# Álgebra Lineal y Geometría

## Tema 3

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

# Índice

# Tema 3: Espacios vectoriales

## 3.1. Espacios vectoriales: Definición y ejemplos.

Seguiremos, en lo sucesivo, denotando por $k$ un cuerpo arbitrario, que para nosotros puede suponerse que es $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

**Definición.–** Sea $k$ un cuerpo, $0$ y $1$ los elementos neutros de la suma y el producto, respectivamente. Un espacio vectorial sobre $k$, también denominado $k$–espacio vectorial, es un conjunto $V$ con dos operaciones: una interna, denominada suma y notada $+$, y otra externa, de $k \times V$ en $V$, denominada producto por escalares y denotada $\cdot$ (o por simple yuxtaposición), verificando:

(a) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

(b) El producto por escalares verifica, para cualesquiera $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in k$,

- (b.1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- (b.2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
- (b.3) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.
- (b.4) $1u = u$.

Los elementos de $V$ se denominan vectores y los de $k$, como de costumbre, escalares.

**Notación.–** Usaremos las notaciones siguientes, dado un $k$–espacio vectorial $V$:

(a) Los elementos $V$ se denotarán con letras subrayadas: $\underline{v} \in V$.

(b) Dado $\underline{v} \in V$ el inverso aditivo es único y ha de ser igual necesariamente a $(-1)\underline{v}$. Se notará $-\underline{v}$. Así mismo, también notaremos $\underline{u} + (-\underline{v}) = \underline{u} - \underline{v}$.

(c) El elemento neutro de la suma en $V$ se denotará $\underline{0}$.

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial, $\underline{u}, \underline{v} \in V$, $\alpha, \beta \in k$. Se verifican las siguientes propiedades:

(a) $\alpha\underline{0} = \underline{0}$, $0\underline{u} = \underline{0}$.

(b) $\alpha(\underline{u} - \underline{v}) = \alpha\underline{u} - \alpha\underline{v}$, $(\alpha - \beta)\underline{u} = \alpha\underline{u} - \beta\underline{u}$.

(c) $(-\alpha)\underline{u} = -(\alpha\underline{u})$, $\alpha(-\underline{u}) = -(\alpha\underline{u})$.

(d) $\alpha\underline{u} = \underline{0}$ implica que $\alpha = 0$ ó $\underline{u} = \underline{0}$.

**Demostración.–** Todas las demostraciones son elementales y sólo requieren el uso de las propiedades axiomáticas de $k$ y $V$. Hagamos por ejemplo el primer apartado de (a). Para ello tomemos un $\underline{x} \in V$ cualquiera, y un $\alpha \in k$ no nulo (el caso $\alpha = 0$ es el segundo apartado). Entonces

$$\underline{x} + \alpha\underline{0} = \alpha\frac{1}{\alpha}\underline{x} + \alpha\underline{0} = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\underline{x} + \underline{0}\right) = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\underline{x}\right) = \underline{x},$$

por lo que $\alpha\underline{0} = \underline{0}$.

Para finalizar haremos el segundo caso de (c). Para ello dados $\alpha \in k$ y $\underline{u} \in V$, consideramos

$$\alpha\underline{u} + \alpha(-\underline{u}) = \alpha(\underline{u} + (-\underline{u})) = \alpha(\underline{u} - \underline{u}) = \alpha\underline{0} = \underline{0},$$

lo cual prueba que $\alpha(-\underline{u})$ es el inverso aditivo de $\alpha\underline{u}$, esto es, $-(\alpha\underline{u})$.

Las restantes pruebas son buenos ejercicios para que los alumnos se habitúen a usar las propiedades de forma rigurosa, sin apoyarse en los vectores a los que están acostumbrados. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Ejemplos.–** Notemos que, para dar un espacio vectorial, es necesario no solamente dar un conjunto, sino las dos operaciones. Veremos a continuación algunos ejemplos procedentes de diversos campos de las matemáticas, aunque no daremos las demostraciones, por apartarse del temario de esta asignatura.

(a) El ejemplo fundamental será el espacio numérico $n$–dimensional definido como sigue: el conjunto base es

$$k^n = \{(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in k\},$$

y las dos operaciones son:

$$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n),$$

$$\alpha(a_1, ..., a_n) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n).$$

Con estas operaciones comprobar las propiedades de espacio vectorial es elemental. Este ejemplo incluye los casos más conocidos (¿únicos?) hasta ahora por los alumnos, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

(b) Supongamos que tenemos dos cuerpos $k \subset K$, de tal forma que, dados dos elementos cualesquiera en $k$, su suma y su producto son iguales si se consideran como elementos de $k$ y si se consideran como elementos de $K$. Entonces $K$ es un $k$–espacio vectorial con las operaciones:

- Dados $\alpha, \beta \in K$, $\alpha + \beta$ es la suma en $K$.
- Dados $\alpha \in k \subset K$ y $\beta \in K$, el producto por escalares $\alpha\beta$ es el producto en $K$.

(c) El conjunto $\mathcal{M}(m \times n; k)$ es un $k$–espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalares, como vimos en la lección 2.2.

(d) Sea $AX^t = 0_{n\times 1}$ un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en $m$ variables. Consideremos el conjunto de soluciones $L \subset k^m$, dotadas con las mismas operaciones de suma y producto por escalares que definimos en $k^m$. Entonces $L$ es a su vez un $k$–espacio vectorial.

(e) El conjunto $k[X]$, con la suma de polinomios y el producto por escalares usual, es un $k$–espacio vectorial. De hecho, como sólo se consideran los productos de escalares por polinomios, el conjunto

$$k[X]_r = \{p(X) \in k[X] \mid \text{grado}(p) \leq r\} \cup \{0\}$$

también es un $k$–espacio vectorial.

(f) El conjunto de funciones continuas (diferenciables, Riemann–integrables,...) en un abierto $(a,b) \subset \mathbf{R}$ es un $\mathbf{R}$–espacio vectorial.

(g) Una ecuación diferencial lineal homogénea es una expresión de la forma

$$a_0(x)y^{n)'} + a_1(x)y^{n-1)'} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son funciones continuas en $\mathbf{R}$, $y$ es una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ a determinar e $y', y'', \ldots, y^{n-1)'}, y^{n)'}$ son sus derivadas sucesivas. Usando las propiedades de la derivada es fácil ver que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un $\mathbf{R}$–espacio vectorial.

(h) El conjunto $V = \{\underline{0}\}$ es un $k$–espacio vectorial para cualquier $k$. Es el menor que existe, ya que por ser $(V,+)$ grupo debe existir elemento neutro de la suma.

(i) De manera similar al ejemplo (e), consideremos $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$ y el conjunto

$$W = \{f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \mid a_i \in k\}$$

Este conjunto es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares habituales. Por motivos que luego veremos, se denomina el espacio dual de $k^n$.

## 3.2. Dependencia e independencia lineal.

**Definición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial. Diremos que $\underline{v} \in V$ es combinación lineal de $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in k$ verificando

$$\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_m\underline{v}_m.$$

**Ejemplos.–** Algunos ejemplos elementales son:

(a) El vector $\underline{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores. De forma similar, un vector $\underline{v} \in V$ siempre es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores que contenga a $\underline{v}$.

(b) Cuando $V = k^n$, consideramos el conjunto $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ donde $\underline{e}_i$ es el vector que tiene todas sus componentes $0$ excepto la $i$–ésima, que es un $1$. Entonces, dado $(a_1, \ldots, a_n) \in V$,

$$(a_1, \ldots, a_n) = a_1\underline{e}_1 + \ldots + a_n\underline{e}_n,$$

por lo que todo elemento de $V$ es combinación lineal de $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$.

(c) Sea $V = \mathcal{M}(m \times n; k)$ y sea $E_{ij}$ la matriz que tiene todos sus elementos $0$ excepto el $(i, j)$, que es $1$. Entonces, análogamente, para cualquier $A = (a_{ij}) \in V$,

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

**Definición.–** Sea $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\} \subset V$. Diremos que $S$ es un conjunto linealmente dependiente (o que los vectores $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ son linealmente dependientes) si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in k$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_m\underline{v}_m = \underline{0}.$$

Esto es, $S$ es linealmente dependiente si $\underline{0}$ es combinación lineal no trivial de los elementos de $S$.

En caso contrario, $S$ se dice linealmente independiente. Esto es, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ son linealmente independientes cuando

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_m\underline{v}_m = \underline{0} \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

**Ejemplos.–** Veamos ejemplos de dependencia e independencia lineal.

(a) Si $\underline{0} \in S$, $S$ ha de ser linealmente dependiente.

(b) Si $S$ es un conjunto linealmente dependiente, cualquier conjunto (finito) $T$ que lo contenga también es linealmente dependiente. Del mismo modo, cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

(c) En particular, el conjunto vacío es linealmente independiente.

(d) Dado un vector $\underline{v} \neq \underline{0}$, el conjunto $\{\underline{v}\}$ es linealmente independiente.

**Proposición.–** Sea $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\} \subset V$. Entonces:

(a) $S$ es linealmente dependiente si y sólo si existe un $i$ tal que $\underline{v}_i$ depende linealmente de $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_m$.

(b) $S$ es linealmente independiente si y sólo si ningún $\underline{v}_i$ depende linealmente de los restantes vectores de $S$.

**Demostración.–** Es claro que probar (a) prueba (b) y viceversa, pues uno es la negación del otro: demostraremos entonces (a). En primer lugar supondremos que $S$ es linealmente dependiente: por tanto existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in k$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_m \underline{v}_m = \underline{0}.$$

Si suponemos que $\alpha_i \neq 0$, entonces la igualdad anterior se puede traducir en

$$\underline{v}_i = \frac{-1}{\alpha_i} \left( \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_m \underline{v}_m \right),$$

por lo que $\underline{v}_i$ es combinación lineal de los restantes.

Ahora supondremos que algún $\underline{v}_j$ es combinación lineal de los restantes vectores de $S$,

$$\underline{v}_j = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_{j-1} \underline{v}_{j-1} + \beta_{j+1} \underline{v}_{j+1} + \ldots + \beta_m \underline{v}_m.$$

La expresión anterior se traduce en

$$\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_{j-1} \underline{v}_{j-1} - \underline{v}_j + \beta_{j+1} \underline{v}_{j+1} + \ldots + \beta_m \underline{v}_m,$$

por lo que $\underline{0}$ es combinación lineal no trivial de los vectores de $S$, ya que el coeficiente de $\underline{v}_j$ es no nulo. $\mathcal{Q.E.D}$.

**Observación.–** Consideremos el ejemplo $V = k^n$, y sean $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ dados por

$$\underline{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \underline{v}_i = (\beta_{1i}, \ldots, \beta_{ni}).$$

Entonces, por las propiedades del rango estudiadas en las lecciones 2.6. y 2.8., sabemos que $\underline{v}$ es combinación lineal de $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ si y sólo si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nm} \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1m} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nm} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Aplicando esta misma propiedad $m$ veces deducimos entonces que $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$ es linealmente independiente si y sólo si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1m} & \ldots & \beta_{nm} \end{pmatrix} = m,$$

lo que prueba, en particular, que un conjunto de más de $n$ vectores no puede ser linealmente independiente en $k^n$.

## 3.3. Sistemas generadores. Bases.

**Definición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial, $S \subset V$ un subconjunto no necesariamente finito. Diremos que $S$ es un sistema generador de $V$ si todo $\underline{v} \in V$ es combinación lineal de un subconjunto finito de $S$.

Si existe un sistema generador finito, $V$ se dice de dimensión finita. En ese caso, la definición de sistema generador se puede simplificar para decir que $S$, finito, es sistema generador si y sólo si todo vector de $V$ es combinación lineal de los vectores de $S$.

**Ejemplos.–** Veamos algunos de los ejemplos que hemos estudiado hasta ahora que son de dimensión finita.

(a) El espacio $V = k^n$ es de dimensión finita, ya que todo vector es combinación lineal de $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$.

(b) El espacio $V = \mathcal{M}(m \times n; k)$ también es de dimensión finita, ya que toda matriz es combinación de las matrices $E_{ij}$, que son $mn$ en total.

(c) El cuerpo $\mathbf{C}$ como $\mathbf{R}$–espacio vectorial es de dimensión finita, ya que todo complejo es de la forma $\alpha + \beta\imath$, con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, por lo que el conjunto $\{1, \imath\}$ es un sistema generador de $\mathbf{C}$.

(d) El $k$–espacio vectorial $k[X]_r$ es de dimensión finita, ya que todo polinomio de grado menor o igual que $r$ se puede escribir como combinación lineal de $\{1, X, X^2, \ldots, X^r\}$.

(e) El $k$–espacio $V = \{\underline{0}\}$ admite como sistema generador a $S = \emptyset$, y a $\{\underline{0}\}$.

(f) El espacio dual de $k^n$ admite como sistema de generadores a $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

**Observación.–** Si $S_1, S_2$ son dos subconjuntos finitos de $V$ tales que $S_2$ es sistema generador y todo vector de $S_2$ es combinación lineal de vectores de $S_1$, $S_1$ también es sistema generador: basta escribir un vector cualquier como combinación lineal de elementos de $S_2$ y sustituir éstos por las correspondientes combinaciones lineales de elementos de $S_1$.

**Definición.–** Un conjunto $\mathcal{B} \subset V$ se dice una base si es un sistema de generadores linealmente independiente.

**Ejemplos.–** Todos los ejemplos anteriores son bases de sus respectivos espacios vectoriales, salvo $\{\underline{0}\}$ en (e). Para dar otro ejemplo de sistema generador que no sea base basta ampliar alguno de los conjuntos anteriores con más vectores. Demos un ejemplo menos elemental.

Una base de $k[X]$ es el conjunto (infinito) $\{1, X, X^2, \ldots\}$, porque todo polinomio es combinación lineal (finita) de estos vectores y son linealmente independientes por que una combinación lineal finita de ellos igualada a $0$ debe tener todos sus coeficientes $0$ forzosamente.

Daremos a continuación un resultado esencial, que combina los dos conceptos más importantes estudiados hasta ahora: independencia lineal y sistema generador. Antes probaremos algunos resultados auxiliares.

**Lema I.–** Sean $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ linealmente independientes, $\underline{v} \in V$. Si $\underline{v}$ no es combinación lineal de $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, entonces $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ son linealmente independientes.

**Demostración.–** Por reducción al absurdo, si $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ fueran linealmente dependientes hallaríamos $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ no todos nulos tales que

$$\beta\underline{v} + \alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}.$$

Ahora bien, si $\beta \neq 0$ tendríamos que $\underline{v}$ es combinación lineal de los $\underline{v}_i$, contradiciendo las hipótesis. Por tanto ha de ser $\beta = 0$, pero eso implica que existe una combinación lineal de los $\underline{v}_i$ igualada a $\underline{0}$, con no todos los coeficientes nulos. Así $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ son linealmente dependientes y llegamos también a contradicción. Esto prueba el resultado. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Lema II.–** Sean $T \subset S \subset V$ conjuntos finitos de tal forma que $T$ es linealmente independiente y $S$ es sistema generador. Entonces existe $\mathcal{B}$, base de $V$ tal que $T \subset \mathcal{B} \subset S$.

**Demostración.–** Consiste en aplicar reiteradamente el lema I, de la siguiente forma: llamemos

$$T = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r\} \subset \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s\} = S.$$

Empecemos tomando $\mathcal{B}_0 = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r\}$ e iremos añadiendo vectores de $S \setminus T$ o no, siguiendo el siguiente proceso.

Miremos primero si $\underline{v}_1$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}_0$ (por ahora, $\mathcal{B}_0 = T$). Si no es combinación lineal lo añadimos a $\mathcal{B}_0$ y, si lo es, no lo añadimos. En cualquier caso, repetimos el proceso con $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_s$. Cuando hayamos realizado las $s$ comprobaciones y añadido los vectores que sean, definimos $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$.

El resultado es obviamente un conjunto $\mathcal{B}$ que verifica $T \subset \mathcal{B} \subset S$, por construcción. Además, por el lema I, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, ya que $\mathcal{B}_0$ se mantiene linealmente independiente en todos los pasos del proceso. Resta ver que $\mathcal{B}$ es sistema generador de $V$. Para ello notemos que todos los elementos de $S$ son combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$, bien porque están en $\mathcal{B}$ bien porque, si no están en $\mathcal{B}$, es porque son combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$. Como hemos indicado, esto implica que $\mathcal{B}$ es sistema generador. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $V$ admite una base finita (esto es, con una cantidad finita de elementos). Más aún:

(a) Todo sistema generador finito contiene una base.

(b) Todo conjunto finito linealmente independiente se puede ampliar a una base finita.

**Demostración.–** Claramente (a) ó (b) implican la existencia de una base así que nos limitaremos a probar ambas afirmaciones.

Para probar (a): dado un sistema generador finito $S$, basta entonces aplicar el lema II a la situación $\emptyset \subset S$ para obtener una base finita contenida en $S$.

Para probar (b): dado un conjunto linealmente independiente $T$, consideramos un sistema generador finito cualquiera (debe existir por ser $V$ de dimensión finita) $S$ y aplicamos el lema II a la situación $T \subset T \cup S$, que es sistema generador por contener a $S$. $\mathcal{Q.E.D.}$

## 3.4. Teorema de la base.

Esta lección se dedica fundamentalmente a probar el teorema de la base, resultado fundamental para todo lo que sigue, que también requiere resultados auxiliares. De ahora en adelante, salvo expresa mención en sentido contrario, $V$ representará un $k$–espacio vectorial de dimensión finita.

**Lema I (Lema del intercambio).–** Sea $\underline{a} \in V$ un vector distinto de $\underline{0}$ que es combinación lineal de $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. Entonces existe un $i$ tal que $\underline{v}_i$ es combinación lineal de $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{a}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$.

**Demostración.–** Como $\underline{a} \neq 0$, en la expresión

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n,$$

debe existir, forzosamente, un $\alpha_i \neq 0$. Entonces

$$\underline{v}_i = \frac{-1}{\alpha_i} \left( \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} - \underline{a} + \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n \right),$$

lo que prueba el resultado. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Lema II.–** Sean $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m\}$ una base de $V$ y $A = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r\}$ un conjunto linealmente independiente. Entonces $r \leq m$.

**Demostración.–** Por el lema del intercambio, como $\underline{v}_1$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$, podemos intercambiarlo con uno de los elementos de $\mathcal{B}$, pongamos con $\underline{u}_1$. Obtenemos entonces un nuevo conjunto $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m\}$, que es de nuevo sistema generador como lo era $\mathcal{B}$, porque todo elemento de $\mathcal{B}$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}_1$.

Por tanto, como $\underline{v}_2$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}_1$, podemos intercambiarlo por un elemento de $\mathcal{B}_1$. Aún más, podemos tomar para intercambiar un vector de $\mathcal{B}_1$ que no sea $\underline{v}_1$.

En efecto, si nos fijamos en la demostración del lema del intercambio, veremos que podemos tomar cualquier vector de $\mathcal{B}_1$ que tenga coeficiente no nulo en la expresión de $\underline{v}_2$ como combinación lineal. Si el único vector disponible fuera $\underline{v}_1$, tendríamos

$$\underline{v}_2 = \alpha_1 \underline{v}_1,$$

con lo que $A$ sería linealmente dependiente, contradiciendo las hipótesis. Por tanto podemos tomar uno de los $\underline{v}_i$, $i = 2, \ldots, n$. Por comodidad de notación, supondremos que tomamos $\underline{v}_2$ y definimos

$$\mathcal{B}_2 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u}_3 \ldots, \underline{u}_m\},$$

que sigue siendo sistema generador, por análogas razones que $\mathcal{B}_1$.

Pasamos entonces al caso genérico, suponiendo que tenemos un sistema generador

$$\mathcal{B}_i = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i, \underline{u}_{i+1}, \ldots, \underline{u}_m\}.$$

Por el lema del intercambio, como $\underline{v}_{i+1}$ es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_i$, podemos intercambiarlo con uno de esos vectores. Pero, si no pudiera ser intercambiado por uno de los $\underline{u}_j$, $j = i+1, \ldots, m$, sería porque

$$\underline{v}_{i+1} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_i \underline{v}_i,$$

por lo que $A$ sería linealmente dependiente, en contra de las hipótesis. Así pues podemos intercambiar $\underline{v}_{i+1}$ con uno de los $\underline{u}_j$ y supondremos que es $\underline{u}_{i+1}$. Así definimos

$$\mathcal{B}_{i+1} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i+1}, \underline{u}_{i+2}, \ldots, \underline{u}_m\},$$

que sigue siendo sistema generador.

Podremos seguir de esta forma hasta llegar al mínimo entre $m$ y $r$. Supongamos que $r > m$ y lleguemos a un absurdo para probar el resultado. En efecto, si $r > m$ podemos construir un sistema generador

$$\mathcal{B}_m = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\},$$

y aún existirán vectores en $A$ que, forzosamente, dependerán de los que están en $\mathcal{B}_m$. Así, $A$ es linealmente dependiente, contradiciendo las hipótesis. $\mathcal{Q.E.D}$.

**Corolario.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita. Si existe un conjunto infinito linealmente independiente, o conjuntos linealmente independientes finitos pero arbitrariamente grandes, $V$ no es de dimensión finita.

**Demostración.–** En efecto, la proposición de la lección anterior, junto con el lema que acabamos de probar, implica que en un $k$–espacio vectorial de dimensión finita, los conjuntos linealmente independientes tienen un cardinal acotado por el cardinal de una base finita arbitraria. $\mathcal{Q.E.D}$.

**Observación.–** El $k$–espacio vectorial $k[X]$ no es de dimensión finita. Por tanto, tampoco lo es el espacio de funciones continuas (derivables, integrables,...).

**Teorema de la base.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial de dimensión finita. Entonces todas las bases de $V$ tienen el mismo número de elementos.

**Demostración.–** Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases distintas de $V$, con cardinales respectivos $n_1$ y $n_2$. Entonces, por ser $\mathcal{B}_1$ linealmente independiente, $n_1 \leq n_2$ y por ser $\mathcal{B}_2$ linealmente independiente $n_2 \leq n_1$. Así $n_1 = n_2$. $\mathcal{Q.E.D}$.

## 3.5. Dimensión. Coordenadas.

Esta lección está dedicada por entero a explotar consecuencias del teorema de la base: entre ellas los conceptos fundamentales de dimensión y coordenadas.

**Definición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial (de dimensión finita). El número de elementos de una base cualquiera de $V$ se denomina dimensión de $V$, denotado $\dim(V)$.

**Ejemplos.–** En los ejemplos usuales, tenemos las siguientes dimensiones:

(a) $\dim(k^n) = n$.

(b) $\dim(\{\underline{0}\}) = 0$.

(c) $\dim(k[X]_r) = r + 1$.

(d) $\dim(\mathcal{M}(m \times n; k)) = mn$.

(e) La dimensión del espacio dual de $k^n$ es $n$.

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial, $\dim(V) = n$.

(a) Todo conjunto de $n$ vectores linealmente independiente es una base.

(b) Todo conjunto de más de $n$ vectores es linealmente dependiente.

(c) Todo sistema de generadores con $n$ vectores es una base.

(d) Todo sistema de generadores tiene, al menos, $n$ vectores.

(e) Si $W$ es otro $k$–espacio vectorial, $W \subset V$, $W$ es de dimensión finita y $\dim(W) \leq \dim(V)$.

(f) Si $W \subset V$ son dos $k$–espacios vectoriales con la misma dimensión, $V = W$.

**Demostración.–** Es obvio que (a) y (b) son equivalentes, así como (c) y (d). Haremos por ejemplo (a), ya que (c) es análogo. En efecto, si $A$ es un conjunto de $n$ vectores linealmente independiente, se puede extender a una base. Como toda base ha de tener $n$ elementos, $A$ es necesariamente una base.

Veamos ahora (e). Si $W \subset V$, tomamos una base $\mathcal{B}$ de $W$. Aunque no podemos decir nada acerca de si genera o no todo $V$, sí podemos asegurar que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente de $V$, ya que esto sólo depende del conjunto y de $k$, no del espacio vectorial en el que está inmerso el conjunto. Así, $\mathcal{B}$ puede extenderse a una base $\mathcal{B}'$ de $V$. Por tanto, como $\mathcal{B}'$ ha de ser finita, $W$ es de dimensión finita y

$$\dim(W) = \sharp(\mathcal{B}) \leq \sharp(\mathcal{B}') = \dim(V).$$

Veamos por último (f). En efecto, si $W \subset V$, tomamos como antes una base $\mathcal{B}$ de $W$ y la extendemos a una base $\mathcal{B}'$ de $V$. Dado que $\dim(W) = \dim(V)$, ha de ser $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ y, por tanto, $\mathcal{B}$ genera $V$, de donde $W = V$. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Observación.–** El concepto de coordenadas respecto de una base es uno de los más importantes: es particularmente esencial que el alumno distinga entre vectores y coordenadas; si es necesario poniendo énfasis en los ejemplos distintos de $k^n$ para acentuar la diferencia.

**Proposición.–** Sea $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ una base de $V$, $\underline{v} \in V$. Entonces existen unos escalares únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ tales que

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{u}_n.$$

**Demostración.–** La existencia de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ está garantizada por el hecho de que $\mathcal{B}$ es sistema generador de $V$. Para probar la unicidad supondremos que $\underline{v}$ se puede expresar de dos formas distintas como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{u}_n = \beta_1 \underline{u}_1 + \ldots + \beta_n \underline{u}_n.$$

Entonces ha de ser

$$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\, \underline{u}_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\, \underline{u}_n,$$

de donde, al ser $\mathcal{B}$ linealmente independiente,

$$\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

esto es, $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, \ldots, n$. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Definición.–** En la situación de la proposición, la $n$–upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k^n$ se denominan coordenadas de $\underline{v}$ con respecto a $\mathcal{B}$, y se denota $(\underline{v})_{\mathcal{B}}$.

En (numerosas) ocasiones abusaremos de la notación y consideraremos las coordenadas indistintamente como $n$–upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y como matriz de orden $1 \times n$, $(\alpha_1 \; \ldots \; \alpha_n)$.

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial, $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ una base de $V$; $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ vectores de $V$. Son equivalentes:

(a) $\underline{v}$ es combinación lineal de $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$.

(b) $(\underline{v})_{\mathcal{B}}$ es combinación lineal de $(\underline{v}_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (\underline{v}_m)_{\mathcal{B}}$.

**Demostración.–** Denominemos

$$(\underline{v})_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad (\underline{v}_i)_{\mathcal{B}} = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}), \; i = 1, \ldots, m.$$

Entonces si tenemos

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \left( \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \underline{u}_j \right) = \sum_{i,j} (\gamma_i \beta_{ij}) \underline{u}_j,$$

por lo que, por la unicidad de las coordenadas,

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left( \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \beta_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \beta_{in} \right) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}),$$

y la otra implicación es análoga. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Corolario.–** Dados vectores $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p \in V$ y escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in k$,

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{v}_i \iff (\underline{v})_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\underline{v}_i)_{\mathcal{B}}$$

**Observación.–** A partir de este corolario es directo ver que la dependencia e independencia lineal de un conjunto de vectores o el hecho de ser o no sistema generador se pueden ver a partir de las coordenadas respecto de una base cualquiera.

## 3.6. Cambios de base.

En esta sección trabajaremos con $k^n$ como espacio de coordenadas de un $k$–espacio vectorial arbitrario $V$ de dimensión $n$. Como ilustración primordial de la diferencia conceptual entre vectores y coordenadas, estudiaremos a fondo la relación entre coordenadas respecto de distintas bases.

**Observación.–** En el caso $V = k^n$, un conjunto de $n$ vectores $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ dados por

$$\underline{v}_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$$

es una base si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Veamos por qué.

Para empezar $S$ es sistema generador porque todo vector de $V$ es combinación lineal de sus elementos, como se puede ver rápidamente por el criterio dado en 3.2.: ningún vector que añadamos a la matriz $(a_{ij})$ puede hacer crecer el rango.

Además son linealmente independientes, porque el rango de la matriz que forman es $n$ y, si retiramos una fila, el rango disminuye obviamente. Así, ninguno de los vectores depende linealmente de los restantes y el conjunto ha de ser linealmente independiente.

Esta observación, llevada al caso general, arroja el siguiente resultado.

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial de dimensión $n$, $\mathcal{B}$ una base cualquiera de $V$ y $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ un conjunto de vectores tales que

$$(\underline{u}_j)_{\mathcal{B}} = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) .$$

Entonces $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ son base de $V$ si y sólo si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

**Demostración.–** El resultado se sigue de combinar la observación anterior con la última de la lección 3.5. $\mathcal{Q.E.D.}$

Vamos a tratar ahora un tema distinto: sea $V$ un $k$–espacio vectorial de dimensión $n$, $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ dos bases de $V$. Estudiaremos la relación que existe entre las coordenadas de un mismo vector respecto de $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{B}'$.

**Proposición.–** En las condiciones anteriores, sea $\underline{v} \in V$ con

$$(\underline{v})_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) , \quad (\underline{v})_{\mathcal{B}'} = (\beta_1, \dots, \beta_n) ,$$

y sean

$$(\underline{u}_i)_{\mathcal{B}'} = (c_{1i}, \dots, c_{ni}) ,$$

las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ respecto de $\mathcal{B}'$. Entonces

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} .$$

**Demostración.–** Basta aplicar la definición de coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ y la unicidad de éstas últimas. En concreto, tenemos que

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left( \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \underline{v}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_{ji} \right) \underline{v}_j ,$$

por lo que la coordenada $j$–ésima de $\underline{v}$ respecto de $\mathcal{B}'$ es precisamente

$$\alpha_1 c_{j1} + \dots + \alpha_n c_{jn} = \beta_j ,$$

de donde se tiene el enunciado. $\mathcal{Q.E.D}$.

**Definición.–** En las condiciones del enunciado, la matriz $(c_{ij})$ se denomina matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y se denotará por $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$, esto es

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}')(\underline{v})^t_{\mathcal{B}} = (\underline{v})^t_{\mathcal{B}'}.$$

**Observación.–** La matriz $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ es única verificando la condición de la proposición. En efecto, para que ésta se cumpla sobre los vectores de $\mathcal{B}$ es inmediato comprobar que las columnas de la matriz han de ser las coordenadas de los elementos de $\mathcal{B}$ respecto de $\mathcal{B}'$.

**Observación.–** Notemos que, como en $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ aparecen, por columnas, las coordenadas de una base respecto de otra, la matriz ha de ser invertible. En particular, por el resultado anterior y la unicidad que acabamos de enunciar, se tiene que

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1} = M(\mathcal{B}',\mathcal{B}).$$

## 3.7. Subespacios (I): Definición y ejemplos.

**Definición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita. Un subconjunto $L \subset V$ se denomina un subespacio vectorial si es, a su vez, un $k$–espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en $V$.

**Ejemplo.–** Si consideramos $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, vemos que $\mathbf{Q}$ es un subespacio de $\mathbf{R}$ como $\mathbf{Q}$–espacio vectorial, pero no como $\mathbf{R}$–espacio vectorial pues con la suma y el producto por escalares reales $\mathbf{Q}$ no es espacio vectorial.

**Proposición.–** Sea $L \subset V$, $L \neq \emptyset$. Son equivalentes:

(a) $L$ es un subespacio vectorial de $V$.

(b) Dados $\underline{u}, \underline{v} \in L$ y $\alpha, \beta \in k$ cualesquiera, se tiene que $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} \in L$.

**Demostración.–** Haremos por separado las dos implicaciones, ya que son esencialmente distintas en su estrategia.

$\boxed{\text{(a)} \Longrightarrow \text{(b)}}$ Esta implicación es sencilla: como $L$ es $k$–espacio vectorial, el producto de un escalar por un vector de $L$ ha de estar en $L$, así como la suma de vectores de $L$, por lo que se tiene (b).

$\boxed{\text{(b)} \Longrightarrow \text{(a)}}$ Entre elementos de $L$ tenemos definida una suma, por ser a su vez elementos de $V$. La hipótesis (b), para $\alpha = \beta = 1$, asegura que esta suma es una operación interna. Así mismo, el producto de un vector de $L$ por un escalar arbitrario es de nuevo un vector de $L$, tomando en (b) el caso $\beta = 0$. Por tanto, tenemos definidos en $L$ una suma y un producto por escalares.

Casi todas las propiedades que debe verificar $L$ para ser $k$–espacio vectorial se verifican inmediatamente porque se verifican en todo $V$. Sólo hay que verificar que $\underline{0} \in L$ y que, dado $\underline{u} \in L$, $-\underline{u} \in L$. Pero la primera afirmación se tiene por el caso $\alpha = \beta = 0$ y la segunda por el caso $\alpha = -1$, $\beta = 0$. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Corolario.–** Si $L$ es subespacio vectorial, cualquier combinación lineal de elementos de $L$ debe estar en $L$.

**Ejemplos.–** Veamos algunos ejemplos en los casos conocidos.

(a) Dado cualquier $k$–espacio vectorial $V$, el propio $V$ y $\{\underline{0}\}$ son siempre subespacios vectoriales de $V$ (denominados impropios o triviales).

(b) Sea $AX^t = 0_{m\times 1}$ un sistema homogéneo de $m$ ecuaciones lineales en $n$ incógnitas, $L$ el conjunto de sus soluciones. Entonces $L$ es un subespacio vectorial de $k^n$. En efecto, si tomamos dos soluciones, $\underline{u}$ y $\underline{v}$, y dos escalares $\alpha, \beta \in k$,
$$A\left(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}\right)^t = \alpha A\underline{u}^t + \beta A\underline{v}^t = 0_{m\times 1}.$$

(c) Las matrices diagonales, las triangulares superiores y las triangulares inferiores de orden $m \times n$, son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}(m \times n; k)$.

(d) Las funciones derivables en $\mathbf{R}$ son un subespacio de las funciones continuas en $\mathbf{R}$.

**Observación.–** Un ejemplo esencial es el siguiente: dado un $k$–espacio vectorial $V$ y un subconjunto de vectores $A$ definimos el subespacio generado por $A$ como
$$\{\underline{x} \in V \mid \underline{x} \text{ es combinación lineal de un subconjunto finito de } A\},$$
denotado $L(A)$ ó $\langle A\rangle$. Si $A = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$, también se notará $L(\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m)$ ó $\langle\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\rangle$.

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial de dimensión finita, $A \subset V$. Entonces $L(A)$ es el menor subespacio vectorial de $V$ que contiene a $A$.

**Demostración.–** Veamos primero que $L(A)$ es subespacio vectorial: para ello tomemos $\underline{u}, \underline{v} \in L(A)$ y $\alpha, \beta \in k$. Por definición existen vectores $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_r, \underline{v}_1, ..., \underline{v}_s \in A$ y escalares $\gamma_1, ..., \gamma_r, \delta_1, ..., \delta_s \in k$ tales que
$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i\underline{u}_i, \quad \underline{v} = \sum_{i=1}^{s} \delta_i\underline{v}_i.$$

Pero entonces
$$\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = \sum_{i=1}^{r} \alpha\gamma_i\underline{u}_i + \sum_{i=1}^{s} \beta\delta_i\underline{v}_i,$$
esto es, es combinación lineal de una cantidad finita de vectores de $A$, por lo que $\alpha\underline{u}+\beta\underline{v} \in L(A)$.

Ahora hemos de probar que $L(A)$ es el menor subespacio que contiene a $A$, para lo que tomaremos un subespacio $L$ tal que $A \subset L$ y veremos que $L(A) \subset L$. Esto es sencillo, ya que, si $\underline{v} \in L(A)$, existen $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_r \in A$ y $\alpha_1, ..., \alpha_r \in k$ tales que
$$\underline{v} = \alpha_1\underline{a}_1 + ... + \alpha_r\underline{a}_r.$$

Pero, como $\underline{a}_i \in A \subset L$, $\underline{v}$ es combinación lineal de elementos de $L$ y, por tanto, está en $L$. $\mathcal{Q.E.D.}$

**Corolario.–** En las condiciones anteriores:

(a) $A$ siempre es sistema generador de $L(A)$. En particular, $L(A) = V$ si y sólo si $A$ es sistema generador de $V$.

(b) Si $A \subset B$, entonces $L(A) \subset L(B)$.

(c) $L(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

(d) Si $A$ es un subespacio vectorial, $L(A) = A$.

**Demostración.–** Todas las pruebas son triviales a partir de la proposición. $\mathcal{Q.E.D.}$

## 3.8. Subespacios (II): Sistemas de ecuaciones.

Hemos visto que el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones es un subespacio de $k^n$ y que, de algún modo, lo mismo da trabajar con un $k$–espacio vectorial de dimensión $n$ que con $k^n$ como espacio de coordenadas respecto de una base fijada. Ahora veremos el otro lado de la cuestión probando que, fijada una base para tomar coordenadas, todo subespacio se puede expresar como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

**Proposición.–** Sea $AX^t = 0_{m\times 1}$ un sistema de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas, homogéneo, definido sobre $k$; $L$ el subespacio vectorial de $k^n$ formado por las soluciones. Entonces

$$\dim(L) = n - \text{rg}(A).$$

**Demostración.–** Tomemos un menor de orden maximal, pongamos $h$, en $A$ y supongamos que está formado por las $h$ primeras filas y columnas. Entonces, como en la prueba del teorema de Rouché–Fröbenius, consideramos el sistema equivalente de Cramer formado por las $h$ primeras ecuaciones en $x_1, ..., x_h$, considerando $x_{h+1}, ..., x_n$ como parámetros. Así, todo vector de $L$ es de la forma

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \left( \sum_{i=h+1}^{n} d_{i1}x_i, \sum_{i=h+1}^{n} d_{i2}x_i, ..., \sum_{i=h+1}^{n} d_{ih}x_i, x_{h+1}, ..., x_n \right) \\ &= \sum_{i=h+1}^{n} x_i \left(d_{i1}, ..., d_{ih}, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0\right),\end{aligned}$$

con el $1$ en la posición $i$–ésima. Denotemos

$$\underline{z}_i = \left(d_{i1}, ..., d_{ih}, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0\right),$$

para $i = h + 1, ..., n$.

Lo anterior implica que $L = L(z_{h+1}, ..., z_n)$. Pero además como

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} d_{h+1,1} & d_{h+2,1} & \dots & d_{n1} \\ d_{h+1,2} & d_{h+2,2} & \dots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{h+1,h} & d_{h+2,2} & \dots & d_{nh} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = n - h,$$

los $\underline{z}_i$ son linealmente independientes y, por tanto, base de $L$. De aquí, $\dim(L) = n - \mathrm{rg}(A)$. $\mathcal{Q.E.D}$.

**Observación.–** Como es habitual, lo anterior se puede trasladar a cualquier $k$–espacio vectorial de dimensión $n$, una vez que hemos fijado una base $\mathcal{B}$ para tomar coordenadas con respecto a ella. Ahora veremos que, de hecho, esta forma de definir subespacios se puede utilizar en cualquier caso.

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial de dimensión $n$, $L \subset V$ un subespacio vectorial, $\mathcal{B}$ una base de $V$. Entonces existe un sistema de ecuaciones homogéneo $AX^t = 0_{m\times 1}$ tal que

$$\underline{v} \in L \iff (\underline{v})_{\mathcal{B}} \text{ es solución de } AX^t = 0_{m\times 1}.$$

**Demostración.–** Al ser $L$ un $k$–espacio vectorial de dimensión finita, podemos tomar una base $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_s$ de $L$, con coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ dadas por

$$(\underline{u}_i)_{\mathcal{B}} = (c_{1i}, ..., c_{ni}).$$

Entonces un vector de coordenadas genéricas $(\underline{v})_{\mathcal{B}} = (x_1, ..., x_n)$ está en $L$ si y sólo si es combinación lineal de los $\underline{u}_i$, lo cual se traduce en que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{ns} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{ns} & x_n \end{pmatrix},$$

lo cual, a su vez, se traduce, usando por ejemplo el método del orlado, en que una serie de determinantes, con una fila de indeterminadas, sean todos $0$. Esto es, en definitiva, un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Observemos que, si tomamos una base de $L$, $s = \dim(L)$ , la matriz de orden $s \times n$ $(c_{ij})$ tiene un menor no nulo de orden $s$ y, por tanto, aparecen exactamente $n - s$ ecuaciones, correspondientes a las $n - s$ formas posibles de orlar un menor de orden $s$ en una matriz $(s + 1) \times n$, con $s + 1 \leq n$. $\mathcal{Q.E.D}$.

**Definición.–** En la situación de la proposición, el sistema $AX^t = 0_{m\times 1}$ se denomina un sistema de ecuaciones implícitas de $L$. Cuando $\mathrm{rg}(A) = m$ el sistema se dirá (linealmente) independiente.

**Proposición.–** Sea $L \subset V$ un subespacio vectorial, $n = \dim(V)$, $s = \dim(L)$ y $AX^t = 0_{m\times 1}$ un sistema de ecuaciones implícitas de $L$ respecto de una base fijada $\mathcal{B}$. Entonces

$$n = s + \mathrm{rg}(A).$$

**Demostración.–** Todos los ingredientes de la prueba ya se han visto: un vector está en $L$ si y sólo si sus coordenadas verifican el sistema y esto sucede si y sólo si dichas coordenadas son combinación lineal de $n - \mathrm{rg}(A)$ vectores de $k^n$ linealmente independientes y que son soluciones del sistema. Los vectores de $V$ que tienen estas soluciones como coordenadas son, entonces, una base de $L$.

Notemos que es un buen ejercicio para el alumno ver si es capaz de distinguir, en esta prueba, cuándo hablamos de coordenadas y cuándo de vectores. $\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$

**Observación.–** Es crucial observar que, al basarse en las coordenadas, un sistema de ecuaciones implícitas de $L$ depende de la elección previa de una base y un cambio de base trae consigo obviamente un cambio del sistema de ecuaciones.

**Proposición.–** Sea $V$ un $k$–espacio vectorial de dimensión $n$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $V$, $L$ un subespacio definido, respecto de $\mathcal{B}$ por un sistema de ecuaciones implícitas $AX^t = 0_{m\times 1}$. Entonces un sistema de ecuaciones implícitas de $L$ respecto de $\mathcal{B}'$ viene dado por

$$AM(\mathcal{B}', \mathcal{B})X^t = 0_{m\times 1}.$$

**Demostración.–** El sistema anterior será un sistema de ecuaciones implícitas de $L$ respecto de $\mathcal{B}'$ si verifica que $\underline{v} \in L$ si y sólo si $(\underline{v})_{\mathcal{B}'}$ es solución del sistema. Pero esto último sucede si y sólo si

$$0_{m\times 1} = AM(\mathcal{B}', \mathcal{B})(\underline{v})^t_{\mathcal{B}'} = A(\underline{v})^t_{\mathcal{B}},$$

lo cual sucede si y sólo si $\underline{v} \in L$. Esto prueba el resultado. $\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$

## 3.9. Operaciones (I): Teorema de la dimensión.

En toda esta lección consideraremos un $k$–espacio vectorial $V$ de dimensión $n$.

**Proposición.–** Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios vectoriales de $V$. Entonces el conjunto

$$L = \bigcap_{i\in I} L_i$$

es un subespacio vectorial.

**Demostración.–** Aplicando la caracterización de subespacios es muy fácil: tomamos $\underline{u}, \underline{v}$ pertenencientes a $L$ (en consecuencia a todos los $L_i$) y $\alpha, \beta \in k$. Por ser todos los $L_i$ subespacios, tenemos que $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$ está en todos los $L_i$ y, por tanto, en $L$. $\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$

**Observación.–** Como intersección de conjuntos que es, la intersección de subespacios verifica las propiedades asociativa y conmutativa.

**Observación.–** Notemos, sin embargo que no siempre la unión de subespacios es un subespacio. Si tomamos, por ejemplo, los subespacios de $\mathbf{R}^3$ definidos por

$$L_1 : z = 0, \quad L_2 : x = 0,$$

observaremos que $(1, 0, 0), (0, 0, 1) \in L_1 \cup L_2$, pero su suma no está en ninguno de ambos, por lo que no está en la unión. Esto, como es costumbre en matemáticas, definiendo una nueva operación que resulte lo más parecida posible a la suma.

**Definición.–** Sean $\{L_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de $V$. Entonces se define el subespacio suma de la familia $L_i$ como

$$\sum_{i\in I} L_i = \left\langle \bigcup_{i\in I} L_i \right\rangle.$$

Equivalentemente, si $I = \{1, ..., n\}$, notaremos $\sum_{i\in I} L_i = L_1 + ... + L_n$.

**Observación.–** Obviamente $\sum_{i\in I} L_i$ es un subespacio, porque lo hemos definido como tal. Además es trivial que, por ser el menor subespacio que contiene a la unión de los $L_i$, ha de ser el menor subespacio que contiene a todos los $L_i$. Así, la suma es, en cierto modo, la operación más próxima posible a la unión.

**Observación.–** Por la forma de definirla, es obvio que la suma de subespacios verifica las propiedades asociativa y conmutativa.

**Proposición.–** En las condiciones anteriores, dados subespacios $L_1, L_2, L_3$, se verifica:

(a) $L_1 + L_2 = \{\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \mid \underline{u}_i \in L_i\}$ (por supuesto, el enunciado análogo es válido para $n$ sumandos).

(b) (Leyes de simplificación) $L_1 = L_1 + (L_1 \cap L_2) = L_1 \cap (L_1 + L_2)$.

(c) (Ley modular) Si $L_1 \subset L_3$, $L_1 + (L_2 \cap L_3) = (L_1 + L_2) \cap L_3$.

**Demostración.–** Probemos (a) y, para ello, denotemos momentáneamente

$$M = \{\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \mid \underline{u}_i \in L_i\}.$$

Si tomamos un vector cualquiera de $M$, pongamos $\underline{v}$ han de existir $\underline{u}_1 \in L_1, \underline{u}_2 \in L_2$ verificando $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$. Pero, por ser $L_1, L_2 \subset L_1 + L_2$ y ser $L_1 + L_2$ subespacio, se tiene que $\underline{v} \in L_1 + L_2$.

Para ver la otra inclusión tomaremos un vector cualquier de $L_1 + L_2 = \langle L_1 \cup L_2\rangle$, pongamos $\underline{w}$. Como vimos entonces en 3.7., $\underline{w}$ ha de ser combinación lineal de una cantidad finita de vectores de $L_1 \cup L_2$, esto es

$$\underline{w} = \alpha_1\underline{a}_1 + ... + \alpha_r\underline{a}_r + \beta_1\underline{b}_1 + ... + \beta_s\underline{b}_s,$$

donde $\underline{a}_i \in L_1, \underline{b}_j \in L_2$, para $i = 1, ..., r$ y $j = 1, ..., s$. Entonces llamando $\underline{u}_1 = \sum \alpha_i\underline{a}_i \in L_1$ y $\underline{u}_2 = \sum \beta_j\underline{b}_j \in L_2$, tenemos el resultado.

Dejaremos (b), que es el enunciado más simple, como ejercicio, y probaremos una de las inclusiones de (c), pues las dos son parecidas. Si, por ejemplo, tomamos $\underline{u} \in L_3 \cap (L_1 + L_2)$, eso quiere decir que

$$\underline{u} \in L_3 \text{ y, además, } \exists \underline{a}_1 \in L_1, \underline{a}_2 \in L_2 \text{ tales que } \underline{u} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2.$$

Entonces $\underline{a}_2 = \underline{u} - \underline{a}_1 \in L_3$ (recordemos que $\underline{a}_1 \in L_1 \subset L_3$), por lo que $\underline{u}$ se puede escribir como suma de dos vectores: $\underline{a}_1 \in L_1$ y $\underline{a}_2 \in L_2 \cap L_3$. Esto finaliza la inclusión. $\mathcal{Q.E.D.}$

Sin duda alguna el resultado esencial que relaciona suma e intersección de subespacios es el teorema de la dimensión, que tendrá así mismo sus variantes geométricas.

**Teorema de la dimensión.–** Sean $L_1, L_2$ subespacios de $V$. Entonces

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).$$

**Demostración.–** Sea $\mathcal{B} = \{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_p\}$ una base de $L_1 \cap L_2$. Como conjunto linealmente independiente en $L_1$ y $L_2$ puede ampliarse a sendas bases respectivas

$$\mathcal{B}_1 = \{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_p, \underline{b}_1, ..., \underline{b}_q\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_p, \underline{c}_1, ..., \underline{c}_r\}.$$

Por definición de dimensión basta entonces probar que

$$\mathcal{S} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_p, \underline{b}_1, ..., \underline{b}_q, \underline{c}_1, ..., \underline{c}_r\}$$

es base de $L_1 + L_2$. Es claro que es sistema generador, pues todo vector de $L_1 + L_2$ es combinación lineal de vectores de $L_1$ (que son a su vez combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}_1$) y de vectores de $L_2$ (análogo). Veamos entonces que $\mathcal{S}$ es linealmente independiente. Para ello consideremos

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{a}_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \underline{b}_j + \sum_{l=1}^{r} \gamma_l \underline{c}_l = \underline{0},$$

y denotemos para abreviar los tres sumatorios de la izquierda como $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, pertenecientes respectivamente a $L_1 \cap L_2$, $L_1$ y $L_2$.

Entonces, como $\underline{u} + \underline{v} = -\underline{w}$, este vector está en $L_1 \cap L_2$ y, por tanto, podemos escribirlo como

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{a}_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \underline{b}_j = \sum_{i=1}^{p} \delta_i \underline{a}_i,$$

de donde $\sum(\alpha_i - \delta_i)\underline{a}_i + \sum \beta_j \underline{b}_j = \underline{0}$ y, al ser $\mathcal{B}_1$ base, esto implica que $\alpha_i - \delta_i = \beta_j = 0$ para todo $i = 1, ..., p$ y $j = 1, ..., q$. Así, $\underline{u} + \underline{w} = \underline{0}$ y, por ser $\mathcal{B}_2$ base, obtenemos finalmente $\alpha_i = \gamma_l = 0$ para $i = 1, ..., p$ y $l = 1, ..., r$. $\mathcal{Q.E.D}$.

**Corolario.–** Dados subespacios $L_1, ..., L_t$ de $V$, se tiene que

$$\dim(L_1 + ... + L_t) \leq \dim(L_1) + ... + \dim(L_t).$$

**Demostración.–** Ejercicio sencillo por inducción en $t$. $\mathcal{Q.E.D}$.

## 3.10. Operaciones (II): Cálculos. Suma directa.

**Observación.–** Sean $L_1$ y $L_2$ subespacios de un $k$–espacio vectorial $V$ de dimensión finita. A la hora de efectuar cálculos explícitos de suma e intersección hemos de partir de datos diferentes: como hemos visto en la demostración del teorema de la dimensión, si tenemos

$$L_1 = L(\underline{u}_1, ..., \underline{u}_s), \quad L_2 = L(\underline{v}_1, ..., \underline{v}_t),$$

es sencillo verificar que

$$L_1 + L_2 = L\left(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_s, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_t\right).$$

El caso de $n$ sumandos es análogo. No obstante, hemos de ser cuidadosos en el sentido de que, aún en el caso de que los sistemas generadores escogidos sean bases, el sistema generador hallado al unirlo no tiene por qué serlo. Un ejemplo elemental puede ser tomar $L_1 = V$ y $L_2 \neq \{\underline{0}\}$ con sistemas generadores cualesquiera.

En caso de que queramos calcular la intersección, los sistemas generadores de $L_1$ y $L_2$ no son de mucha utilidad ya que éstos representan la faceta constructiva del problema (se usan para crear vectores por combinación lineal) mientras que la intersección representa una operación restrictiva. Por ello, es mucho más útil usar dos sistemas de ecuaciones que definan respectivamente a $L_1$ y a $L_2$. En efecto, ya que un vector estará en $L_1$ si y sólo si verifica el primer sistema, y análogamente para $L_2$, es inmediato ver que un vector está en $L_1 \cap L_2$ si y sólo si verifica ambos sistemas de ecuaciones. Así, un sistema de ecuaciones de $L_1 \cap L_2$ se obtiene reuniendo ambos sistemas.

De la misma forma que en el caso de la suma, el escoger sistemas de ecuaciones independientes no garantiza que el sistema obtenido para la intersección sea de ecuaciones independientes. El mismo ejemplo que pusimos anteriormente sirve para este caso.

Veamos ahora una situación particular que tiene numerosas aplicaciones.

**Definición.–** Sean $L, L_1, L_2, \ldots, L_n$ subespacios vectoriales de $V$. Decimos que $L$ es suma directa de $L_1, \ldots, L_n$, (o que $L_1, \ldots, L_n$ están en suma directa) notado

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n,$$

si se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) $L = L_1 + \ldots + L_n$.

(b) $L_i \cap \left(\sum_{j\neq i} L_j\right) = \{\underline{0}\}$ para cualquier $i$.

En particular, $L = L_1 \oplus L_2$ si $L = L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2 = \{\underline{0}\}$. Este caso es el que aparecerá con más frecuencia.

**Observación.–** De la definición y del teorema de la dimensión se sigue que:

(a) Si $L_1, \ldots, L_n$ están en suma directa, también lo están cualquier subconjunto de ellos.

(b) $\dim(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n) = \dim(L_1) + \ldots + \dim(L_n)$. (Inducción en $n$ trivial)

**Proposición.–** Sea $L = L_1 + \ldots + L_n$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$.

(b) Para todo $\underline{v} \in L$ existen únicos $\underline{u}_1 \in L_1, \ldots, \underline{u}_n \in L_n$ tales que $\underline{v} = \underline{u}_1 + \ldots + \underline{u}_n$.

(c) Para cualesquiera $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, bases respectivas de $L_1, \ldots, L_n$, $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ es base de $L$.

**Demostración.–** Como hemos de probar que cualquiera de los enunciados implica los otros dos, haremos la prueba siguiendo el esquema (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a).

$\boxed{\text{(a)} \Longrightarrow \text{(b)}}$ La existencia está garantizada por el hecho de que $L = L_1 + ... + L_n$. Para ver la unicidad, si tenemos $\underline{v} = \underline{u}_1 + ... + \underline{u}_n = \underline{u}'_1 + ... + \underline{u}'_n$, con $\underline{u}_i, \underline{u}'_i \in L_i$, tendríamos

$$\underline{u}_1 - \underline{u}'_1 = (\underline{u}_2 + ... + \underline{u}_n) - (\underline{u}'_2 + ... + \underline{u}'_n) \in L_1 \cap \left( \sum_{j>1} L_j \right) = \{\underline{0}\},$$

por lo que $\underline{u}_1 = \underline{u}'_1$. Para un $i$ cualquiera se procede análogamente.

$\boxed{\text{(b)} \Longrightarrow \text{(c)}}$ El hecho de que $\mathcal{B}_1 \cup ... \mathcal{B}_n$ es sistema generador está garantizado porque $L = L_1 + ... + L_n$. Hemos de probar que es linealmente independiente y, para ello, tomamos una combinación lineal

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_{1i}\underline{a}_{1i} + ... + \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_{n1}\underline{a}_{ni}, \quad \text{con } \underline{a}_{ji} \in \mathcal{B}_j = \left\{ \underline{a}_{j1}, ..., \underline{a}_{jr_j} \right\},\ \alpha_{ji} \in k.$$

Pero en la expresión anterior escribimos $\underline{0} \in L$ como suma de un vector de cada $L_i$. Sin embargo, otra forma equivalente de expresarlo es $\underline{0} = \underline{0} + ... + \underline{0}$. Por la unicidad de esta forma de expresión (que es la hipótesis (b)) hemos de tener necesariamente

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_{1i}\underline{a}_{1i} = ... = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_{ni}\underline{a}_{ni},$$

y, al ser las $\mathcal{B}_j$ bases, tenemos que, para cualesquiera $j = 1, ..., n$; $i = 1, ..., r_j$; $\alpha_{ji} = 0$ como queríamos probar.

$\boxed{\text{(c)} \Longrightarrow \text{(a)}}$ Sean $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ bases respectivas de $L_1, ..., L_n$, verificándose $\dim(L_i) = r_i$. Si es necesario, multiplicaremos algunos vectores de cada $\mathcal{B}_i$ por escalares no nulos para garantizar que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ en cualquier caso. Entonces

$$\dim \left( L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j \right) = \dim(L_i) + \dim \left( \sum_{j \neq i} L_j \right) - \dim(L).$$

Pero, por (c), $\mathcal{B}_1 \cup ... \mathcal{B}_n$ esbase de $L$ y, obviamente, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{i-1} \cup ... \cup \mathcal{B}_{i+1} \cup ... \cup \mathcal{B}_n$ lo es de $\sum_{j \neq i} L_j$, por ser linealmente independiente. Así,

$$\dim \left( L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j \right) = r_i + \sum_{j \neq i} r_j - \sum_{j=1}^{n} r_j = 0,$$

lo que prueba (a). $\mathcal{Q.E.D.}$

**Definición.–** Dados subespacios $L \subset L_0$, diremos que $L'$ es un subespacio complementario de $L$ en $L_0$ cuando $L_0 = L \oplus L'$.

**Observación.–** Por los resultados anteriores, una forma de calcular un subespacio complementario de $L$ en $L_0$ consiste en tomar una base, $\mathcal{B}_L$, de $L$ y ampliarla a una base $\mathcal{B}$ de $L_0$. Entonces los vectores de $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_L$ forman una base de un subespacio complementario. En particular, salvo que $L$ sea un subespacio trivial de $L_0$, no existe un único subespacio complementario.

# Ejercicios del tema 3

**Ejercicio 1.–** Se consideran los vectores siguientes del $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^2$:

$$\{(3,2),\ (4,-1),\ (5,-2)\}$$

¿Son o no son linealmente dependientes?
Misma pregunta para los vectores siguientes de $\mathbf{R}^3$:

$$\{(9,-3,7),\ (1,8,8),\ (5,-5,1)\}$$

Y para los vectores siguientes de $\mathbf{R}^4$:

$$\{(2,-1,5,7),\ (3,1,5,-2),\ (1,1,1,-4)\}$$

**Ejercicio 2.–** Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n$ con coeficientes reales. Demostrar que $P(x)$ y sus $n$ primeras derivadas: $P'(x)$, $P''(x)$, $\ldots$, $P^{(n)}(x)$ son linealmente independientes en el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}[x]_n$ (Idea: Fijar una base de $\mathbf{R}[x]_n$ y tomar coordenadas).

**Ejercicio 3.–** En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^4$:

(a) Determinar $\lambda$ tal que los tres vectores

$$\underline{a} = (3,1,-4,6),\ \underline{b} = (1,1,4,4),\ \underline{c} = (1,0,-4,\lambda),$$

sean dependientes.

(b) Se consideran los vectores linealmente independientes:

$$\underline{a} = (2,-2,3,1),\ \underline{b} = (-1,4,-6,-2).$$

Completar la familia $\{\underline{a},\ \underline{b}\}$ hasta una base de $\mathbf{R}^4$.

**Ejercicio 4.–** Determinar razonadamente la dimensión de cada uno de los $\mathbf{R}$–espacios vectoriales de matrices con coeficientes reales y orden $n \times n$ siguientes:

- El espacio de todas estas matrices.
- El espacio de las matrices diagonales.
- El espacio de la matrices triangulares superiores.
- El espacio de las matrices simétricas.
- El espacio de las matrices antisimétricas.

**Ejercicio 5.–** Sea $\mathcal{B} = \{(1,0,1,3),(0,1,-1,0),(1,0,1,2),(-1,0,0,1)\}$. Probar que es una base de $\mathbf{R}^4$. Calcular las coordenadas de los siguientes vectores respecto de la base $\mathcal{B}$.

$$\underline{v}_1 = (1,0,1,0), \quad \underline{v}_2 = (1,1,1,1), \quad \underline{v}_3 = (1,-1,2,1).$$

**Ejercicio 6.–** Sea $V$ un $K$-espacio vectorial, y sea $S \subset V$. Demostrar los siguientes enunciados.

1. Si $S$ es un sistema linealmente dependiente y $\underline{v} \in V$, entonces $S \cup \{\underline{v}\}$ es linealmente dependiente.
2. Si $S$ es un sistema linealmente independiente y $\underline{v} \in S$, entonces $S \backslash \{\underline{v}\}$ es linealmente independiente.
3. Si $S$ es un sistema de generadores y $\underline{v} \in V$, entonces $S \cup \{\underline{v}\}$ es un sistema de generadores.
4. Si $S$ es un sistema de generadores y $\underline{v} \in V \setminus S$, entonces $S \cup \{\underline{v}\}$ es linealmente dependiente.
5. Si $S$ es un sistema linealmente independiente y $\underline{v} \in S$, entonces $S \backslash \{\underline{v}\}$ no es sistema de generadores.
6. Si una base de $V$ está contenida dentro de otra, entonces son iguales.

**Ejercicio 7.–** Sea $V$ un $\mathbf{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4, y consideramos $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ y $\mathcal{B}' = \{\underline{u}'_1, \underline{u}'_2, \underline{u}'_3, \underline{u}'_4\}$ dos bases de $V$ relacionadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} \underline{u}'_1 & = & 2\underline{u}_1 & + & \underline{u}_2 & - & \underline{u}_3 & & \\ \underline{u}'_2 & = & 2\underline{u}_1 & & & + & \underline{u}_3 & + & 2\underline{u}_4 \\ \underline{u}'_3 & = & \underline{u}_1 & + & \underline{u}_2 & - & \underline{u}_3 & & \\ \underline{u}'_4 & = & -\underline{u}_1 & & & + & 2\underline{u}_3 & + & 3\underline{u}_4 \end{array} \right.$$

1. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ se dan:

$$\underline{a}_{\mathcal{B}} = (1,2,0,1),\ \underline{b}_{\mathcal{B}} = (3,-1,2,1),\ \underline{c}_{\mathcal{B}} = (0,1,-2,3),\ \underline{d}_{\mathcal{B}} = (1,2,1,2).$$

   Determinar sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$.

2. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}'$ se dan:

$$\underline{x}_{\mathcal{B}'} = (0,1,1,-1);\ \underline{y}_{\mathcal{B}'} = (2,1,0,1);\ \underline{z}_{\mathcal{B}'} = (-1,2,0,6).$$

   Determinar sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}$.

**Ejercicio 8.–** A cada numero real $\theta$ asociamos la familia de dos vectores:

$$\mathcal{B}(\theta) = \{(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)),\ \ (-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))\}\,.$$

- Demostrar que siempre es una base del $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.
- Para $\alpha$ y $\beta$ números reales, hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}(\alpha)$ a $\mathcal{B}(\beta)$.
- ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(1,1)$ en la base $\mathcal{B}(\pi/3)$?

**Ejercicio 9.–** Sea $\theta \in \mathbf{R}$. Sea $V(\theta)$ el subconjunto de $\mathbf{R}$ formado por los números $x + y\theta$, con $x, y \in \mathbf{Q}$.

- Demostrar que $V(\theta)$ es un subespacio vectorial del $\mathbf{Q}$–espacio vectorial $\mathbf{R}$.
- ¿Qué dimensión tiene $V(2)$? ¿Qué dimensión tiene $V(\sqrt{2})$?
- Indicar la regla que da la dimensión de $V(\theta)$, dependiendo del valor de $\theta$.

**Ejercicio 10.–** Sean $V, W$ dos $k$–espacios vectoriales. Consideramos el producto cartesiano $V \times W$ y, sobre sus elementos, las operaciones siguientes:

$$(\underline{v},\, \underline{w}) + (\underline{v}',\, \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}',\, \underline{w} + \underline{w}')$$

$$\alpha(\underline{u}, \underline{v}) = (\alpha\underline{u}, \alpha\underline{w})$$

Demostrar que estas operaciones definen, sobre $V \times W$, una estructura de $k$–espacio vectorial. Si tenemos que $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, hallar la dimensión de $V \times W$.

**Ejercicio 11.–** En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se consideran los tres vectores:

$$\underline{a} = (1,2,0,1), \underline{b} = (2,3,0,3), \underline{c} = (3,2,1,2).$$

Sea $V$ el subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$ que generan. Hallar un sistema de ecuaciones lineales que defina $V$, es decir tal que $V$ sea su conjunto de soluciones. ¿Cuál es la dimensión de $V$?

**Ejercicio 12.–** En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ consideramos los subespacios vectoriales siguientes ($V_1$ definido por una familia de generadores, los otros por un sistema de ecuaciones implícitas):

$$V_1 = \langle (1,1,2,1), (2,2,0,2), (-1,-1,6,-1) \rangle \qquad V_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & 6x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$V_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad V_4 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

- Hallar la dimensión y una base de $V_1$, $V_2$, $V_3$ y $V_4$.
- Hallar una base o un sistema de ecuaciones implícitas para cada uno de los subespacios siguientes:

$$V_1 + V_2, \quad V_1 + (V_2 \cap V_3), \quad (V_1 + V_2) \cap V_3.$$

**Ejercicio 13.–** En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathcal{M}(n; \mathbf{R})$, sea $T^+$ el subespacio vectorial de las matrices triangulares superiores, y $T^-$ el subespacio vectorial de las matrices triangulares inferiores. Hallar la dimensión de $T^+ + T^-$.

**Ejercicio 14.–** En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n; \mathbf{R})$ de las matrices cuadradas de orden $n$ con coeficientes reales, consideremos $\mathcal{A}$, el subespacio vectorial de las matrices antisiméricas, y $\mathcal{S}$, el subespacio vectorial de las matrices simétricas. Demostrar que

$$\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

**Ejercicio 15.–** Sea $V$ el $\mathbf{R}$–espacio vectorial de los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales y grado máximo $3$. Hallar un complementario del subespacio $W$ definido por:

$$W = \{P \in V \mid P(0) = P(1) = 0\}.$$