal{R}_1 en Z_1 y \mathcal{R}_2 en Z_2 existe una única aplicación proyectiva de Z_1 en Z_2 que transforma \mathcal{R}_1 en \mathcal{R}_2 . En particular, cuando $Z_1 = Z_2$ y $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, únicamente la identidad lleva cada punto del sistema de referencia en sí mismo.

Definición.– Una aplicación proyectiva $F : Z_1 \longrightarrow Z_2$ se dice una homografía si $F = \pi(f)$, con f un isomorfismo de k –espacios vectoriales.

Observación.– Obviamente, como f es único salvo producto por escalar no nulo, o todos los homomorfismos a los que está asociado F son isomorfismos, o no lo es ninguno. Notemos también que ha de tenerse $\dim(Z_1) = \dim(Z_2)$.

Además notemos que F también es biyectiva. En efecto, la sobreyectividad se obtiene de forma inmediata a partir de la de f . Para ver la inyectividad, supongamos que $F(P) = F(Q)$. Eso quiere decir que, si $P = \pi(\underline{u})$, $Q = \pi(\underline{v})$, existe un $\lambda \in k$ tal que

$$f(\underline{u}) = \lambda f(\underline{v}) = f(\lambda \underline{v}) \implies \underline{u} = \lambda \underline{v} \implies P = Q.$$

Observación.— Otras conclusiones sencillas son las siguientes, con las mismas notaciones que en la definición:

(a) Fijados sistemas de referencia, \mathcal{R}_1 en Z_1 y \mathcal{R}_2 en Z_2 , F es homografía si y sólo si

$$|A| \neq 0, \text{ para cualquier } A \in M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F).$$

(b) La composición de homografías es una homografía, cuya clase matriz se puede hallar con la fórmula que dimos al comienzo de la lección para aplicaciones proyectivas generales.

(c) La restricción de F a una subvariedad $W_1 \subset Z_1$ sigue siendo una homografía, si consideramos $F|_{W_1} : W_1 \longrightarrow F(W_1)$, pues ser homomorfismo se conserva al restringirse.

(d) La aplicación inversa de F , que existe por ser F biyectiva, también es una homografía, en este caso de Z_2 en Z_1 , notada F^{-1} y que verifica

$$M_{\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1}(F^{-1}) = [A^{-1}], \text{ para cualquier } A \in M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}(F).$$

Ejemplo.— Podemos establecer una homografía entre Z_3 , el dual a una recta Z_1 de $\mathbf{P}^3(k)$, y otra recta $Z_2 \subset \mathbf{P}^3(k)$ mediante la aplicación que lleva cada plano que contiene a Z_1 en su punto de intersección con Z_2 (notemos que $\dim(Z_3) = 3 - 2 = 1 = \dim(Z_2)$).

3.3 Puntos fijos de homografías.

Observación.— Un caso particularmente interesante de las homografías es el caso $F : Z \longrightarrow Z$, esto es, el correspondiente a los automorfismos de espacios vectoriales. Si $\dim(Z) = n$, entonces Z se puede identificar con $\mathbf{P}^n(k)$ y, por tanto, en adelante trataremos casi en exclusiva con homografías $F : \mathbf{P}^n(k) \longrightarrow \mathbf{P}^n(k)$. Por lo visto en Álgebra Lineal, las homografías forman un grupo para la composición de aplicaciones.

Definición.— Dada una homografía $F : \mathbf{P}^n(k) \longrightarrow \mathbf{P}^n(k)$, diremos que una variedad $W \subset \mathbf{P}^n(k)$ es fija para F si $F(W) = W$.

Observación.— De entre todas las subvariedades fijas que pueden aparecer en una homografía, nos fijaremos especialmente en dos: los puntos y los hiperplanos. En concreto, conviene tener muy en cuenta la diferencia entre hiperplano fijo (aquél que queda invariante por F) e hiperplano de puntos fijos (aquél cuyos puntos son todos invariantes por F), que es una condición mucho más restrictiva.

Proposición.— Fijado f un automorfismo de k^{n+1} tal que $\pi(f) = F$, las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) $P = \pi(\underline{u})$ es un punto fijo de F .
 (b) \underline{u} es un autovector de f .

Demostración.— Sea \mathcal{R} un sistema de referencia de $\mathbf{P}^n(k)$, $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ la matriz de f respecto de una base normalizada de \mathcal{R} .

$$F(P) = P \implies [M_{\mathcal{B}}(f)](P)_{\mathcal{R}}^t = (P)_{\mathcal{R}}^t,$$

para lo cual, si $(P)_{\mathcal{R}} = [a_0 : \dots : a_n]$, es necesario y suficiente que exista $\lambda \neq 0$ verificando

$$A(a_0 \dots a_n)^t = \lambda(a_0 \dots a_n)^t.$$

Q.E.D.

Observación.— Fijado entonces un sistema de referencia \mathcal{R} y una base normalizada \mathcal{B} , tomamos $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ y el cálculo de los puntos fijos de F se reduce al cálculo de autovectores de f usando A . Veamos algunas propiedades de los puntos fijos de F , usando lo ya conocido de los autovectores de f .

Dado λ autovalor de f , notaremos $Z_{\lambda} = \pi(V_{\lambda})$, esto es,

$$Z_{\lambda} = \{P = \pi(\underline{u}) \in Z \mid \underline{u} \text{ autovector no nulo asociado a } \lambda\},$$

y lo denominaremos el conjunto de puntos fijos asociado a λ .

Notemos que, como V_{λ} es un subespacio, si $\underline{u} \in V_{\lambda}$, $\alpha \underline{u} \in V_{\lambda}$ para todo $\alpha \in k$. De hecho, un sistema de ecuaciones de V_{λ} y, por tanto, de la variedad lineal proyectiva Z_{λ} es, como se vio en Álgebra Lineal,

$$(\lambda I_{n+1} - A) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{(n+1) \times 1}.$$

Proposición.— En las condiciones anteriores, se verifican las siguientes propiedades:

- (a) Si λ y μ son autovalores distintos de f , $Z_{\lambda} \cap Z_{\mu} = \emptyset$.
 (b) Si $W \subset \mathbf{P}^n(k)$ es una variedad lineal proyectiva tal que todos sus puntos son fijos, entonces todos están asociados a un único autovalor λ y su dimensión es estrictamente menor que la multiplicidad de λ .

Demostración.— Para probar (a) sólo tenemos que darnos cuenta de que, si $P = \pi(\underline{u}) \in Z_{\lambda} \cap Z_{\mu}$, entonces $\underline{u} \in V_{\lambda} \cap V_{\mu}$, lo cual es obviamente imposible, ya que $\underline{u} \neq \underline{0}$.

Tampoco es complejo probar (b). Si tenemos dos puntos en W provenientes de dos autovalores distintos λ y μ , pongamos $P = \pi(\underline{u}) \in Z_{\lambda} \subset W$ y $Q = \pi(\underline{v}) \in Z_{\mu} \subset W$, y suponemos $W = \pi(L)$, entonces $\underline{u} + \underline{v} \in L$ pero

$$f(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \mu \underline{v},$$

que no puede ser de la forma $\alpha(\underline{u} + \underline{v})$ porque $\lambda \neq \mu$ y \underline{u} y \underline{v} son independientes. Por tanto $\pi(\underline{u} + \underline{v}) = R \in W$ no es un punto fijo, contradiciendo la hipótesis.

Para la segunda parte de (b) basta recordar que la multiplicidad de λ es siempre mayor o igual que $\dim(V_\lambda) = \dim(Z_\lambda) + 1$, y obtenemos el resultado. *Q.E.D.*

Observación.— Un primer corolario elemental de la proposición es que no cualquier conjunto de variedades lineales proyectivas puede ser el conjunto de variedades de puntos fijos de una homografía. Esto, sin embargo, no impide que, por ejemplo, un plano y una recta secantes en $\mathbf{P}^3(k)$ sean variedades fijas; pero, al menos uno de ambas no puede ser de puntos fijos.

Observación.— Por supuesto, en todo el desarrollo anterior está implícita la elección de A , ya que si escogemos otro homomorfismo $g = \mu f$ al que está asociado F , λ no es necesariamente autovalor de g . En este caso el conjunto que hemos denominado anteriormente Z_λ sería $Z_{\lambda\mu}$.

3.4 Hiperplanos fijos de homografías.

Vamos a estudiar ahora cómo calcular el conjunto de hiperplanos fijos de una homografía $F = \pi(f) : \mathbf{P}^n(k) \rightarrow \mathbf{P}^n(k)$. Para ello, consideraremos fijados en toda la lección un sistema de referencia, \mathcal{R} , de $\mathbf{P}^n(k)$ y una base normalizada \mathcal{B} de k^{n+1} . Denotemos $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposición.— La homografía F induce una aplicación

$$\begin{aligned} F^* : \mathbf{P}^n(k)^* &\longrightarrow \mathbf{P}^n(k)^* \\ H &\longmapsto F^{-1}(H) \end{aligned}$$

que es, así mismo, una homografía. De hecho, si consideramos $\mathcal{B}^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, denominada base dual de \mathcal{B} , entonces $F^* = \pi(f^*)$, donde

$$M_{\mathcal{B}^*}(f^*) = A^t.$$

Demostración.— Basta probar que, si $L \in (k^{n+1})^*$ es un subespacio de dimensión n que verifica $\pi(L) = H$, y viene definido en la base \mathcal{B} por una ecuación

$$L : a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = (a_0 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

entonces $f^{-1}(L)$ viene definido, respecto de \mathcal{B} , por la ecuación

$$f^{-1}(L) : (a_0 \dots a_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

lo cual ya se probó en Álgebra Lineal. La igualdad anterior, escrita en términos de coordenadas respecto de \mathcal{B}^* resulta

$$(f^{-1}(L))_{\mathcal{B}^*}^t = A^t(L)_{\mathcal{B}^*}^t,$$

lo que prueba el resultado. *Q.E.D.*

Definición.— La homografía anterior se denomina homografía dual asociada a F .

Observación.— El problema de calcular los hiperplanos fijos de F requiere un enfoque distinto del que usamos para el cálculo de los puntos fijos, ya que hallar los hiperplanos H tales que $F(H) = H$ no es, en principio sencillo. Pero, al ser F biyectiva

$$F(H) = H \iff H = F^{-1}(H).$$

Este simple cambio nos permite reducir el problema al estudiado en la lección anterior.

Proposición.— Sea $F : \mathbf{P}^n(k) \longrightarrow \mathbf{P}^n(k)$ una homografía, $H \subset \mathbf{P}^n(k)$ un hiperplano. Entonces H es fijo para F si y sólo si $H \in \mathbf{P}^n(k)^*$ es un punto fijo para F^* .

Demostración.— Trivial. *Q.E.D.*

Observación.— Dado que

$$|\lambda I_{n+1} - A| = |(\lambda I_{n+1} - A)^t| = |\lambda I_{n+1} - A^t|,$$

tenemos que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos autovalores con las mismas multiplicidades. De hecho, si denotamos W_λ la variedad de puntos fijos de F^* asociada a λ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \dim(W_\lambda) &= \dim(\ker(\lambda I_{n+1} - A^t)) - 1 = n + 1 - \text{rg}(\lambda I_{n+1} - A^t) - 1 \\ &= n - \text{rg}(\lambda I_{n+1} - A) = \dim(Z_\lambda) \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, una homografía $F : \mathbf{P}^3(k) \longrightarrow \mathbf{P}^3(k)$ que tenga una recta de puntos fijos, ha de tener necesariamente una recta de hiperplanos fijos (entendidos como puntos de $\mathbf{P}^3(k)^*$). Esto es, todos los hiperplanos que contienen a una determinada recta han de ser fijos para F .

Veamos otras propiedades de la variedad de hiperplanos fijos.

Proposición.— En las condiciones anteriores si Z_λ y W_μ son variedades de puntos fijos de F y F^* respectivamente, asociadas a autovalores λ y μ distintos, entonces para todo $H \in W_\mu$, $Z_\lambda \subset H$.

Demostración.— Tomamos un punto $P \in Z_\lambda$, de forma que $(P)_\mathcal{R} = [a_0 : \dots : a_n]$ y un hiperplano $H \in W_\mu$ definido por la ecuación $b_0x_0 + \dots + b_nx_n = 0$ con respecto a \mathcal{R} . Entonces

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A^t \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos

$$\lambda(a_0 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mu(a_0 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

y, al ser $\lambda \neq \mu$, ha de ser $b_0a_0 + \dots + b_na_n = 0$ como queríamos probar. *Q.E.D.*

En el caso $k = \mathbf{C}$ podemos demostrar resultados aún más precisos.

Proposición.— Sea $F : \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ una homografía. Entonces:

- (a) Siempre existen, al menos, un punto y un hiperplano fijo para F .
- (b) Toda variedad fija de F con dimensión $l + 1$ contiene alguna variedad fija de dimensión l .
- (c) Toda variedad fija de F con dimensión l está contenida en otra variedad fija de dimensión $l + 1$.

Demostración.— La propiedad (a) es consecuencia directa del teorema fundamental del álgebra: dado que $k = \mathbf{C}$, f siempre tiene al menos un autovalor y, por tanto, un autovector no nulo. Así, han de existir un punto y un hiperplano fijos.

Hagamos ahora (b). Sea Z una variedad fija de dimensión $l + 1$. Entonces $F|_Z : Z \longrightarrow Z$ es una homografía y, simplemente identificando Z con $\mathbf{P}^{l+1}(n)$, podemos aplicar (a). Al existir un hiperplano fijo de $F|_Z$ hemos probado lo que queríamos.

A pesar de que (c) pueda parecer similar, necesitamos algo más de maquinaria para demostrarlo. Sea W ahora una variedad fija de dimensión l . Entonces el conjunto de hiperplanos que contienen a W ha de ser invariante por F , ya que lo es W . Así pues, $\star(W)$ es una variedad de dimensión $n - 1 - l$, fija para F^* . Aplicando la propiedad (a) a $F|_{\star(W)}$, existe un hiperplano H^* del espacio proyectivo $\star(W)$ que es fijo para $F|_{\star(W)}$. Pero un hiperplano de $\star(W)$ es una variedad de $\mathbf{P}^n(k)^*$ de dimensión $n - l - 2$, luego

$$\dim(\star(H^*)) = (n - 1) - (n - l - 2) = l + 1,$$

y, al ser $H^* \subset \star(W)$, es $\star(H^*) \supset W$. Además, como H^* es invariante para F^* , $\star(H^*)$ lo ha de ser para F . La variedad buscada es, por tanto, $\star(H^*)$. *Q.E.D.*

Observación.— Los resultados anteriores también son válidos para una homografía F de un espacio proyectivo sobre un cuerpo arbitrario, siempre y cuando la matriz sea diogonizable.

3.5 Proyecciones, secciones, homologías.

Vamos a estudiar tres ejemplos fundamentales de homografías, que nos permitirán plantear (y resolver) numerosos problemas (en las horas dispuestas a tal efecto). Lamentablemente, por razones de tiempo, hemos de dejar fuera otras familias interesantes de aplicaciones proyectivas.

Definición.— Dados un punto $P \in \mathbf{P}^2(k)$ y una recta proyectiva $Z \subset \mathbf{P}^2(k)$ verificando $P \notin Z$, definimos la proyección de Z sobre $\star(P)$ como

$$\begin{aligned} p : Z &\longrightarrow \star(P) \\ Q &\longmapsto Q + P =: (\text{notación}) QP \end{aligned}$$

En la misma situación, definimos la sección de $\star(P)$ sobre Z como

$$\begin{aligned} s : \star(P) &\longrightarrow Z \\ R &\longmapsto R \cap Z \end{aligned}$$

Observación.— Tanto p como s son homografías.

Observación.— Las aplicaciones p y s son inversas la una de la otra, como es sencillo de comprobar.

Definición.— Una perspectividad es la composición de una proyección con una sección.

Definición.— Una homografía $F : \mathbf{P}^n(k) \longrightarrow \mathbf{P}^n(k)$ con un hiperplano de puntos fijos se denomina una homología. El hiperplano en cuestión se denomina eje de la homología.

Observación.— Notemos que, por las condiciones que deben cumplir las variedades de puntos fijos, tal y como probamos en 3.3., no pueden existir dos hiperplanos de puntos fijos para una misma homografía F .

Podemos de hecho estudiar en detalle la configuración de puntos fijos de una homología de manera más detallada.

Lema.— En una homología, existe un punto O (necesariamente único) tal que toda variedad que lo contiene es fija.

Demostración.— Directa, por ser el dual de la existencia de un hiperplano de puntos fijos. En efecto, la existencia de un hiperplano de puntos fijos para F implica la existencia de un hiperplano de puntos fijos para F^* . Esto es, existe una variedad de dimensión $n - 1$ tal que toda variedad contenida en él es fija. El principio de dualidad permite asegurar que existe una variedad de dimensión 0 (un punto) tal que toda variedad *que lo contenga* es fija. *Q.E.D.*

Definición.— Sea F una homología. El punto, pongamos O , cuya existencia asegura el lema anterior se denominará centro de F . El hiperplano H cuya existencia determina el que F sea homología se denomina el eje de F .

Si $O \in H$ entonces F se dirá de centro y eje incidentes. En caso contrario se dirá de centro y eje no incidentes.

3.6 Homologías planas.

Estudiemos con más detalle algunas propiedades de las homologías de $\mathbf{P}^2(k)$, llamadas homologías planas.

Observación.— Sea $F : \mathbf{P}^2(k) \longrightarrow \mathbf{P}^2(k)$ una homología de centro O y eje H . Tomemos P un punto no fijo. Entonces la recta OP ha de ser fija, y, por tanto $F(P) \in OP$. Así los puntos $\{O, P, F(P)\}$ han de estar alineados.

El razonamiento dual nos indica que, si Z no es una recta fija de F , entonces $\{H, Z, F(Z)\}$ son rectas concurrentes.

Proposición.— Una homología plana F , de centro O y eje H queda unívocamente determinada por un punto P , que no sea fijo, y su imagen $F(P) \in OP$.

Demostración.— Si F es de centro y eje no incidentes, podemos tomar puntos $A, B \in H$ de tal forma que $\{O, A, B, P\}$ formen un sistema de referencia. Por la unicidad estudiada en 3.2. existe una única homografía G que transforma este sistema en $\{O, A, B, F(P)\}$. Por tanto, G es realmente F , la homología de centro O y eje H .

En el caso incidente, el razonamiento es similar aunque un poco más complejo. Tomamos en primer lugar $Q \notin OP \cup H$, y trazamos la recta $Z = PQ$. Para hallar $F(Z)$ necesitamos la imagen de dos puntos; podemos tomar P , porque conocemos $F(P)$ y $H \cap Z$, que es fijo.

Al conocer $F(Z)$ podemos hallar $F(Q) = F(Z) \cap OQ$, ya que OQ es fija. Ahora procedemos como antes: escogemos $A \in H$, distinto de O y de $PQ \cap H$, y denominamos G a la única homografía que lleva $\{O, P, Q, A\}$ en $\{O, F(P), F(Q), A\}$. G es entonces una homología de centro O . *Q.E.D.*

Corolario.— Una homología plana F , de centro O y eje H queda unívocamente determinada por una recta Z no fija y su imagen $F(Z)$ (concurrente con H y Z).

Observación.— Con la demostración anterior podemos dar un método geométrico para construir la imagen de un punto por una homología de la que conocemos el centro O , el eje H , un punto no fijo P y su imagen $F(P)$.

En efecto, si $Q \notin OP$, podemos hallar $F(Q)$ como hicimos en el caso incidente, ya que el razonamiento es independiente de la incidencia.

Si fuese $Q \in OP$ tendríamos que efectuar dos procesos análogos: en primer lugar escoger otro punto $Q' \notin OP$ y hallar $F(Q')$ y, con posterioridad, hallar $F(Q)$ usando Q' y $F(Q')$ en lugar de P y $F(P)$.



3.7 Afinidades (I).

Las afinidades son la versión afín de las homografías. Sin embargo, no toda homografía puede ser compatible con la restricción al espacio afín. Consideraremos en lo que sigue la inmersión habitual $\varphi : \mathbf{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(k) = Z$.

Definición.— Sea $F : Z \rightarrow Z$ una homografía. La aplicación F se dirá compatible con φ si $F(H_\infty) = H_\infty$. Dado que F ha de ser biyectiva, es compatible con φ si y sólo si se tiene que $F(\mathbf{A}^n(k)) = \mathbf{A}^n(k)$. En este caso, la aplicación $f = F|_{\mathbf{A}^n(k)} : \mathbf{A}^n(k) \rightarrow \mathbf{A}^n(k)$ se dirá la afinidad asociada a F .

Observación.— Al igual que sucedía con los sistemas de referencia, el concepto de matriz de una afinidad resulta más simple que el de matriz de una homografía, ya que siempre suponemos la inmersión φ .

Observación.— Fijemos un sistema de referencia afín

$$\mathcal{R}_a = \{O, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}; \text{ con } O = (a_1, \dots, a_n), \quad \underline{u}_i = (r_{1i}, \dots, r_{ni});$$

que tomaremos, por simplicidad, tanto para expresar los originales como las imágenes. Entonces, como vimos en 2.9., existe un sistema de referencia proyectivo en Z determinado por \mathcal{R}_a , a saber,

$$\mathcal{R}_Z = \{[O], [\underline{u}_1], \dots, [\underline{u}_n]; U\},$$

que es el que tiene por base normalizada

$$\mathcal{B}(\mathcal{R}_a) = \{(1, a_1, \dots, a_n), (0, r_{11}, \dots, r_{n1}), \dots, (0, r_{1n}, \dots, r_{nn})\}.$$

Definición.— Sea entonces F una homografía de Z compatible con φ , $f = F|_{\mathbf{A}^n(k)}$. De las matrices que forman la clase-matriz de F , denominaremos matriz de f a $M_{\mathcal{R}_a}(f) \in M_{\mathcal{R}_Z}(F)$ que verifica que el elemento que ocupa la posición $(1, 1)$ es 1.

Observemos que una tal matriz siempre existe, dado que $F(O) \in \mathbf{A}^n(k)$. La elección de la matriz anterior trae muchas ventajas, como veremos.

Proposición.— En las condiciones anteriores, si

$$(P)_{\mathcal{R}_a} = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad (f(P))_{\mathcal{R}_a} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

entonces

$$M_{\mathcal{R}_a}(f)[P]_{\mathcal{R}_a}^t = M_{\mathcal{R}_a}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = [f(P)]_{\mathcal{R}_a}^t.$$

Demostración.— Directa, ya que, por elección, $M_{\mathcal{R}_a}(f)$ tiene la forma

$$M_{\mathcal{R}_a}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{array} \right),$$

lo cual, unido a que

$$M_{\mathcal{R}_a}(f)(P)_{\mathcal{R}_Z}^t = (F(P))_{\mathcal{R}_Z}^t,$$

(porque $M_{\mathcal{R}_a}(f) \in M_{\mathcal{R}_Z}(F)$) y a que

$$(P)_{\mathcal{R}_Z} = [1 : \beta_1 : \dots : \beta_n], \quad (F(P))_{\mathcal{R}_Z} = [1 : \gamma_1 : \dots : \gamma_n]$$

prueban el resultado. *Q.E.D.*

Observación.— Dado que es posible encontrar un sistema de referencia proyectivo de Z contenido en $\mathbf{A}^n(k)$, el resultado anterior muestra que, dada una afinidad f , existe una única homografía compatible F verificando $F|_{\mathbf{A}^n(k)} = f$. Esto se notará $[f] = F$.

Además de servirnos para probar este hecho importante, la matriz $M_{\mathcal{R}_a}(f)$ tiene otras propiedades interesantes.

Proposición.— Sean $P, Q, R, S \in \mathbf{A}^n(k)$ tales que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \underline{u} \in k^n$. Entonces,

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(R)f(S)}.$$

Más aún, si denominamos a este vector $\overrightarrow{f}(\underline{u})$, tenemos que la aplicación \overrightarrow{f} es un automorfismo de k^n . De hecho, su matriz, respecto de la base $\mathcal{B}(\mathcal{R}_a) = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ es la submatriz de $M_{\mathcal{R}_a}(f)$ complementaria al elemento $(1, 1)$ y se tiene también que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

Demostración.— La primera afirmación es trivial tomando coordenadas respecto de \mathcal{R}_a . Así, si denotamos

$$\begin{aligned} (P)_{\mathcal{R}_a} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n), & (f(P))_{\mathcal{R}_a} &= (\beta_1, \dots, \beta_n); \\ (Q)_{\mathcal{R}_a} &= (\gamma_1, \dots, \gamma_n), & (f(Q))_{\mathcal{R}_a} &= (\delta_1, \dots, \delta_n); \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{PQ})_{\mathcal{B}(\mathcal{R}_a)} &= (\overrightarrow{RS})_{\mathcal{B}(\mathcal{R}_a)} = (\gamma_1 - \alpha_1, \dots, \gamma_n - \alpha_n) \\ (\overrightarrow{f(P)f(Q)})_{\mathcal{B}(\mathcal{R}_a)} &= (\delta_1 - \beta_1, \dots, \delta_n - \beta_n), \end{aligned}$$

pero además

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 - \beta_1 \\ \vdots \\ \delta_n - \beta_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_a}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} - M_{\mathcal{R}_a}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \\ &= M_{\mathcal{R}_a}(f) \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \gamma_n - \alpha_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que prueba el primer aserto. Por otro lado, si denotamos M_{11} a la submatriz de $M_{\mathcal{R}_a}(f)$ complementaria al elemento $(1, 1)$, tenemos por lo anterior que

$$M_{11}(\overrightarrow{PQ})_{\mathcal{B}(\mathcal{R}_a)}^t = (\overrightarrow{f(P)f(Q)})_{\mathcal{B}(\mathcal{R}_a)}^t,$$

lo que demuestra que \vec{f} es un endomorfismo de k^n verificando $M_{\mathcal{B}(\mathcal{R}_a)}(\vec{f}) = M_{11}$. Además, por ser F biyectiva ha de ser $|M_{\mathcal{R}_a}(f)| = |M_{11}| \neq 0$, luego \vec{f} es automorfismo. *Q.E.D.*

Definición.– El automorfismo $\vec{f} : k^n \longrightarrow k^n$ se denomina homomorfismo vectorial asociado a f .

Observación.– La matriz $M_{\mathcal{R}_a}(f)$ tiene entonces la forma

$$M_{\mathcal{R}_a}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline (f(O))_{\mathcal{R}_a}^t & M_{\mathcal{B}(\mathcal{R}_a)}(\vec{f}) \end{array} \right).$$

3.8 Afinidades (II): Dilataciones.

Las afinidades, en tanto que son restricciones de homografías al espacio afín, heredan todas las propiedades de éstas (en la forma conveniente) en lo tocante a composición, imágenes de variedades, unicidad de aplicaciones, estructura de grupo,...

En concreto, mantenemos la nomenclatura de variedades fijas para las afinidades: sea F una homografía de $\mathbf{P}_n(k)$ compatible con φ , $f = F|_{\mathbf{A}^n(k)}$ la afinidad que determina. Una variedad afín Y es fija para f cuando lo es para F , esto es, cuando $F(Y) = Y$. Sin embargo, esto no es, a priori, sencillo de calcular, puesto que Y no es una variedad proyectiva.

Proposición.– En las condiciones anteriores Y es fija para f si y sólo si \bar{Y} es fija para F .

Demostración.– Por un lado, si \bar{Y} es fija para F , dado que H_∞ también lo es, lo será $\bar{Y} \cap H_\infty$ y, por biyectividad, $Y = \bar{Y} \setminus (\bar{Y} \cap H_\infty)$.

Para ver la otra implicación comenzamos por notar que

$$Y \subset \bar{Y} \implies Y = f(Y) = F(Y) \subset F(\bar{Y}).$$

Por otro lado, si $Y \subset Z$, con Z una variedad lineal proyectiva, entonces

$$Y = F^{-1}(Y) \subset F^{-1}(Z),$$

y por ser F^{-1} homografía hemos de tener

$$Y \subset \bar{Y} \subset F^{-1}(Z) \implies Y = F(Y) \subset F(\bar{Y}) \subset F(F^{-1}(Z)) = Z,$$

y, por ser \bar{Y} la menor variedad proyectiva que contiene a Y ha de ser forzosamente $\bar{Y} = F(\bar{Y})$. *Q.E.D.*

Definición.– Dada una afinidad $f = F|_{\mathbf{A}^n(k)}$ los puntos fijos de F contenidos en $\mathbf{A}^n(k)$ se denominan puntos fijos de f . Los puntos fijos de F contenidos en H_∞ son de la forma $[u]$, para $u \in k^n$ y se denominan direcciones fijas de f .

Observación.— En lo que resta de lección nos fijaremos en un tipo concreto de afinidades: las dilataciones, que son aquéllas que provienen de homografías para las que H_∞ no sólo es fijo sino de puntos fijos. Sea pues f una afinidad tal que para todo $Q \in H_\infty$, $[f](Q) = Q$; esto es, $[f]$ es una homología de eje H_∞ .

Por los resultados de 3.3. los puntos de H_∞ han de estar asociados a un único autovalor λ . Por tanto, fijado un sistema de referencia afín \mathcal{R} tenemos que

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

En esta situación se puede presentar una situación geométrica distinta, que corre paralela a la casuística de las homologías.

Caso 1: $\lambda = 1$. Supondremos que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ porque si no, estamos ante la identidad y no hay mucho que estudiar.

Al tener $M_{\mathcal{R}}(f)$ un único autovalor, y no ser la identidad, el conjunto de puntos fijos de $[f]$ es exactamente H_∞ y, por tanto, es una homología de centro incidente.

Para conocer el centro procedemos geoméricamente. La afinidad asociada, tomando coordenadas respecto de \mathcal{R} , es

$$\begin{aligned} f : \mathbf{A}^n(k) &\longrightarrow \mathbf{A}^n(k) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1 + \alpha_1, \dots, x_n + \alpha_n) \end{aligned}$$

y por ello f se denomina la traslación de vector $\overrightarrow{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$.

Es entonces elemental que:

- (a) No hay puntos afines fijos.
- (b) Son fijas las variedades afines Y que verifican $\overrightarrow{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \in D(Y)$ (esto es sencillo por doble inclusión).

Por tanto \bar{Y} es fija para $[f]$ si y sólo si $[0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n] \in \bar{Y} \cap H_\infty$. Así pues, el centro de la homología F ha de ser, necesariamente, $[0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n]$.

Caso 2: $\lambda \neq 1$. Ahora $M_{\mathcal{R}}(f)$ posee dos autovalores: λ con multiplicidad n y 1 con multiplicidad 1. Por ello, el conjunto de puntos fijos de $[f]$ es exactamente $Z_\lambda = H_\infty$ junto con Z_1 que es otro punto fuera de H_∞ y, por tanto, $[f]$ es una homología de centro no incidente.

Si hallamos el centro $O \in \mathbf{A}^n(k)$ y consideramos un nuevo sistema de referencia afín (que también denotaremos \mathcal{R}) donde O sea el punto de $\mathbf{A}^n(k)$, la afinidad asociada, tomando coordenadas respecto de \mathcal{R} , es

$$\begin{aligned} f : \mathbf{A}^n(k) &\longrightarrow \mathbf{A}^n(k) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

En estas condiciones f se denomina la homotecia de centro O y razón λ . Como sabemos, son fijas precisamente las variedades afines Y que verifican $O \in Y$. Observemos que la homotecia queda caracterizada al conocer el centro y la razón, ya que ésta es

equivalente a conocer un punto y su imagen, que era el dato necesario para caracterizar una homología.

Observación.– El conjunto de las dilataciones forman un grupo con la composición de aplicaciones.



Tema 4

El espacio euclídeo

4.1 El espacio euclídeo.

Definición.– Un espacio euclídeo es un espacio afín $(\mathbf{A}^n(\mathbf{R}), (V, \cdot), +)$, donde (V, \cdot) es un espacio vectorial euclídeo. Como de costumbre diremos simplemente que $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ es un espacio euclídeo (n -dimensional).

Definición.– Dados P, Q en un espacio euclídeo $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ definimos la distancia entre P y Q como

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}.$$

Observación.– La distancia definida es una métrica topológica; esto es, verifica las siguientes propiedades:

- (a) $d(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.
- (b) $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- (c) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

Todas las pruebas son directas a partir de los resultados de Álgebra Lineal relativos a productos escalares. Así, por ejemplo

$$d(P, R) = \|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = d(P, Q) + d(Q, R),$$

y también podemos deducir que tendremos igualdad si y sólo si P, Q y R están alineados y $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} \geq 0$.

Definición.– Un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ se dice sistema de referencia métrico cuando \mathcal{B} es una base ortonormal de (V, \cdot) .

Observación.– Así pues, tomando coordenadas respecto de un sistema de referencia métrico (como haremos en lo sucesivo, sin mención expresa), el producto escalar de dos vectores se puede calcular usando la fórmula tradicional.

Observación.— Recordemos que un cambio del sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ al sistema $\mathcal{R}' = \{O'; \mathcal{B}'\}$ viene determinado por una matriz de la forma

$$M(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline (O)_{\mathcal{R}'} & & & M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \end{array} \right),$$

y verifica, para todo $Q \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$,

$$M(\mathcal{R}, \mathcal{R}') [Q]_{\mathcal{R}'}^t = [Q]_{\mathcal{R}}^t,$$

donde $[Q]_{\mathcal{R}}$ (respectivamente $[Q]_{\mathcal{R}'}$) son las coordenadas de Q , como punto proyectivo, respecto del sistema de referencia de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ inducido por \mathcal{R} ; esto es, las coordenadas de Q respecto de \mathcal{R} precedidas de un 1.

Por tanto, un cambio de sistemas de referencia métricos en $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ implica un cambio de bases ortonormales de (V, \cdot) . Así, como sabemos de Álgebra Lineal, la matriz $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ha de ser ortogonal.

Observación.— Las otras dos propiedades del módulo que no hemos utilizado son:

- (a) La desigualdad de Cauchy–Schwartz, que establece que, para todo par de vectores $\underline{u}, \underline{v} \in V$,

$$|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \implies -1 \leq \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|} \leq 1.$$

Por tanto, dados dos vectores de V , con el mismo origen, definimos el ángulo que forman como el único real $\alpha \in [0, \pi]$ verificando

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{PR}\|}.$$

Con esta definición se verifica la fórmula conocida del producto escalar

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{PR}\| \cos(\alpha).$$

- (b) El teorema de Pitágoras (versión vectorial) establece que

$$\underline{u} \perp \underline{v} \iff \|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2,$$

lo cual, tomando vectores $\underline{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\underline{v} = \overrightarrow{QR}$, nos da

$$d(P, R)^2 = \|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QR}\|^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, R)^2,$$

si y sólo si \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{QR} son ortogonales. Éste es el Teorema de Pitágoras tal y como se suele expresar en el contexto vectorial.

4.2 Versión sintética del espacio euclídeo

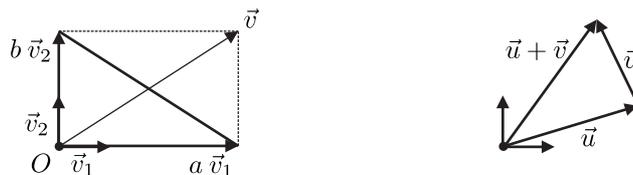
El nombre de Teorema de Pitágoras a la versión vectorial está justificado, ya que los tres puntos de un triángulo siempre se pueden escribir de la forma P , $P + \underline{u}$ y $P + \underline{u} + \underline{v}$, y sus lados vendrán dados por \underline{u} , \underline{v} y $\underline{u} + \underline{v}$, luego este resultado nos dice que dos de sus lados son ortogonales si y sólo si el cuadrado del módulo del otro lado es igual a la suma de los cuadrados de estos dos.

Pero hasta ahora la distancia entre dos puntos, o la ortogonalidad de dos vectores, son conceptos abstractos. Todavía no hemos comprobado que efectivamente corresponden a la distancia entre puntos y la perpendicularidad de segmentos de la geometría clásica. Curiosamente, esta correspondencia es consecuencia directa del teorema de Pitágoras clásico.

Consideremos fijado un sistema de referencia métrico, $\mathcal{R} = \{O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\}$ en un espacio euclídeo sobre \mathbf{R} de dimensión 2. Como \underline{v}_1 y \underline{v}_2 son unitarios y ortogonales, los representamos en el plano como dos vectores perpendiculares de tamaño 1, partiendo de un mismo punto (que representa a O). Una vez fijada la representación gráfica de \mathcal{R} , cualquier otro punto o vector del espacio euclídeo estará también fijado: el punto (a, b) es el punto final del vector $a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2$, donde $a\underline{v}_1$ es un vector de tamaño $|a|$ con la misma dirección que \underline{v}_1 , y el sentido determinado por el signo de a , y el vector $b\underline{v}_2$ se define de forma análoga. El vector suma de \underline{u} y \underline{v} está representado por la diagonal (que pasa por O) del paralelogramo que pasa por O cuyos lados adyacentes a O son \underline{u} y \underline{v} . Es en este marco que debemos demostrar que hemos definido bien la distancia entre dos puntos (el tamaño de un vector), o la perpendicularidad de dos vectores.

Proposición.— En un espacio euclídeo como el anterior, el módulo de un vector corresponde al tamaño de su representación gráfica. Y dos vectores son ortogonales si y sólo si sus representaciones gráficas son perpendiculares.

Demostración.— Si un vector \underline{v} es igual a $a\underline{v}_1$, sus coordenadas respecto a \mathcal{R} son $(a, 0)$, luego su módulo es igual a $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2} = |a|$, que coincide con el tamaño de su representación gráfica. Lo mismo ocurre con los vectores de la forma $b\underline{v}_2$. Si por último se tiene $\underline{v} = a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2$, entonces sus coordenadas respecto de \mathcal{R} son (a, b) , luego su módulo será $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ahora bien, como \underline{v}_1 y \underline{v}_2 son perpendiculares, también lo son $a\underline{v}_1$ y $b\underline{v}_2$, luego sus representaciones gráficas forman un rectángulo. Una de las diagonales de este rectángulo es la representación del vector \underline{v} , la otra (que mide lo mismo, al ser un rectángulo) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $a\underline{v}_1$ y $b\underline{v}_2$, luego el teorema de Pitágoras clásico nos dice que el tamaño de la representación de \underline{v} es igual a la raíz cuadrada del cuadrado del tamaño de $a\underline{v}_1$ más el cuadrado del tamaño de $b\underline{v}_2$, es decir, $\sqrt{a^2 + b^2}$. Por tanto, módulo y tamaño son nociones equivalentes.



Una vez que sabemos que el módulo de un vector coincide con su tamaño, veamos que ortogonalidad corresponde a perpendicularidad. Por un lado, sabemos por el teorema

de Pitágoras afín, que dos vectores \underline{u} y \underline{v} son ortogonales si y sólo si

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2.$$

Por otra parte, consideremos las representaciones gráficas de O , $O + \underline{u}$ y $O + \underline{u} + \underline{v}$. Los lados de este triángulo son \underline{u} , \underline{v} y $\underline{u} + \underline{v}$. El teorema de Pitágoras clásico (y su generalización, el teorema del coseno) nos dice que \underline{u} y \underline{v} son perpendiculares si y sólo si los tamaños de sus lados satisfacen $\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u} + \underline{v}\|^2$. Por tanto, ortogonalidad y perpendicularidad son nociones equivalentes. *Q.E.D.*

Por otra parte, recordemos que, en la geometría euclídea, se define el coseno de un ángulo α , como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tenga a α como ángulo (recordemos que tratamos sólo con ángulos menores que el ángulo llano). Por otro lado, acabamos de dar una fórmula que relaciona el coseno de un ángulo con el producto escalar. Veamos que es cierta, utilizando el teorema del coseno:

Proposición.— Sean \underline{u} y \underline{v} vectores de un espacio vectorial euclídeo $V = \mathbf{R}^2$, y sea α el ángulo que forman sus representaciones gráficas (respecto de la base habitual). Entonces se tiene:

$$\cos(\alpha) = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}.$$

Demostración.— Sabemos, por el teorema del coseno, que el triángulo $O(O + \underline{u})(O + \underline{v})$, cuyos lados miden $\|\underline{u}\|$, $\|\underline{v}\|$ y $\|\underline{v} - \underline{u}\|$, satisface la ecuación:

$$\|\underline{v} - \underline{u}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2 \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\alpha),$$

luego

$$\begin{aligned} (\underline{v} - \underline{u}) \cdot (\underline{v} - \underline{u}) &= (\underline{u} \cdot \underline{u}) + (\underline{v} \cdot \underline{v}) - 2 \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\alpha), \\ (\underline{v} \cdot \underline{v}) + (\underline{u} \cdot \underline{u}) - 2(\underline{u} \cdot \underline{v}) &= (\underline{u} \cdot \underline{u}) + (\underline{v} \cdot \underline{v}) - 2 \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\alpha), \\ \underline{u} \cdot \underline{v} &= \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\alpha), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la fórmula enunciada. *Q.E.D.*

Observación.— Observemos que de este resultado obtenemos una nueva demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwartz en el plano \mathbf{R}^2 , ya que sabemos que para cualquier ángulo α , se tiene $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$, luego $|\cos(\alpha)| \leq 1$. Es decir

$$\frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq \|\underline{u}\| \|\underline{v}\|.$$

Además, así vemos que el cociente entre $|\underline{u} \cdot \underline{v}|$ y $\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|$ puede tomar todos los valores entre 0 y 1.

Al igual que hemos hecho en el plano, se puede comprobar que en el espacio de tres dimensiones, \mathbf{R}^3 , las nociones de tamaño y módulo, de perpendicularidad y ortogonalidad son equivalentes, así como lo son las nociones clásica y afín de ángulo. Por tanto, a partir de ahora trabajaremos en espacios euclídeos, con sistemas de referencia métricos. Así, podremos imaginar todos los ejemplos en \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 , e incluso demostrar teoremas de geometría clásica, usando estas nuevas herramientas de la geometría afín.

4.3 Distancias (I): Perpendicular común.

Una vez que hemos definido la distancia entre dos puntos, trataremos en esta lección de dar una generalización (que no siempre podrá ser explícita). Antes una definición natural.

Definición.– Sean $Y_1, Y_2 \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ variedades lineales. Diremos que Y_1 e Y_2 son perpendiculares (notado $Y_1 \perp Y_2$) cuando $D(Y_1)^\perp \subset D(Y_2)$ o $D(Y_2) \subset D(Y_1)^\perp$.

Definición.– Sean $Y_1, Y_2 \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ variedades lineales. Definimos

$$d(Y_1, Y_2) = \inf \{ d(P, Q) \mid P \in Y_1, Q \in Y_2 \}.$$

Observación.– Es un hecho intuitivo que el camino más corto entre dos variedades paralelas (dos rectas en $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$, por ejemplo) viene dada por la distancia entre dos puntos que forman una recta perpendicular a ambas. Demos ahora soporte teórico a este hecho.

Teorema (Perpendicular común).– Sean Y_1, Y_2 variedades lineales afines disjuntas. Existe una variedad lineal afín Y verificando lo siguiente:

- (a) $\dim(Y) \geq 1$.
- (b) Y es perpendicular a Y_1 y a Y_2 .
- (c) $Y \cap Y_i = \{P_i\}$, para $i = 1, 2$.
- (d) Toda variedad Y' que verifique las propiedades (a), (b) y (c) (para los mismos P_1 y P_2) verifica $Y' \subset Y$.
- (e) $d(Y_1, Y_2) = d(P_1, P_2)$.

A una tal variedad Y se la denomina una perpendicular común a Y_1 e Y_2 .

Demostración.– Para que Y verifique (b) y (c) es necesario que $D(Y)$ sea ortogonal a $D(Y_1)$ y a $D(Y_2)$; y para que verifique (d) necesitamos que Y tenga la mayor dimensión posible. Por tanto, la opción natural para $D(Y)$ es

$$D(Y) = [D(Y_1) + D(Y_2)]^\perp = D(Y_1)^\perp \cap D(Y_2)^\perp,$$

y así tenemos que, recordando los resultados relativos a la dimensión de los subespacios ortogonales,

$$\dim(Y) = \dim(D(Y)) = n - \dim [D(Y_1) + D(Y_2)].$$

Ahora, usando el teorema de la dimensión para variedades afines

$$n = \dim(\mathbf{A}^n(\mathbf{R})) \geq \dim D(Y_1 + Y_2) > \dim (D(Y_1) + D(Y_2)),$$

por lo que nuestra definición de $D(Y)$ asegura que $\dim(Y) \geq 1$.

Para determinar Y necesitamos ahora un punto. Entonces tomemos dos puntos: $Q_1 \in Y_1, Q_2 \in Y_2$; y escribamos $\overrightarrow{Q_1 Q_2}$ como

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2} = \underline{u} + \underline{v} = (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) + \underline{v}, \quad \text{con } \underline{u} \in D(Y_1) + D(Y_2), \underline{u}_i \in D(Y_i), \underline{v} \in D(Y),$$

donde \underline{u} y \underline{v} son únicos porque $D(Y) = [D(Y_1) + D(Y_2)]^\perp$, pero los \underline{u}_i no lo son, a menos que $D(Y_1) \cap D(Y_2) = \{\underline{0}\}$. Tomamos entonces el punto

$$P_1 = Q_1 + \underline{u}_1 \in Y_1,$$

y definimos $Y = P_1 + D(Y)$.

Tenemos que comprobar que Y verifica las condiciones (c) y (e), ya que las demás surgen inmediatamente de nuestra definición. Para ver (c), notemos que, si definimos

$$P_2 = Q_2 - \underline{u}_2 \in Y_2,$$

tenemos que $\overrightarrow{P_1 P_2} = \underline{v} \in D(Y)$, por lo que $P_2 \in Y$. Ahora bien,

$$D(Y \cap Y_i) = D(Y) \cap D(Y_i) = \{\underline{0}\},$$

por lo que se tiene que $Y \cap Y_i$ ha de ser un punto, y, en consecuencia, tiene que ser P_i .

Por último hemos de probar que la mínima distancia entre Y_1 e Y_2 se alcanza precisamente en $d(P_1, P_2)$. Para ello, sea $Q_1 \in Y_1, Q_2 \in Y_2$ puntos cualesquiera como arriba. Escribimos entonces

$$\begin{aligned} d(Q_1, Q_2)^2 &= \|\overrightarrow{Q_1 Q_2}\|^2 = \|\overrightarrow{Q_1 P_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 Q_2}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{Q_1 P_1} + \overrightarrow{P_2 Q_2}\|^2 + \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2, \end{aligned}$$

porque $(\overrightarrow{Q_1 P_1} + \overrightarrow{P_2 Q_2}) \perp \overrightarrow{P_1 P_2}$ y podemos aplicar el Teorema de Pitágoras. Entonces es claro que el mínimo se alcanza cuando $\|\overrightarrow{Q_1 P_1} + \overrightarrow{P_2 Q_2}\|^2 = 0$, esto es, cuando $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{Q_1 Q_2}$. *Q.E.D.*

Corolario.— Si $D(Y_1) \cap D(Y_2) = \{\underline{0}\}$ (esto se suele expresar diciendo que Y_1 e Y_2 se cruzan) entonces la perpendicular común es única.

Demostración.— Basta recuperar de la demostración la única elección que hemos hecho: la del punto P_1 , que provenía de la elección de vectores $\underline{u}_1 \in D(Y_1)$ y $\underline{u}_2 \in D(Y_2)$ en la descomposición de $\overrightarrow{Q_1 Q_2}$. Pero, si $D(Y_1) \cap D(Y_2) = \{\underline{0}\}$, entonces la suma $D(Y_1) + D(Y_2)$ es directa; y por tanto \underline{u}_1 y \underline{u}_2 son únicos. *Q.E.D.*

Corolario.— Dadas dos variedades lineales afines Y_1 e Y_2 , se tiene que

$$d(Y_1, Y_2) = 0 \iff Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset.$$

Demostración.— Sólo hay que probar, obviamente, la implicación directa. Pero, si $d(Y_1, Y_2) = 0$ y tenemos $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, podemos construir una perpendicular común y hallar puntos $P_i \in Y_i$ tales que $d(Y_1, Y_2) = d(P_1, P_2) > 0$, en contra de la hipótesis. *Q.E.D.*

4.4 Distancias (II): Hiperplano mediador.

Una vez estudiado un procedimiento general para hallar la distancia entre dos variedades, nos fijamos en los casos más interesantes geoméricamente: los casos de distancia de un

punto a un hiperplano y de distancia entre dos hiperplanos. Posteriormente veremos un primer ejemplo de lugar geométrico que nos será de gran utilidad en próximas lecciones: el hiperplano mediador de dos puntos.

Definición.— Sea $P \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$, Y una variedad lineal tal que $P \notin Y$. Entonces, si Y' es la perpendicular común a P e Y , el punto $Y \cap Y'$ se denomina el pie de la perpendicular a Y trazada desde P o, equivalentemente, la proyección ortogonal de P sobre Y .

Proposición.— Sea $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$, H un hiperplano de $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ dado por la ecuación $H : a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. Entonces

$$d(P, H) = \frac{|a_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Demostración.— Dado que la dirección de H viene determinada por la ecuación

$$D(H) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0,$$

por lo que es obvio que

$$D(H)^\perp = \langle \overrightarrow{(a_1, \dots, a_n)} \rangle,$$

ya que $\dim(D(H)^\perp) = 1$. Así, la perpendicular común a P y H es precisamente la recta

$$L = P + \langle \overrightarrow{(a_1, \dots, a_n)} \rangle.$$

Buscamos un punto $Q \in H \cap L$ para lo cual lo más simple es tomar un punto arbitrario en L

$$P + \lambda \overrightarrow{(a_1, \dots, a_n)} = (\alpha_1 + \lambda a_1, \dots, \alpha_n + \lambda a_n),$$

e imponemos que verifique la ecuación de H . Entonces es inmediato que

$$\lambda = -\frac{a_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Por tanto tenemos

$$d(P, Y) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{(a_1, \dots, a_n)}\| = \frac{|a_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Q.E.D.

Definición.— Dado un hiperplano $H : a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, un vector no nulo del subespacio $\langle \overrightarrow{(a_1, \dots, a_n)} \rangle$ se denominará vector normal a H .

Corolario.— Sean dos hiperplanos H y H' . Entonces, si $H \cap H' = \emptyset$ podemos suponer que vienen dados por ecuaciones

$$H : \alpha + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0, \quad H' : \beta + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0,$$

y, además,

$$d(H, H') = \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Demostración.– Del teorema de la dimensión para variedades lineales afines es inmediato que

$$H \cap H' = \emptyset \implies D(H) = D(H'),$$

por lo que podemos suponer que $D(H)$ y $D(H')$ vienen dadas por la misma ecuación y, en consecuencia, existen ecuaciones de H y H' que sólo difieren en el término independiente.

Ahora bien, si tomamos un punto $P = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in H$ cualquiera, tenemos que

$$d(P, H') = \frac{|\beta + a_1\gamma_1 + \dots + a_n\gamma_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{|\beta - \alpha|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}},$$

ya que $\alpha + a_1\gamma_1 + \dots + a_n\gamma_n = 0$. Por tanto $d(P, H')$ no depende de P y es, en consecuencia, $d(H, H')$. *Q.E.D.*

El último punto relativo a puntos, hiperplanos y distancias es el hiperplano mediador.

Proposición.– Sean $P, Q \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$. Entonces el conjunto

$$M_{PQ} = \{R \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \mid d(P, R) = d(Q, R)\}$$

es un hiperplano, denominado hiperplano mediador de P y Q (cuando $n = 2$, se denominará mediatriz de P y Q).

Demostración.– Vamos a dar la construcción explícita de M_{PQ} . Para ello, notemos

$$P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad Q = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

y consideramos R el punto medio de P y Q . Es obvio entonces que $R \in M_{PQ}$, ya que

$$R = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \dots, \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \right).$$

Veamos entonces que $M_{PQ} = R + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle^\perp$. En efecto,

$$\begin{aligned} A \in M_{PQ} &\iff d(A, P) = d(A, Q) \\ &\iff \|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{AQ}\|^2 \\ &\iff \|\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RP}\|^2 = \|\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ}\|^2 \\ &\iff (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RP}) \cdot (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RP}) = (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ}) \cdot (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ}) \\ &\iff \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{RQ} \\ &\iff \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{RP} \\ &\iff \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{RP} = 0 \\ &\iff \overrightarrow{AR} \perp \overrightarrow{RP} = (1/2)\overrightarrow{QP}, \end{aligned}$$

lo que finaliza la prueba. *Q.E.D.*

4.5 Movimientos.

Proseguimos el estudio general del espacio euclídeo introduciendo los movimientos, que son las afinidades que conservan las propiedades euclídeas. Al estudio preciso y detallado de estas transformaciones dedicaremos las secciones siguientes. Trabajaremos, como antes, en un espacio euclídeo $(\mathbf{A}^n(\mathbf{R}), (V, \cdot), +)$.

Definición.— Un movimiento es una afinidad $f : \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ que verifica que su isomorfismo vectorial asociado, \vec{f} , es una isometría (endomorfismo ortogonal).

El conjunto de los movimientos se denota $\text{Mo}(\mathbf{A}^n(\mathbf{R}))$.

Observación.— Recordemos que, dada una afinidad f , el isomorfismo vectorial \vec{f} viene dado por (3.7.)

$$\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)},$$

y, dado un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$, $M_{\mathcal{B}}(\vec{f})$ es precisamente la submatriz cuadrada de orden n complementaria al elemento $(1, 1)$ de $M_{\mathcal{R}}(f)$.

Observación.— De las propiedades de los endomorfismos ortogonales se siguen inmediatamente las siguientes propiedades:

- f es un movimiento si y sólo si $M_{\mathcal{B}}(\vec{f})$ es ortogonal, para cualquier base ortonormal \mathcal{B} de (V, \cdot) .
- Si f es un movimiento, f conserva los ángulos entre vectores con el mismo origen (4.1.)
- f es un movimiento si y sólo si es una afinidad que preserve las distancias. Esto es, para cualesquiera $P, Q \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$, $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$.
- El conjunto de los movimientos es un grupo para la composición de aplicaciones.

Observación.— Así como los automorfismos se corresponden con los cambios de base, las homografías con los cambios de sistemas de referencia proyectivo y las afinidades con los cambios de sistemas de referencia afines, los movimientos son la contrapartida de los cambios de sistema de referencia métricos.

Vamos a finalizar el tema viendo algunos ejemplos de movimientos, que después serán estudiados con más detalle.

Ejemplo.— Recordemos que una traslación era una afinidad τ que verificaba $\vec{\tau} = \text{Id}_V$. Claramente la matriz $\vec{\tau}$ será I_n en cualquier base, por tanto, las traslaciones son movimientos.

Ejemplo.— Con respecto a las otras dilataciones, las homotecias, recordemos que éstas se caracterizaban por el hecho de que su isomorfismo vectorial asociado era λId_V , para algún $\lambda \neq 0, 1$. Nuevamente, la matriz del isomorfismo en cualquier base será λI_n . Así, una homotecia es un movimiento si y sólo si su razón, λ , es -1 . Estas homotecias tan particulares se denominan simetrías centrales de centro el punto fijo de la homotecia.

Ejemplo.— Vamos a introducir un ejemplo nuevo de movimiento: las simetrías hiperplanas o hiperplanas. Para ello, fijamos un hiperplano H , que denominaremos eje de la simetría y definimos el movimiento como sigue:

$$\begin{aligned}\sigma_H : \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \\ P &\longmapsto \sigma_H(P) = P + 2\overrightarrow{PQ},\end{aligned}$$

donde Q es el pie de la perpendicular a H trazada desde P . En particular, Q es el punto medio de P y $\sigma_H(P)$.

Para ver que σ_H es, en efecto, un movimiento, escojamos un vector no nulo $\underline{u} \in D(H)^\perp$ (que es, de hecho, base de $D(H)^\perp$) y una base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$ de $D(H)$. Si aplicamos Gram–Schmidt, por separado, a ambas bases, y las unimos obtenemos una base ortonormal

$$\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-1}, \underline{x}\}.$$

Finalmente escojemos un punto cualquiera $O \in H$ para completar un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$. Respecto de este sistema de referencia, $H : x_n = 0$.

Escogemos entonces un punto cualquiera (identificamos en adelante coordenadas respecto de \mathcal{R} y puntos) $P = (a_1, \dots, a_n)$. Entonces la perpendicular a H desde P es

$$L : \{x_1 = a_1, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}\},$$

y, por tanto,

$$\sigma_H(P) = (a_1, \dots, a_n) + 2\overrightarrow{(0, \dots, 0, -a_n)} = (a_1, \dots, a_{n-1}, -a_n).$$

Por tanto tenemos que σ_H es la afinidad de matriz

$$M_{\mathcal{R}}(\sigma_H) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{array} \right).$$

Además es claro que $M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\sigma_H})$ es ortonormal, por lo que σ_H es un movimiento. Una propiedad inmediata, bien de la definición, bien de la expresión matricial de σ_H , es que $\sigma_H^2 = \text{Id}$, esto es, que $\sigma_H^{-1} = \sigma_H$. Otra propiedad elemental a deducir es que $(\overrightarrow{\sigma_H})_{|D(H)} = \text{Id}_{D(H)}$.

Desde el punto de vista proyectivo, la expresión anterior nos permite deducir que una simetría de eje H induce en $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ una homología de eje $\varphi(H)$ y centro, no incidente, $[\underline{u}]$.

Podemos ampliar el estudio para incluir cualquier tipo de simetría (por ejemplo, simetrías axiales en $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$).

Ejemplo.— La aplicación que, fijado un sistema de referencia, permuta dos o más variables, es evidentemente un movimiento. Es un buen ejercicio que el alumno trate de expresarlo como producto de (tal vez una) simetrías.

4.6 El teorema de Cartan–Dieudonné.

Observación.– El teorema de Cartan–Dieudonné nos permite una primera clasificación (geométrica) de los movimientos. Este resultado es el más importante que se verá en este tema; en particular es de los pocos que se pueden aplicar a cualquier dimensión.

Lema.– Sea $f : \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ una aplicación que preserve distancias. Si f deja $n + 1$ puntos invariantes Q_1, \dots, Q_{n+1} no contenidos en un hiperplano, $f = \text{Id}$.

Demostración.– En efecto, si existiese un punto P tal que $f(P) \neq P$, entonces,

$$d(P, Q_i) = d(f(P), f(Q_i)) = d(f(P), Q_i),$$

de donde (4.3.) Q_1, \dots, Q_{n+1} han de estar en el hiperplano mediador de P y $f(P)$. Esto es imposible por hipótesis, luego $f = \text{Id}$. *Q.E.D.*

Teorema de Cartan–Dieudonné.– Sea f una aplicación de $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ en sí misma que preserve distancias. Entonces f es un movimiento que es composición de, a lo sumo, $n + 1$ simetrías hiperplanares.

Demostración.– Supongamos que f no es la identidad, ya que ésta es composición, como sabemos, de dos simetrías hiperplanares. Denotemos entonces

$$r_f = \text{máximo número de puntos fijos de } f \text{ afínmente independientes.}$$

Vamos a construir otra aplicación que preserve distancias pero con más puntos fijos afínmente independientes que f . Para ello, tomemos P un punto tal que $f(P) \neq P$ y sea H el hiperplano mediador de P y $f(P)$. Definimos entonces $g = \sigma_H \circ f$.

Primero observemos que si Q es fijo para f , entonces

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) = d(f(P), Q) \implies Q \in H,$$

como vimos antes. Por tanto Q también es fijo para σ_H y, en consecuencia para g . Por otra parte, es obvio de la definición que P es fijo para g . Por tanto, como $P \notin H$, es afínmente independiente con cualquier subconjunto de puntos fijos de f . Esto prueba que $r_g > r_f$.

Además, por ser σ_H un movimiento, $\sigma_H \circ f$ preserva distancias. Así pues, dada una aplicación que preserve distancias distinta de la identidad, podemos construir, componiendo con una simetría hiperplanar, otra con más puntos fijos afínmente independientes.

Así, aplicamos este proceso reiteradamente, y cuando este número llegue a $n + 1$, la aplicación resultante ha de ser Id , y tendremos

$$\text{Id} = \sigma_t \circ \dots \circ \sigma_1 \circ f, \text{ para } t \leq n + 1 \implies f = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_t,$$

usando que toda simetría es su propia inversa.

Así, f es afinidad por ser composición de afinidades y, al preservar distancias, es un movimiento. Esto finaliza la demostración. *Q.E.D.*

Corolario.– Un movimiento distinto de la identidad con un hiperplano de puntos fijos es una simetría hiperplana.

Demostración.— Basta darse cuenta de que la demostración sólo requiere una composición para llegar a la identidad. *Q.E.D.*

Notación.— Como vamos a tener que usar a menudo el conjunto de puntos fijos de un movimiento f , en adelante notaremos esta variedad lineal afín por D_f .

Ejemplo.— Veamos, por ejemplo, cómo describir una traslación en producto de simetrías. De paso esto nos permitirá probar que, a veces, no hacen falta tantas simetrías como cabría esperar por la demostración del teorema. De hecho, partimos de la peor situación posible, puesto que las traslaciones no tienen puntos fijos.

Fijado un sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$, respecto del cual tomaremos coordenadas sin mención expresa, la traslación de vector $\underline{u} = \overrightarrow{(a_1, \dots, a_n)}$ se puede definir como

$$\begin{aligned} \tau_{\underline{u}} : \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \\ P &\longmapsto P + \underline{u} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$M_{\mathcal{R}}(\tau_{\underline{u}}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & & 1 \end{array} \right).$$

Para seguir la demostración del teorema, hemos de escoger un punto P , no fijo, (o sea que cualquiera vale) y hallar H , el hiperplano mediador de P y $f(P)$. Pero

$$\overrightarrow{Pf(P)} = \underline{u} \implies \underline{u} \perp D(H).$$

Así, P es fijo para $g = \sigma_H \circ \tau_{\underline{u}}$, pero, para todo $R \in P + D(H)$,

$$\begin{aligned} g(R) &= g(P) + \overrightarrow{g}(v), \text{ con } v \in D(H) \\ &= P + \overrightarrow{\sigma_H} \circ \overrightarrow{\tau_{\underline{u}}}(v) = P + \overrightarrow{\sigma_H}(v) = R, \end{aligned}$$

porque, como indicamos en 4.4.,

$$\overrightarrow{\tau_{\underline{u}}} = \text{Id}_V, \quad (\overrightarrow{\sigma_H})|_{D(H)} = \text{Id}_{D(H)}.$$

Por tanto g es un movimiento con un hiperplano, $P + D(H)$, de puntos fijos y es, en consecuencia, una simetría. Esto prueba que toda traslación es producto de dos simetrías hiperplanas de ejes paralelos.

4.7 Movimientos y algunos conjuntos afines.

Vamos a dar algunas propiedades relativas a movimientos que serán de mucho uso en las clases de problemas: en particular introduciremos los segmentos y semirrectas, cuyo uso será fundamental a la hora de calcular movimientos que dejan invariantes figuras.

Definición.– Dados $P, Q \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ distintos denominamos segmento de extremos P y Q al conjunto

$$\overline{PQ} = \{P + \lambda \overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Lema.– Las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) $R \in \overline{PQ}$.
- (b) $R \in PQ$ y $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{RQ} \geq 0$.
- (c) $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$.

Demostración.– El resultado se sigue casi inmediatamente de 4.1. y de la definición anterior, haciendo (a) \iff (b) \iff (c).

La única dificultad puede estar en (b) \implies (a). Para ello, tomemos $R \in PQ$ y notemos λ el escalar que verifica $R = P + \lambda \overrightarrow{PQ}$. Entonces

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{RQ} = (\lambda \overrightarrow{PQ}) \cdot ((1 - \lambda) \overrightarrow{PQ}) = \lambda(1 - \lambda)d^2(P, Q),$$

por lo que esta cantidad es no negativa si y sólo si $\lambda \in [0, 1]$. *Q.E.D.*

Corolario.– Dados tres puntos alineados, uno de ellos siempre está en el segmento cuyos orígenes son los otros dos.

Proposición.– Sea f un movimiento. Entonces $f(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}$.

Demostración.– Es muy sencillo, por doble inclusión. Tomamos $R \in \overline{PQ}$ y, entonces,

$$\begin{aligned} d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) &= d(P, R) + d(R, Q) \\ &= d(f(P), f(R)) + d(f(R), f(Q)), \end{aligned}$$

y esto es equivalente a que $f(R) \in \overline{f(P)f(Q)}$. *Q.E.D.*

Definición.– Dados $P, Q \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ distintos denominamos semirrecta de origen P que pasa por Q al conjunto

$$L_{P,Q} = \{P + \lambda \overrightarrow{PQ} \mid \lambda \geq 0\}.$$

Lema.– Las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) $R \in L_{P,Q}$.
- (b) $R \in PQ$ y, bien $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{RQ} \geq 0$, bien $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} \geq 0$.
- (c) $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ o bien $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$.

Demostración.– Paralela al caso del segmento.

Proposición.– Sea f un movimiento. Entonces $f(L_{P,Q}) = L_{f(P),f(Q)}$.

Demostración.– Aunque podemos adaptar la demostración del caso del segmento, vamos a usar otra para dar una visión más amplia de las técnicas que podemos usar trabajando con movimientos. Tomamos primero $R \in L_{P,Q}$ y, entonces, $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$, con $\lambda \geq 0$, de donde

$$\overrightarrow{f(P)f(R)} = \vec{f}(\overrightarrow{PR}) = \lambda \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \lambda \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

y esto implica que $f(R) \in L_{f(P),f(Q)}$.

Para ver la otra inclusión, basta tomar $R \in L_{f(P),f(Q)}$ y aplicar f^{-1} que es también un movimiento. Entonces, por lo que acabamos de probar, $f^{-1}(R) \in L_{P,Q}$, luego $R \in f(L_{P,Q})$, como queríamos probar. *Q.E.D.*

Observación.– Generalizamos, por último, estos dos conceptos al caso n -dimensional, dando unos primeros ejemplos de conjuntos convexos.

Definición.– Dados $P, Q_1, \dots, Q_r \in \mathbf{A}^n(k)$ tales que $P \notin Q_1 + \dots + Q_r$, se define el cono afín de vértice P y aristas L_{P,Q_i} como el conjunto

$$C(P; Q_1, \dots, Q_r) = \{R = P + \lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \dots + \lambda_r \overrightarrow{PQ_r} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0\}.$$

Cuando $r = 2$, $C(P; Q_1, Q_2)$ se denomina una región angular de vértice P .

Proposición.– Sea f un movimiento. Entonces $f(C(P; Q_1, \dots, Q_r)) = C(f(P); f(Q_1), \dots, f(Q_r))$.

Demostración.– Adaptable fácilmente de la análoga para semirrectas. *Q.E.D.*

Observación.– Un conjunto T se dice convexo cuando, para cualesquiera $P, Q \in T$, $\overrightarrow{PQ} \subset T$. Los segmentos, las semirrectas, las variedades lineales afines y los conos afines son ejemplos de conjuntos convexos. En clase de problemas veremos más ejemplos (polígonos y poliedros, por ejemplo), y cómo varían por la acción de movimientos. En concreto, dos resultados a tener en cuenta en esta línea son los siguientes:

Lema.– Sea $T \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$. Entonces

$$S(T) = \{f \in \text{Mo}(\mathbf{A}^n(\mathbf{R})) \mid f(T) = T\}$$

es un grupo para la composición de aplicaciones, denominado grupo de simetrías de T .

Si $T' \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ verifica que existe $g \in \text{Mo}(\mathbf{A}^n(\mathbf{R}))$ tal que $g(T) = T'$, entonces

$$\{h \in \text{Mo}(\mathbf{A}^n(\mathbf{R})) \mid h(T) = T'\} = \{g \circ f \mid f \in S(T)\} = \{f \circ g \mid f \in S(T')\}.$$

Demostración.– El hecho de que $S(T)$ es un grupo es elemental, ya que la propiedad asociativa se verifica, por ser un subconjunto de $\text{Mo}(\mathbf{A}^n(\mathbf{R}))$, $\text{Id} \in S(T)$ obviamente y, si $f \in S(T)$, es elemental que f^{-1} también. Por tanto, sólo hay que verificar que la composición de movimientos de $S(T)$ está en $S(T)$, lo cual es también claro.

La segunda afirmación es sencilla por doble inclusión. Por ejemplo, si $h(T) = T'$, entonces $g^{-1} \circ h(T) = T$, luego existe $f \in S(T)$ tal que $g^{-1} \circ h = f$. Esto prueba que $h = g \circ f$, con $f \in S(T)$. Las otras inclusiones son aún más simples. *Q.E.D.*

4.8 Movimientos del plano.

Pasamos a estudiar ahora los movimientos del plano. Usaremos para ello tanto una característica algebraica (los autovalores de \vec{f} y sus multiplicidades) como una geométrica (su variedad de puntos fijos). Sea entonces $f \in \text{Mo}(\mathbf{A}^2(\mathbf{R}))$.

De Álgebra Lineal sabemos que la matriz de \vec{f} , respecto de una cierta base ortonormal, es diagonal por cajas, siendo las posibles cajas

$$(1), \quad (-1), \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1, \quad b \neq 0.$$

Así pues, existe un sistema de referencia métrico tal que la matriz de f es de una de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a & -b \\ \beta & b & a \end{pmatrix},$$

que denotaremos respectivamente casos (a), (b), (c) y (d).

Caso (a) Separaremos el estudio dependiendo de la variedad de puntos fijos de f , que notaremos D_f y que tiene por ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + x = x \\ \beta + y = y \end{array} \right\}$$

(a.1) Si $D_f \neq \emptyset$, las ecuaciones anteriores nos dicen que ha de ser $\alpha = \beta = 0$ y, en consecuencia $f = \text{Id}$.

(a.2) Si $D_f = \emptyset$, como ya hemos visto $f = \tau_{(\alpha, \beta)}$.

Caso (b) Separaremos el estudio nuevamente. D_f tiene ahora por ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + x = x \\ \beta - y = y \end{array} \right\}$$

(b.1) Si $D_f \neq \emptyset$ ha de ser $\alpha = 0$. Entonces los puntos fijos son los de la recta $H : y = \beta/2$, por lo que $f = \sigma_H$, por lo visto en 4.6.

(b.2) Si $D_f = \emptyset$ entonces notemos que $\alpha \neq 0$ y que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si denominamos $\underline{u} = \overline{(\alpha, 0)}$ y $H : y = \beta/2$, lo anterior prueba que $f = \tau_{\underline{u}} \circ \sigma_H = \sigma_H \circ \tau_{\underline{u}}$. Además se verifica que $\underline{u} \in D(H)$. Este movimiento se denomina simetría con deslizamiento, H se denomina el eje y \underline{u} el deslizamiento o el vector.

Nótese que H es fija para f (no de puntos fijos) y es la única en estas condiciones. Para ver esto notemos que todas las direcciones son fijas para $\overrightarrow{\tau_u}$, y para $\overrightarrow{\sigma_H}$ las únicas direcciones fijas son $\langle\langle(1,0)\rangle\rangle$ y $\langle\langle(0,1)\rangle\rangle$. Por lo tanto toda recta fija ha de ser del tipo $y = \gamma$ ó $x = \delta$.

Pero un punto cualquiera de $x = \delta$, pongamos $P = (\delta, 0)$ va en $f(P) = (\alpha + \delta, \beta)$, por lo que $f(P)$ no está en la recta y ninguna recta de esa forma puede ser fija. Por otra parte $f(0, \gamma) = (0, \beta - \gamma)$, por lo que $y = \gamma$ es fija si y sólo si $\beta - \gamma = \gamma$, esto es, si y sólo si es H . Otra forma de calcular H es observando que el punto medio de cualquier punto y su imagen está en H . Así pues, escogiendo dos puntos (en general) y hallando sus imágenes podemos hallar H .

Caso (c) La variedad de puntos fijos D_f tiene ahora por ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - x = x \\ \beta - y = y \end{array} \right\},$$

de donde $D_f = \{(\alpha/2, \beta/2)\}$, punto que denotaremos P . Como indicamos en 4.5. f es la simetría central de centro P . Por ser un caso particular de homotecia, toda recta pasando por P es fijo. Además, para todo $Q \in \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$, P es el punto medio de Q y $f(Q)$.

Caso (d) Las ecuaciones de D_f son

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + ax - by = x \\ \beta + bx + ay = y \end{array} \right\},$$

que es un sistema de Cramer ya que

$$\begin{vmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + b^2 = 2a - 2 \neq 0, \text{ ya que } b \neq 0, a \neq 1.$$

De donde $D_f = \{P\}$. Este tipo de movimientos se denomina un giro de centro P y ángulo ω . Veamos el porqué de este nombre, y cómo el ángulo orientado ω está determinado por los valores a y b . Más concretamente, veamos que para todo $Q \in \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$, el ángulo orientado ω formado por \overrightarrow{PQ} y $\overrightarrow{Pf(Q)}$ es independiente de Q . En efecto;

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{Pf(Q)} &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{f(P)f(Q)} \\ &= (a_1 \ a_2) \left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= a \|\overrightarrow{PQ}\|^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$\cos(\omega) = \frac{a \|\overrightarrow{PQ}\|^2}{\|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{Pf(Q)}\|} = a,$$

dado que $d(P, Q) = d(P, f(Q))$, al ser P fijo.

Hay, por tanto, dos valores posibles para el ángulo (orientado) que forman los dos vectores, siendo a su coseno. Pero como $a^2 + b^2 = 1$, podremos siempre encontrar un ángulo ω tal que

$$\cos(\omega) = a, \quad \text{sen}(\omega) = b$$

quedando así determinado el ángulo (orientado) que forman los vectores \overrightarrow{PQ} y $\overrightarrow{Pf(Q)}$. Al ángulo ω se le llama ángulo del giro. Entonces, la ecuación de un giro de ángulo ω será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \cos(\omega) & -\text{sen}(\omega) \\ \beta & \text{sen}(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

El signo del ángulo de giro depende de la orientación del sistema de referencia. Concretamente, si $\mathcal{R}' = \{O'; \mathcal{B}'\}$ es otro sistema de referencia métrico, y respecto de \mathcal{B}' la matriz de \overrightarrow{f} es

$$\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix},$$

se verifica que $a' = a$ y $b' = b|\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})|$. Por tanto, si ω' es el ángulo $0 \leq \omega' \leq 2\pi$ tal que $\cos(\omega') = a'$ y $\text{sen}(\omega') = b'$, se tendrá que si \mathcal{R} y \mathcal{R}' tienen la misma orientación entonces $\omega = \omega'$. En otro caso, $\omega' = 2\pi - \omega$. El caso particular $\omega = \pi$ es la simetría central, ya estudiada en el caso (c).

Observación.— Para hallar las rectas fijas de los movimientos podemos optar por considerarlas hiperplanos fijos de una homografía o por calcular directamente las direcciones fijas de f (que son los puntos fijos en el infinito de $[f]$) y, a partir de ahí, buscar rectas fijas. En cualquier caso, son un buen ejercicio para las clases de problemas.

Resumimos entonces lo estudiado en esta lección en el siguiente cuadro. Usamos la denominación clásica de *elementos de un movimiento* para designar aquéllos objetos geométricos que lo caracterizan.

Tipo de movimiento	Autovalores de \vec{f}	Puntos fijos	Elementos del movimiento
Identidad	1,1	$\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$	—
Traslación de vector \underline{u}	1,1	\emptyset	$\underline{u} = \overrightarrow{Pf(P)}$ $\forall P \in \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$
Simetría de eje H	1,-1	H	$H = D_f$
Simetría con deslizamiento (eje H , vector \underline{u})	1,-1	\emptyset	H es la única recta fija $\underline{u} = \overrightarrow{Pf(P)}, \forall P \in H$
Simetría central de centro P	-1,-1	P	$P = D_f$
Giro de centro P y ángulo ω	$\alpha, \bar{\alpha} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$	P	Centro P $\cos(\omega) = \Re(\alpha)$ $\text{sen}(\omega) = \Im(\alpha)$

4.9 Movimientos del espacio (I).

Comenzamos en esta lección el repaso a la casuística de movimientos en $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$, que nos llevará más tiempo, por ser más larga, aunque no más complicada. Tomamos $f \in \text{Mo}(\mathbf{A}^3(\mathbf{R}))$.

Por los mismos resultados de usados anteriormente, sabemos que las posibles matrices de f , respecto de un cierto sistema de referencia métrico con una base real ortonormal, son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Nos ocuparemos en esta lección de los casos (a), (b) y (d); y dejaremos para la siguiente los restantes: (c), (e) y (f).

Caso (a) No existen grandes diferencias entre este estudio y el del caso plano. En efecto,

$$D_f : \begin{cases} \alpha + x & = x \\ \beta & + y & = y \\ \gamma & + z & = z \end{cases}$$

por lo que $D_f \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, esto es, si y sólo si $f = \text{Id}$. En otro caso, f es la traslación de vector (α, β, γ) .

Caso (b) Este caso también es paralelo al del caso plano. Ahora

$$D_f : \begin{cases} \alpha + x & = x \\ \beta & + y & = y \\ \gamma & - z & = z \end{cases}$$

(b.1) Si $D_f \neq \emptyset$, entonces $\alpha = \beta = 0$ y $D_f : z = \gamma/2$, por lo que f es la simetría hiperplanar de eje D_f .

(b.2) Si $D_f = \emptyset$, entonces, como en el caso plano

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que, si denotamos $H : z = \gamma/2$, $\underline{u} = (\alpha, \beta, 0)$ (notemos que $\underline{u} \in D(H)$), obtenemos que $f = \sigma_H \circ \tau_{\underline{u}} = \tau_{\underline{u}} \circ \sigma_H$.

Los elementos geométricos no son tan sencillos de hallar: $\underline{u} = \overline{Pf(P)}$ para cualquier $P \in H$ pero H no es el único plano fijo. La forma más rápida (y nos sirve de repaso) probablemente sea calcular directamente los planos fijos. Para ello vamos a considerar la homografía inducida $[f]$ y considerar $[f]^*$, cuya matriz, respecto del sistema de referencia inducido es

$$A = M([f]^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos sus puntos fijos como homografía (3.3.). Tenemos dos autovalores: 1 ($\nu = 3$) y -1 ($\nu = 1$). La variedad Z_1^* tiene por ecuaciones

$$(I_4 - A) \begin{pmatrix} x_0^* \\ \vdots \\ x_3^* \end{pmatrix} = 0_{4 \times 1} \implies \begin{cases} \alpha x_1^* + \beta x_2^* & = 0 \\ x_3^* & = 0 \end{cases}$$

por lo que Z_1^* está generado por $[1 : 0 : 0 : 0]$ y $[0 : -\beta : \alpha : 0]$. Observemos que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, de lo contrario estamos en el caso (b.1). Así pues, Z_1^* es una recta de planos fijos: concretamente los que tienen ecuaciones

$$\lambda x_0 + \mu(-\beta x_1 + \alpha x_2) = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\};$$

esto es, pasando al afín (y renombrando los parámetros), todos los de la forma

$$H_\lambda : \beta x - \alpha y = \lambda,$$

o sea, todos los perpendiculares a H y paralelos al vector $\overrightarrow{(\alpha, \beta, 0)}$.

Por lo que respecta a Z_{-1}^* tenemos

$$(-I_4 - A) \begin{pmatrix} x_0^* \\ \vdots \\ x_3^* \end{pmatrix} = 0_{4 \times 1} \implies \begin{cases} -2x_0^* & - & \gamma x_3^* & = & 0 \\ & x_1^* & & = & 0 \\ & & x_2^* & = & 0 \end{cases}$$

por lo que Z_{-1}^* es el punto $[\gamma : 0 : 0 : -2]$, que se corresponde con el plano proyectivo $\gamma x_0 - 2x_3 = 0$ que es precisamente la clausura proyectiva de H .

Por tanto, H se caracteriza por ser el plano cuya clausura es el único plano fijo asociado al autovalor -1 de $[f]^*$. Alternativamente,

$$P = (x_0, y_0, z_0) \implies f(P) = (x_0 + \alpha, y_0 + \beta, -z_0 + \gamma) \implies P + \frac{1}{2}\overrightarrow{Pf(P)} \in H.$$

En particular $(\alpha/2, \beta/2, \gamma/2) \in H$.

Caso (d) Este caso, como en el plano, se denomina una simetría central de centro P . El centro queda determinado por ser el único punto fijo de f :

$$D_f : \begin{cases} \alpha - x & = & x \\ \beta & - & y & = & y \\ \gamma & & - & z & = & z \end{cases} \implies P = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \right).$$

Como en el caso plano, P es el punto medio de Q y $f(Q)$, para cualquier $Q \in \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ y toda variedad pasando por P es fija, por ser f una homotecia.

4.10 Movimientos del espacio (II).

Continuamos con la descripción de los movimientos de $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$. Para no repetir en exceso, seremos ahora más someros y dejaremos más detalles análogos al alumno.

Caso (c) La variedad D_f es no vacía si y sólo si $\alpha = 0$.

(c.1) Si hay puntos fijos, entonces

$$D_f : \{y = \beta/2, z = \gamma/2\},$$

esto es, es una recta de puntos fijos. Así, dado un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$, tenemos que $f(P) = (x_0, \beta - y_0, \gamma - z_0)$, de donde deducimos:

- (a) El punto medio de P y $f(P)$ está en D_f .
- (b) El vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ es ortogonal a $D(D_f) = \langle \overrightarrow{(1, 0, 0)} \rangle$.

Por tanto, dado un punto P , f se comporta, en el plano $P + D_f$ como una simetría de eje D_f . Por tanto, f se denomina una simetría axial de eje D_f .

(c.2) Si no hay puntos fijos, tenemos la descomposición

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que f es composición (conmutativa) de una simetría axial y una traslación de vector paralelo al eje de simetría. Como cabe esperar, f se denomina simetría axial con deslizamiento.

Como de costumbre, para hallar el eje podemos usar dos puntos cualesquiera y sus imágenes; calculando los puntos medios. Una vez hecho esto, el vector de traslación es $\overrightarrow{Pf(P)}$ para cualquier P en el eje de simetría.

Caso (e) Dividimos el estudio como de costumbre, dependiendo de si f tiene o no puntos fijos.

(e.1) La existencia de puntos fijos implica que $\alpha = 0$ y, además, que

$$D_f : \begin{cases} (a-1)y - bz = -\beta \\ by + (a-1)z = -\gamma \end{cases}$$

por lo que tenemos una recta de puntos fijos (recordemos que $a^2 + b^2 = 1$ y que $a \neq 1$). Si tomamos $P = (x_0, y_0, z_0)$, entonces

$$H = P + D(D_f)^\perp : x = x_0,$$

y, si tomamos $\mathcal{R}_H = \{H \cap D_f; \overrightarrow{(0, 1, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)}\}$ tenemos un sistema de referencia métrico en H que verifica (ejercicio sencillo)

$$M_{\mathcal{R}_H}(f|_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, restringido a H , f se comporta como un giro de centro $H \cap D_f$ y ángulo ω tal que $\cos(\omega) = a$ y $\sin(\omega) = b$. Por este motivo f se denomina precisamente un giro de eje D_f y ángulo ω . Pero debemos hacer un comentario sobre el signo de ω .

Recordemos que el signo del ángulo ω depende de la orientación del sistema de referencia que tomemos en H . Alternativamente, podemos fijar un vector unitario generador

de la dirección de $D(D_f)$, digamos \underline{v} . Observemos que sólo hay dos posibilidades para \underline{v} , que difieren únicamente en el signo. Añadimos ahora dos vectores $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in D(H)$ tales que $\{\underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ formen una base ortonormal con la misma orientación que la base habitual. Esto determina la orientación de la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ en $D(H)$. Por tanto, la dirección de \underline{v} determina el signo del ángulo ω , y así diremos que f es un giro de eje D_f y ángulo ω respecto de la dirección \underline{v} .

Para saber cuándo una base tiene la misma orientación que la base habitual, basta calcular el determinante de la matriz cuyas filas (o columnas) son los vectores de la base estudiada, escritos con coordenadas respecto de la base habitual. Si el determinante es positivo, la orientación es la correcta.

(e.2) En este caso podemos descomponer

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que f es composición de un giro de eje L y una traslación de vector \underline{u} , paralelo al eje del giro, que además conmutan. f se denomina giro con deslizamiento o movimiento helicoidal.

En esta ocasión, para calcular el eje notemos que $D(L)$ es el conjunto de autovectores de \vec{f} asociados al autovalor 1. Así pues, hallada $D(L)$, tomamos $P = (x, y, z)$ e imponemos que $\overrightarrow{Pf(P)} \in D(L)$. De esta condición hallamos L . Posteriormente, $\underline{u} = \overrightarrow{Pf(P)}$, para cualquier $P \in L$.

Caso (f) La variedad de puntos fijos D_f es en este caso la solución (única) del sistema

$$D_f : \begin{cases} 2x & = \alpha \\ (a-1)y - bz & = -\beta \\ by + (a-1)z & = -\gamma \end{cases}$$

y f admite la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & a & -b \\ \gamma & 0 & b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto f se descompone en una simetría plana de eje H y un giro de eje L que verifican:

- (a) $H \perp L$.
- (b) $H \cap L = D_f$.

El movimiento se denomina simetría rotacional, y sus elementos son:

- (1) El eje de simetría H : es un plano fijo (de hecho, es el único) que pasa por D_f y su dirección es base del subespacio asociado a los autovalores complejos de \vec{f} .
- (2) El eje de giro L : pasa por D_f y es perpendicular a H (equivalentemente su dirección está asociada al autovalor -1).
- (3) El ángulo de giro ω : dado por $\cos(\omega) = a$ y $\sin(\omega) = b$. El signo de ω (es decir, el signo de b) depende de la orientación que se le haya dado al vector director del eje de giro.

Resumimos como en 4.8. lo estudiado en esta lección y en la anterior en un cuadro. No incluimos la descripción de los elementos de cada movimiento, por estar ya incluida en el desarrollo de las lecciones.

Tipo de movimiento	Autovalores de \vec{f}	Puntos fijos	Elementos del movimiento
Identidad	1,1,1	$\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$	—
Traslación	1,1,1	\emptyset	\underline{u} , vector de traslación
Simetría hiperplanar	1,1,-1	H	H , eje de simetría
Simetría con deslizamiento	1,1,-1	\emptyset	H , eje de simetría \underline{u} , vector de traslación
Simetría central	-1,-1,-1	P	P , centro de simetría
Simetría axial	1,-1,-1	L	L , eje de simetría
Simetría axial con deslizamiento	1,-1,-1	\emptyset	L , eje de simetría \underline{u} , vector de traslación
Giro	$1, \alpha, \bar{\alpha} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$	L	L , eje de giro ω , ángulo de giro
Movimiento helicoidal	$1, \alpha, \bar{\alpha} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$	\emptyset	L, ω ; eje y ángulo de giro \underline{u} , vector de traslación
Simetría rotacional	$-1, \alpha, \bar{\alpha} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$	P	L, ω ; eje y ángulo de giro H , eje de simetría

4.11 Semejanzas.

Para finalizar el tema, daremos unos cuantos resultados relativos a semejanzas: generales en esta lección y más específicos para dimensiones bajas en la siguiente. Este tipo de afinidades permite una gran cantidad de problemas: en particular los problemas clásicos relativos a semejanza de triángulos.

Definición.— Una aplicación $f : \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ es una semejanza si existe un número real $\lambda > 0$ verificando que, para cualesquiera $P, Q \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$,

$$d(f(P), f(Q)) = \lambda d(P, Q).$$

En estas condiciones, λ se denomina la razón de la semejanza.

Ejemplos.— Ya hemos visto dos ejemplos de semejanzas: por un lado los movimientos, que son las semejanzas de razón 1. Pero en 3.8. también introdujimos las homotecias que eran las afinidades h que verificaban $\overrightarrow{h} = \lambda \text{Id}_V$, para $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Por tanto, de forma obvia, las homotecias son semejanzas de razón $|\lambda|$.

De hecho, como vamos a probar, toda semejanza se puede reducir a estos ejemplos.

Proposición.— Sea f una semejanza de razón λ . Entonces $f = g \circ h$, donde $g \in \text{Mo}(\mathbf{A}^n(\mathbf{R}))$ y h es una homotecia de razón λ .

Demostración.— Prácticamente el enunciado contiene la prueba. Dada f , consideramos h cualquier homotecia de razón λ . Notemos que $\overrightarrow{h^{-1}} = (1/\lambda)\text{Id}_V$. Entonces, si llamamos $g = h^{-1} \circ f$, tenemos que, para cualesquiera $P, Q \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} d(g(P), g(Q)) &= \left\| \overrightarrow{g(P)g(Q)} \right\| = \frac{1}{\lambda} \left\| \overrightarrow{f(P)f(Q)} \right\| \\ &= \frac{1}{\lambda} d(f(P), f(Q)) = d(P, Q). \end{aligned}$$

Así, por el teorema de Cartan–Dieudonné, g es un movimiento. Esto finaliza la demostración. *Q.E.D.*

Observación.— Es muy importante (o, mejor dicho, lo será) hacer notar que la homotecia se puede escoger con centro arbitrario.

Observación.— Este resultado nos permite obtener muchas propiedades de las semejanzas. Destacamos primero algunas de las inmediatas:

- (a) Las semejanzas son afinidades y, por tanto, biyectivas. Así pues, si f es una semejanza, f^{-1} existe y, trivialmente, es también una semejanza.
- (b) Por el apartado (a) deducimos sin mayor problema que el conjunto de las semejanzas es un grupo para la composición de aplicaciones.
- (c) Las semejanzas conservan ángulos (no orientados). En efecto, dado que ya lo sabemos de los movimientos (4.5.), sólo hay que probarlo de las homotecias. Pero, dada una homotecia h y puntos $P, Q, R \in \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$, si denotamos por α el ángulo formado por $\overrightarrow{h(P)h(Q)}$ y $\overrightarrow{h(P)h(R)}$,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\overrightarrow{h(P)h(Q)} \cdot \overrightarrow{h(P)h(R)}}{\left\| \overrightarrow{h(P)h(Q)} \right\| \left\| \overrightarrow{h(P)h(R)} \right\|} = \frac{(\lambda \overrightarrow{PQ}) \cdot (\lambda \overrightarrow{PR})}{\left\| \lambda \overrightarrow{PQ} \right\| \left\| \lambda \overrightarrow{PR} \right\|} \\ &= \frac{\lambda^2 \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\lambda|^2 \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| \left\| \overrightarrow{PR} \right\|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{\left\| \overrightarrow{PQ} \right\| \left\| \overrightarrow{PR} \right\|}, \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

Finalizamos la lección con un resultado, cuando menos curioso, relativo a la estructura de la variedad de puntos fijos de una semejanza.

Proposición.— Sea f una semejanza que no es un movimiento. Entonces existe un único punto fijo, denominado centro de la semejanza.

Demostración.— Sea A la matriz de f respecto de un sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ fijado en lo que sigue. Entonces P es fijo para f si y sólo si $A[P]^t = [P]^t$. Denotando $P = (x_1, \dots, x_n)$ tenemos

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \end{array}.$$

Esto implica que la variedad de puntos fijos tiene un sistema de ecuaciones respecto de \mathcal{R}

$$\left(M_{\mathcal{B}}(\vec{f}) - I_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Al ser un sistema de n ecuaciones y n incógnitas, tiene solución única, salvo que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo. Veamos que esto no es posible y habremos terminado. En efecto, si así fuera,

$$0 = \left| M_{\mathcal{B}}(\vec{f}) - I_n \right| \iff 1 \text{ es autovalor de } \vec{f},$$

y esto equivale a la existencia de un vector no nulo $\underline{u} = \overrightarrow{PQ}$ tal que

$$\vec{f}(\underline{u}) = \underline{u} \implies d(f(P), f(Q)) = \left\| \overrightarrow{f(P)f(Q)} \right\| = \|\underline{u}\| = d(P, Q).$$

Así pues, si el sistema no es de Cramer, esto implica que f tiene razón $\lambda = 1$ y es, por tanto, un movimiento, en contra de las hipótesis. Esto finaliza la prueba. *Q.E.D.*

4.12 Semejanzas en el plano y en el espacio.

Finalizamos con esta lección el tema, dando unos resultados acerca de la estructura de las semejanzas en el plano y en el espacio. Antes, algunas anotaciones de carácter general.

Observación.— El producto de una homotecia h por una traslación τ es de nuevo una homotecia, ya que

$$\overrightarrow{h \circ \tau} = \overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{\tau} = (\lambda \text{Id}) \circ \text{Id} = \lambda \text{Id}.$$

De hecho, como vemos, es una homotecia cuya razón coincide con la de h . Análogamente podemos comprobar que el producto de una homotecia por una simetría central (cuyo isomorfismo asociado es $-\text{Id}$) es de nuevo una homotecia.

Proposición.— Toda semejanza de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ que no sea un movimiento ni una homotecia se puede escribir como:

(a) El producto de una homotecia por una simetría verificando:

(a.1) El producto es conmutativo.

- (a.2) El centro de la homotecia está en el eje de simetría y es, por tanto, el centro de la semejanza.

Estas semejanzas se denominan simetrías con dilatación.

- (b) El producto de una homotecia por un giro verificando:

(b.1) El producto es conmutativo.

(b.2) El centro de la homotecia es el centro de giro y es, en consecuencia, el centro de la semejanza.

Estas semejanzas se denominan giros con dilatación.

Demostración.— Partamos de f , una semejanza de razón λ y centro O . Entonces, si h es cualquier semejanza de razón λ , vimos la pasada lección que $g = h^{-1} \circ f$, con $g \in \text{Mo}(\mathbf{A}^2(\mathbf{R}))$. Entonces los casos posibles son:

- (1) g es una traslación. Como hemos visto antes, f es entonces una homotecia.
- (2) g es una simetría σ . Como podemos elegir h con centro cualquiera, tomamos como centro O . Entonces es doble, luego tiene que estar en el eje de σ . Para ver que σ y h conmutan basta tomar un sistema de referencia métrico $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$, con \mathcal{B} una base tal que $M_{\mathcal{B}}(\vec{\sigma})$ es diagonal. Entonces

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}}(f) = M_{\mathcal{R}}(h)M_{\mathcal{R}}(g) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Este caso cae, pues, en las condiciones descritas en (a).

- (3) g es una simetría con deslizamiento $\tau \circ \sigma$. Entonces $f = h \circ \tau \circ \sigma = h' \circ \sigma$, como hemos visto antes. Así, estamos también en las condiciones de (a).
- (4) g es una simetría central. Entonces f es una homotecia.
- (5) g es un giro, que denotaremos g (claro). Nuevamente escogemos el centro de f como centro de h , y entonces O debe ser el centro del giro. La conmutatividad es análoga al caso (2). Por tanto, estamos en las condiciones de (b). *Q.E.D.*

Proposición.— Toda semejanza de $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ que no sea un movimiento ni una homotecia se puede escribir como:

- (a) El producto de una homotecia por una simetría axial verificando:

(a.1) El producto es conmutativo.

(a.2) El centro de la homotecia está en el eje de simetría y es, por tanto, el centro de la semejanza.

Estas semejanzas se denominan simetrías axiales con dilatación.

(b) El producto de una homotecia por un giro verificando:

(b.1) El producto es conmutativo.

(b.2) El centro de la homotecia está en el eje de giro y es, en consecuencia, el centro de la semejanza.

Estas semejanzas se denominan giros con dilatación.

Demostración.— Partamos de nuevo de f , una semejanza de razón λ y centro O y tomamos h , una semejanza de centro O y razón $\pm 1/\lambda$, de forma que la composición g , al ser un movimiento directo (lo logramos escogiendo el signo) y con puntos fijos, debe ser la identidad, una simetría axial o un giro.

Tema 5

La geometría del triángulo

5.1 Elementos notables.

Una vez aprendidas las herramientas de la geometría afín, volveremos a estudiar los elementos notables del triángulo – baricentro, circuncentro, ortocentro, incentro, y circunferencias circunscrita e inscrita – desde este punto de vista.

Recordemos que el circuncentro de un triángulo es el punto D de intersección de las tres mediatrices. Al ser las mediatrices los hiperplanos medidores de cada par de vértices, el punto D está a la misma distancia de los tres vértices, luego existe una circunferencia centrada en D que pasa por los tres vértices, llamada circunferencia circunscrita.

Veamos ahora una caracterización afín del baricentro.

Proposición.– Si ABC es un triángulo, existe un único punto G del plano, tal que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Demostración.– Si O es el origen de coordenadas, se tiene:

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}$$

y, sumando las tres igualdades, resulta:

$$\vec{0} = 3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \text{si y sólo si} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

y de aquí se obtiene el único punto $G = O + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})/3$. *Q.E.D.*

Proposición.– Si M_A es el punto medio del lado BC , se verifica:

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM_A}$$

y lo mismo para los otros lados.

Demostración.– Por la proposición anterior se tiene:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

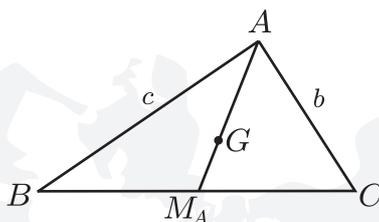
y entonces:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GM_A} + \overrightarrow{M_AB} + \overrightarrow{GM_A} + \overrightarrow{M_AC} = 2\overrightarrow{GM_A}.$$

Q.E.D.

Observación.— Esto prueba que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AM_A}/3$ y así, G está sobre la mediana AM_A . Análogamente sucede para las otras medianas, luego el punto G es el punto en el que se cortan las medianas, es decir, el *baricentro* del triángulo. Por otra parte, usando coordenadas cartesianas, si $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, las coordenadas cartesianas de G son:

$$G = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right).$$



A continuación demostraremos la existencia del ortocentro usando la geometría afín.

Proposición.— Las alturas de un triángulo ABC concurren en un punto llamado ortocentro.

Demostración.— Si por cada vértice se traza la paralela al lado opuesto, se obtiene un nuevo triángulo $A'B'C'$, y los vértices del primero son los puntos medios de los lados del segundo pues, por el teorema de Thales paralelo, se tiene, por ejemplo,

$$\overline{AC'} = \overline{BC} = \overline{AB'}.$$

Así las alturas de ABC son las mediatrices de $A'B'C'$, que concurren en el punto H . *Q.E.D.*

Corolario (Recta de Euler).— En un triángulo, el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados.

Demostración.— Sea D el circuncentro, H el ortocentro y G el baricentro de ABC , y tracemos las paralelas a cada lado por el vértice opuesto, como en la proposición anterior. Los baricentros de ABC y $A'B'C'$ coinciden. Por consiguiente, la homotecia de centro G y razón -2 transforma A en A' , B en B' y C en C' . Como circuncentro se transforma en circuncentro por esta homotecia, el circuncentro de ABC va sobre el ortocentro. De ahí el resultado. Nótese que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GD}$. *Q.E.D.*

Otro elemento notable de un triángulo es el *incentro*, centro de la circunferencia inscrita, que vamos a describir a continuación. Comenzaremos por describir analíticamente la bisectriz de un ángulo.

Lema.— Sean r_0, r_1 dos semirrectas de origen común A no contenidas en la misma recta, $\underline{u}_0, \underline{u}_1$ los vectores unitarios sobre r_0, r_1 , respectivamente. El lugar geométrico de los puntos de la región angular (cono afín) $C(A; A + \underline{u}_0, A + \underline{u}_1)$ que equidistan de las rectas que contienen a r_0, r_1 es el rayo interior

$$t = A + \{\lambda(\underline{u}_0 + \underline{u}_1) \mid \lambda \geq 0\},$$

al que se llama la *bisectriz* de la región angular. Por abuso de lenguaje, diremos que el rayo t es la bisectriz del ángulo $(\widehat{r_0, r_1})$.

Demostración.— Sea $P = A + \lambda \underline{u}_0 + \mu \underline{u}_1$ un punto de la región angular. La perpendicular por P a la recta que contiene a r_0 es

$$A + \lambda \underline{u}_0 + \mu \underline{u}_1 + \langle (\underline{u}_0 \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_0 - \underline{u}_1 \rangle,$$

y su punto de corte con r_0 es $P_0 = A + [\lambda + \mu(\underline{u}_0 \cdot \underline{u}_1)] \underline{u}_0$. Así

$$\overrightarrow{P_0 P} = \mu [-(\underline{u}_0 \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_0 + \underline{u}_1].$$

Haciendo lo propio con la otra recta obtenemos un punto similar P_1 tal que

$$\overrightarrow{P_1 P} = \lambda [\underline{u}_0 - (\underline{u}_0 \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_1].$$

Así $|\overrightarrow{P_0 P}| = |\overrightarrow{P_1 P}|$ si y sólo si $\lambda = \mu$, de donde el resultado. *Q.E.D.*

Teorema.— Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo concurren en un punto I interior al triángulo, que es centro de una circunferencia tangente a los tres lados, y que se llama circunferencia inscrita en el triángulo.

Demostración.— Evidentemente el corte de dos bisectrices nos da un punto que equidista de los tres lados, por lo que la existencia del incentro es obvia. Además la circunferencia centrada en el incentro con radio la distancia de éste a cualquiera de los lados sólo puede cortar a dichos lados en un punto, precisamente aquél que da la distancia (esto es, el pie de la perpendicular al lado desde el incentro). De esta forma, la circunferencia es tangente a los tres lados.

5.2 La circunferencia de los nueve puntos.

Vamos a intentar en esta última sección poner de manifiesto la potencia de la geometría analítica, en concreto la geometría afín, frente a los métodos de la geometría sintética o clásica. Demostraremos de forma sencilla un resultado cuya demostración clásica es bastante más complicada, concretamente el que se conoce con el nombre de la *circunferencia de los nueve puntos*. En este tema, consideraremos el plano afín $X = \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$.

Observación.— Si tenemos fijado un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$, y las coordenadas del centro de una circunferencia son $C = (a, b)$, entonces los puntos de la circunferencia $\mathcal{C}(C, r)$ son los puntos $P = (x, y)$ que satisfacen la ecuación $d(C, P) = r$, es decir, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$. Como ambos lados de la ecuación son no negativos, podemos considerar sus cuadrados, y decir lo siguiente:

Proposición.— Dado $C = (a, b) \in \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ y $r \geq 0$, la circunferencia $\mathcal{C}(C, r)$ es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Una consecuencia importante de la definición sintética de una circunferencia es la siguiente:

Proposición.— Si f es una semejanza de razón λ , y \mathcal{C} es una circunferencia de centro C y radio r , entonces $f(\mathcal{C})$ es la circunferencia de centro $f(C)$ y radio λr .

Demostración.— Es consecuencia directa de la definición de circunferencia, y del hecho que una semejanza de razón λ envía vectores de módulo r a vectores de módulo λr . *Q.E.D.*

Otra de las propiedades que necesitamos, para facilitar las demostraciones afines de los resultados, es la posibilidad de escoger un sistema de referencia adecuado.

Proposición.— Dados dos puntos distintos cualesquiera $P, Q \in A^2(\mathbf{R})$, existen exactamente dos semejanzas, una directa y otra inversa, que transforman $(0, 0)$ en P y $(1, 0)$ en Q .

Demostración.— Consideremos la circunferencia $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P, \|\overrightarrow{PQ}\|)$ y la recta $r = P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle^\perp$. Claramente, su intersección es un par de puntos $\{R, R'\} = \mathcal{C} \cap r$. Una semejanza que lleve $(0, 0)$ en P y $(1, 0)$ en Q , debe llevar la circunferencia $\mathcal{C}((0, 0), 1)$ en \mathcal{C} y el eje y en r , luego debe llevar $(0, 1)$ bien en R bien en R' . Cada posibilidad da lugar a una semejanza, una directa y la otra inversa. *Q.E.D.*

Corolario.— Dados cuatro puntos P, Q, R y S de \mathbf{R}^2 , existen exactamente dos semejanzas, una directa y otra inversa, que envían P en R y Q en S .

Demostración.— Existen al menos dos, ya que podemos componer las inversas de las que envían $(0, 0), (1, 0)$ en P, Q con las que envían $(0, 0), (1, 0)$ en R, S . Al menos deben resultar una semejanza directa y otra inversa. Pero si hubiera más de dos semejanzas distintas, por ejemplo dos directas, la podríamos componer con la semejanza directa que envía $(0, 0), (1, 0)$ en P, Q , y obtendríamos más de una semejanza directa que transforma $(0, 0), (1, 0)$ en R, S , lo cual sabemos que es imposible. *Q.E.D.*

Vamos a probar ya un resultado clásico no demasiado complicado, de manera asombrosamente sencilla. Este resultado lo necesitaremos más adelante.

Teorema.— Sean $A, B \in A^2(\mathbf{R})$, sea M el punto medio de \overline{AB} , y sea $r = d(M, A) = d(M, B)$. Entonces un punto C (distinto de A y B) pertenece a la circunferencia $\mathcal{C}(M, r)$ si y sólo si el ángulo \widehat{C} del triángulo ABC es recto.

Demostración.— Consideremos A, B y M como en el enunciado, y un punto C cualquiera. Sabemos que existe una afinidad f que envía M en $(0, 0)$ y B en $(1, 0)$. Por tanto, f envía A en $(-1, 0)$. Como las afinidades preservan circunferencias y ángulos, el punto C estará en la circunferencia $\mathcal{C}(M, r)$ si y sólo si $f(C)$ está en la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. Por otra parte, el ángulo \widehat{C} de ABC será recto si y sólo si el ángulo $\widehat{f(C)}$ de $f(A)f(B)f(C)$ lo es. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, y la circunferencia $\mathcal{C}(M, r)$ es la circunferencia $\mathcal{C}((0, 0), 1)$.

Entonces, el punto $C = (x, y)$ estará en \mathcal{C} si y sólo si $x^2 + y^2 = 1$.

Por otra parte, el ángulo \widehat{C} será recto si y sólo si el vector \overrightarrow{AC} es perpendicular al vector \overrightarrow{BC} . Es decir, si y sólo si se tiene:

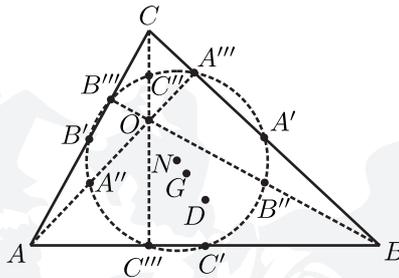
$$(x + 1, y) \cdot (x - 1, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Por tanto, las dos condiciones son equivalentes. *Q.E.D.*

Ya podemos enunciar y demostrar uno de los teoremas más curiosos sobre triángulos, cuya demostración se simplifica muchísimo gracias a los métodos de la geometría afín. Recordemos que los puntos notables de un triángulo son el circuncentro D (intersección

de las tres mediatrices), el baricentro G (intersección de las tres medianas), el ortocentro O (intersección de las tres alturas) y el incentro I (intersección de las tres bisectrices). Recordemos también que el *pie* de la altura correspondiente a un vértice es su corte con la recta determinada por el lado opuesto. Se tiene entonces:

Teorema de la circunferencia de los nueve puntos.— Dado un triángulo cualquiera ABC en $A^2(\mathbf{R})$, los puntos medios de los tres lados, los puntos medios de los segmentos que van del ortocentro a los tres vértices, y los pies de las tres alturas, están en una misma circunferencia.



Demostración.— Llamemos A' , B' y C' a los puntos medios de los lados a , b y c respectivamente. Sea O el ortocentro de ABC , y llamemos A'' , B'' y C'' a los puntos medios de los segmentos \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC} respectivamente. Finalmente, sean A''' , B''' y C''' los pies de las alturas correspondientes a los vértices A , B y C , respectivamente. Debemos probar que estos nueve puntos están en la misma circunferencia. Más concretamente, si llamamos r al radio de la circunferencia circunscrita (es decir $r = d(D, A) = d(D, B) = d(D, C)$ donde D es el circuncentro), y denotamos N al punto medio del segmento \overline{OD} , demostraremos que los nueve puntos citados pertenecen a la circunferencia \mathcal{C} de centro N y radio $r/2$.

Consideremos en primer lugar la homotecia h'' de centro O y razón $1/2$. Por definición se tiene $h''(A) = A''$, $h''(B) = B''$ y $h''(C) = C''$ y $h''(D) = N$. Además, al escalar las distancias por $1/2$, h'' transforma circunferencias en circunferencias con la mitad de radio, y se tiene: $h''(\mathcal{C}(D, r)) = \mathcal{C}(h''(D), r/2) = \mathcal{C}(N, r/2) = \mathcal{C}$. Es decir, h'' transforma la circunferencia circunscrita en \mathcal{C} . Como A , B y C están en la circunferencia circunscrita, se tiene A'' , B'' , $C'' \in \mathcal{C}$.

Consideremos ahora la homotecia h' de centro G (el baricentro) y razón $-1/2$. Veamos que h' también transforma la circunferencia circunscrita en \mathcal{C} . Como h' transforma los radios de las circunferencias multiplicándolos por $1/2$, sólo hay que probar que $h'(D) = N$. Sabemos por definición que $h'(D) = G - 1/2 \overline{GD}$. Pero, por el teorema de la recta de Euler, sabemos que $\overline{OG} = 2/3 \overline{OD}$, luego se tiene:

$$\begin{aligned} h'(D) &= G - \frac{1}{2} \overline{GD} = O + \overline{OG} - \frac{1}{2}(\overline{OD} - \overline{OG}) \\ &= O + \frac{2}{3} \overline{OD} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} \overline{OD}) = O + \frac{1}{2} \overline{OD} = N. \end{aligned}$$

Así, $h'(\mathcal{C}(D, r)) = \mathcal{C}(N, r/2) = \mathcal{C}$, es decir, h' transforma la circunferencia circunscrita en \mathcal{C} .

Recordemos ahora que el baricentro G es la intersección de las tres medianas, es decir, de los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Además, habíamos probado que $d(G, A) = 2 d(G, A')$, y lo mismo ocurre con los otros dos vértices. Esto implica que $h'(A) =$

A' , $h'(B) = B'$ y $h'(C) = C'$. Al igual que antes, como A , B y C pertenecen a la circunferencia circunscrita, se sigue que A' , B' y C' pertenecen a \mathcal{C} .

Por tanto, los seis puntos A' , B' , C' , A'' , B'' , C'' están en la misma circunferencia, \mathcal{C} , de centro N . Es más, podemos llevar A' en A'' por la afinidad $f = h'' \circ (h')^{-1}$, que es una homotecia de razón -1 , es decir, una simetría central. Además, como $f(N) = h''((h')^{-1}(N)) = h''(D) = N$, se sigue que f es la simetría central de centro N , luego A' y A'' son diametralmente opuestos en \mathcal{C} . Y lo mismo ocurre con B' y B'' , y con C' y C'' .

Por último, recordemos que A''' , B''' y C''' son los pies de las alturas correspondientes a A , B y C . Como las alturas son perpendiculares a los lados opuestos, el ángulo $\widehat{A'A'''A''}$ es un ángulo recto. Pero como A' y A'' son los extremos de un diámetro de \mathcal{C} , el teorema demostrado anteriormente nos dice que A''' también está en \mathcal{C} , y lo mismo ocurre con B''' y con C''' . Por tanto, los nueve puntos están en la misma circunferencia, cuyo centro es el punto medio N entre el ortocentro y el circuncentro, y cuyo radio es la mitad del de la circunferencia circunscrita. *Q.E.D.*