

Álgebra Lineal y Geometría

Tema 2

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla



El contenido de estas notas ha sido diseñado y redactado por el profesorado de la asignatura. Se permite su reproducción, única y exclusivamente para estudio *personal*. No se permite la copia indiscriminada, ni con fines lucrativos o diferentes del citado, de la totalidad o de parte de las presentes notas. © 2009.

Índice

Tema 2: Matrices. Sistemas de ecuaciones lineales.	3
2.1. Definiciones. Matrices especiales.	3
2.2. Operaciones: Suma, producto, producto por escalares.	5
2.3. Determinantes (I).	7
2.4. Determinantes (II).	12
2.5. Matriz inversa.	18
2.6. Rango.	19
2.7. Sistemas de ecuaciones lineales: Sistemas de Cramer.	24
2.8. Teorema de Rouché–Fröbenius.	27
Ejercicios	29

Tema 2: Matrices. Sistemas de ecuaciones lineales.

2.1. Definiciones. Matrices especiales.

Sea k un cuerpo cualquiera (puede ser $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$)¹.

Definición.— Una matriz $m \times n$ definida sobre el cuerpo k , donde $m, n \in \mathbb{N}$, es una tabla de mn elementos de k dispuestos en m filas y n columnas. A la expresión (sin operar) $m \times n$ se la denomina orden de la matriz.

Una tal matriz A se denotará de alguna de las siguientes maneras:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij}),$$

usándose esta última notación sólo cuando m y n se conozcan sin ambigüedad. Así pues, un elemento genérico de la matriz A se denotará por a_{ij} , queriendo esto decir que este elemento ocupa la posición (i, j) : fila i , columna j .

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ definidas sobre k se denota por $\mathcal{M}_{m \times n}(k)$ o bien por $\mathcal{M}(m \times n; k)$.

Definición.— Dadas dos matrices A y B , definidas sobre k , se dirá que $A = B$ cuando ambas tengan el mismo orden, pongamos $m \times n$, y además,

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ para cualesquiera } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Definición.— Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ una matriz.

- (a) La diagonal de A son los elementos de la forma a_{ii} , para $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$.
- (b) A se dice cuadrada cuando $m = n$. El conjunto de las matrices cuadradas de orden $n \times n$, definidas sobre k , se denota habitualmente por $\mathcal{M}(n; k)$.
- (c) Una matriz cuadrada se dice diagonal si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, esto es, todos los elementos distintos de 0 (si es que hay) se encuentran en la diagonal.

¹La teoría de matrices definidas sobre anillos, si bien es muy interesante y posee grandes campos de aplicación, queda fuera de los objetivos de los primeros cursos y, en consecuencia, no la trataremos aquí.

- (d) Una matriz se dice triangular superior (respectivamente inferior) cuando $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$ (respectivamente $i < j$), esto es, cuando todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

Ejemplo.— De todas las matrices diagonales de orden n , la más importante es sin duda la denominada matriz identidad, usualmente denotada I_n y definida como la matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal son 1 (equivalentemente, como la matriz $I_n = (e_{ij})$ definida por $e_{ij} = \delta_{ij}$, la delta de Kronecker (o de Dirac), que vale 1 cuando coinciden sus subíndices y 0 en otro caso).

La matriz cuadrada de orden n que tiene 0 en todos sus elementos se denomina matriz nula y se denotará por 0_n . Así mismo, notaremos $0_{m \times n}$ a la matriz $m \times n$ con todos sus elementos nulos.

Definición.— Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, se define la matriz traspuesta de A , notada A^t , como la matriz de $\mathcal{M}(n \times m; k)$ cuyo elemento (i, j) es el elemento (j, i) de A . Esto es, A^t es el resultado de cambiar, en A , filas por columnas y columnas por filas, respetando el orden. De esto, es obvio que $(A^t)^t = A$.

Así mismo, cuando $k = \mathbf{C}$, denotaremos por $\overline{A}$, denominada matriz conjugada de A , la matriz de $\mathcal{M}(m \times n; \mathbf{C})$ cuyo elemento (i, j) es el conjugado de a_{ij} . La matriz traspuesta conjugada de A se denota $A^* = (\overline{A})^t = \overline{A^t} \in \mathcal{M}(n \times m; \mathbf{C})$.

Una matriz A se dice simétrica cuando $A = A^t$, esto es cuando $a_{ij} = a_{ji}$ para cualesquiera i, j . Por otro lado, A se dice antisimétrica cuando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo (i, j) (en particular, $a_{ii} = 0$ para todo i).

Una matriz (definida sobre $\mathbf{C}$) se dice hermítica o hermitiana cuando $A = A^*$.

Observación.— Como es obvio, si $A \in \mathcal{M}(n; \mathbf{C})$ verifica que $A = \overline{A}$, entonces $A \in \mathcal{M}(n; \mathbf{R})$. De la misma forma, las matrices que son a la vez simétricas y hermitianas han de ser reales.

Observación.— Obviamente una matriz simétrica, antisimétrica o hermitiana ha de ser cuadrada. Análogamente, una matriz antisimétrica y diagonal ha de ser forzosamente 0_n .

Para finalizar, definiremos algunos conceptos que también aparecen en álgebra matricial y que serán útiles en adelante.

Definición.— Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$.

- (a) Cuando $m = 1$ (respectivamente $n = 1$) A se dirá una matriz-fila (matriz-columna).
- (b) Una submatriz de A es una matriz formada por la intersección de un subconjunto de filas y un subconjunto de columnas de A , respetando el orden.
- (c) Cuando una submatriz esté formada por filas consecutivas y columnas consecutivas, se denominará un bloque de A .

Observación.— Los bloques de A correspondientes a las filas y columnas de A (más precisamente las submatrices-fila y submatrices-columna de A) serán usados con frecuencia.

Así, cuando escribamos, por ejemplo

$$A = (C(A)_1 | C(A)_2 | \dots | C(A)_n),$$

estaremos indicando que $C(A)_i$ es la submatriz-columna de A formada por todas las filas y la columna i -ésima de A . La notación correspondiente por filas será

$$A = \begin{pmatrix} F(A)_1 \\ F(A)_2 \\ \vdots \\ F(A)_m \end{pmatrix}.$$

2.2. Operaciones: Suma, producto, producto por escalares.

Definición.– Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ definimos la matriz suma de A y B como $C = (c_{ij}) = A + B \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ dada por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Proposición.– La suma de matrices dota a $\mathcal{M}(m \times n; k)$ de estructura de grupo abeliano.

Demostración.– Las cuatro propiedades son elementales de probar: el elemento neutro es $0_{m \times n}$ y el opuesto de A , notada $-A$, es aquella en la que el elemento (i, j) es precisamente $-a_{ij}$. *Q.E.D.*

Definición.– Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ y un elemento $\alpha \in k$ se define el producto de α por A como $B = (b_{ij}) = \alpha A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ dada por

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Los elementos de un cuerpo k , cuando operan con elementos de otro conjunto, se denominan a menudo escalares. Por ello el anterior producto se suele denominar producto por escalares, para diferenciarlo del producto de matrices que después veremos.

Proposición.– El producto por escalares verifica las siguientes propiedades, dadas $A, B \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ y $\alpha, \beta \in k$:

- (a) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividad del producto respecto de la suma de escalares).
- (b) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividad del producto respecto de la suma de matrices).
- (c) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
- (d) $1A = A$ y $0A = 0_{m \times n}$.

Definimos ahora el producto de matrices, que es, con diferencia, la operación más complicada, tanto por sus propiedades como por la definición en sí. Incorporaremos también la notación de sumatorios, que ya debe resultar familiar.

Definición.— Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ y $B \in \mathcal{M}(n \times p; k)$ se define el producto de A por B como $C = (c_{ij}) = AB$ dada por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}.$$

Notemos que, si escribimos A en submatrices-fila y B en submatrices-columna,

$$A = \begin{pmatrix} F(A)_1 \\ F(A)_2 \\ \vdots \\ F(A)_m \end{pmatrix}, \quad B = (C(B)_1 | C(B)_2 | \dots | C(B)_p),$$

entonces el elemento (i, j) de AB es precisamente $F(A)_i C(B)_j$.

Proposición.— Se verifican las siguientes propiedades:

(a) Dadas $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, $B \in \mathcal{M}(n \times p; k)$ y $C \in \mathcal{M}(p \times q; k)$, se tiene que $A(BC) = (AB)C$.

(b) Dadas $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, $B, C \in \mathcal{M}(n \times p; k)$ y $D \in \mathcal{M}(p \times q; k)$, se tiene que

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)D = BD + CD.$$

(c) Dada $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, $AI_n = I_m A = A$.

(d) Dadas $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, $B \in \mathcal{M}(n \times p; k)$ y $\alpha \in k$, se tiene que $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

Demostración.— Casi todas las propiedades son similares y no demasiado complejas, salvo por el hecho de que la notación puede ser enrevesada. De esta forma, haremos la prueba de (a) y dejaremos las demás (sobre todo (b) y (d)) como un interesante ejercicio. Denominemos

$$D = A(BC), \quad E = (AB)C,$$

ambas de orden $m \times q$.

El elemento d_{ij} viene dado por

$$d_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} [\text{elemento } (h, j) \text{ de } BC] = \sum_{h=1}^n a_{ih} \left(\sum_{l=1}^p b_{hl}c_{lj} \right) = \sum_{h=1; l=1}^{n; p} a_{ih}b_{hl}c_{lj},$$

mientras que el elemento e_{ij} viene dado por

$$e_{ij} = \sum_{l=1}^p [\text{elemento } (i, l) \text{ de } AB] c_{lj} = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{h=1}^n a_{ih}b_{hl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1; h=1}^{p; n} a_{ih}b_{hl}c_{lj},$$

con lo que probamos el resultado. $\mathcal{Q.E.D.}$

Observación.— El producto de matrices no es conmutativo: de hecho, es posible que ni tan siquiera se puedan considerar los dos productos posibles. En concreto, AB y BA sólo tiene sentido si $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ y $B \in \mathcal{M}(n \times m; k)$, pero no tiene por qué ser $AB = BA$, como se puede comprobar con casi cualquier ejemplo.

En particular, si $A, B \in \mathcal{M}(n; k)$, en cuyo caso tienen sentido AB y BA , tampoco se verifica $AB = BA$, en general.

Observación.— De la definición de producto se sigue fácilmente que el producto y la suma de matrices diagonales (respectivamente triangulares superiores/inferiores) es de nuevo diagonal (triangular superior/inferior).

Proposición.— Dadas matrices A y B , y un escalar $\alpha \in k$, se verifica:

- (a) Si $A, B \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- (b) Si $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ y $B \in \mathcal{M}(n \times p; k)$, $(AB)^t = B^t A^t$.
- (c) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

Demostración.— Sólo apuntaremos la prueba de (b), que es la más difícil: denotamos $C = (AB)^t$ y $D = B^t A^t$. Entonces el elemento c_{ij} es el elemento (j, i) de AB , esto es, el producto de $F(A)_j$ por $C(B)_i$. Por otro lado, d_{ij} es el producto $F(B^t)_i C(A^t)_j$, esto es,

$$\sum_{l=1}^n b_{li} a_{jl} = F(A)_j C(B)_i,$$

lo que prueba el resultado. $\mathcal{Q.E.D.}$

Corolario.— Dadas matrices complejas A y B , y un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, se verifica:

- (a) Si $A, B \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$ y $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- (b) Si $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ y $B \in \mathcal{M}(n \times p; k)$, $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ y $(AB)^* = B^* A^*$.
- (c) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \cdot \overline{A}$ y $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

2.3. Determinantes (I).

El concepto de determinante es uno de los más complejos del álgebra matricial: optamos aquí por la definición más tradicional basada en el desarrollo indicado por permutaciones, que ya se han introducido.

Definición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$. Denominamos determinante de A , notado $|A|$ o $\det(A)$ al escalar dado por la fórmula

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

donde $nt(\sigma)$ indica el número de inversiones de la permutación σ .

Observación.— Como el sumatorio está indicado por los elementos de S_n , habrá $n!$ sumandos en el desarrollo completo de $|A|$.

Cada uno de estos sumandos, salvo signo, es el producto de n elementos de la matriz, tomados de forma que no hay dos en la misma fila, ni dos en la misma columna.

Ejemplo.— Consideremos una matriz genérica $A \in \mathcal{M}(2; k)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

En S_2 tenemos dos permutaciones posibles que llamaremos σ y τ , concretamente

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

y que verifican $nt(\sigma) = 0$, $nt(\tau) = 1$. Así pues, el desarrollo de $|A|$ queda

$$|A| = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ejemplo.— Veamos ahora el caso de matrices 3×3 ; tomamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

En S_3 hay seis permutaciones, en concreto

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ \tau_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, & \tau_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, & \tau_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde las σ_i tienen $nt(\sigma_i)$ par y las τ_i tiene $nt(\tau_i)$ impar.

El desarrollo es entonces el siguiente:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

que coincide con la fórmula conocida de los determinantes 3×3 .

De las muchas propiedades de los determinantes, vamos a estudiar solamente algunas en esta lección, las que lo caracterizan en cierto modo.

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$. Entonces $|A| = |A^t|$.

Demostración.— Escribimos, como es costumbre $A = (a_{ij})$ y un sumando, de los $n!$ de que consta el desarrollo del determinante de A es

$$M_\sigma = (-1)^{nt(\sigma)} a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n},$$

donde σ viene dada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}.$$

Como σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$, podemos reordenar los factores de M_σ usando el segundo subíndice de cada factor,

$$M_\sigma = (-1)^{nt(\sigma)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n}.$$

Donde k_i es precisamente el elemento de $\{1, 2, \dots, n\}$ que verifica $\sigma(k_i) = i$. Esto es, la permutación

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

es, precisamente, σ^{-1} que también es un elemento de S_n .

En el desarrollo del determinante de $A^t = (b_{ij})$ nos encontramos con el sumando correspondiente a la permutación σ^{-1} , que es

$$N_{\sigma^{-1}} = (-1)^{nt(\sigma^{-1})} b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{nk_n} = (-1)^{nt(\sigma^{-1})} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n},$$

con lo que cada sumando M_σ de $|A|$ es, salvo signo, igual que un sumando $N_{\sigma^{-1}}$ de $|A^t|$. Por tanto para probar el resultado sólo resta demostrar que

$$(-1)^{nt(\sigma)} = (-1)^{nt(\sigma^{-1})}.$$

Antes de entrar a probar el resultado, tomemos un ejemplo de S_6

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

cuyo número de inversiones es $nt(\sigma) = 8$. El inverso de σ viene dado por

$$\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

que verifica $nt(\sigma^{-1}) = 8$. Esto no es, como veremos, casual y, de hecho, este ejemplo está previsto para que podamos seguir sobre él (u otro similar) el razonamiento.

En efecto, cada inversión de σ corresponde a un par (i, j) de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ tal que $i < j$ y $\sigma(i) = r_i > \sigma(j) = r_j$. Pero esto también corresponde a un par $(r_j, r_i) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ tal que $r_j < r_i$ y $\sigma^{-1}(r_j) = j > \sigma^{-1}(r_i) = i$. Por tanto, cada inversión de σ lleva aparejada una inversión de σ^{-1} , con lo que $nt(\sigma) \leq nt(\sigma^{-1})$. Como esto es cierto para cualquier σ , aplicando el mismo resultado a σ^{-1} se tiene lo que queremos. *Q.E.D.*

Corolario.— Si $A \in \mathcal{M}(n; \mathbb{C})$, entonces $|A^*| = |\overline{A}| = \overline{|A|}$.

Demostración.— Basta tener en cuenta que la definición de determinante como suma de productos de elementos de A , y las propiedades elementales de la conjugación de números complejos. *Q.E.D.*

Observación.— A partir de este enunciado, todos los resultados relativos a evaluación de determinantes (esto es del tipo, “el determinante no varía”, “el determinante vale 0”,...) y relativos a propiedades u operaciones por columnas son igualmente válidos para propiedades u operaciones por filas, y viceversa.

Vamos a estudiar ahora otras de las propiedades más sobresalientes de los determinantes; dando, en casi todos los casos, las demostraciones precisas. Aún así, es obvio el hecho de que el alumno debe limitarse a entender bien (que no es poco) las pruebas y a aplicar los enunciados a la evaluación de determinantes de diversa complejidad.

Definición.— Dada una matriz-fila (respectivamente columna) A , pongamos

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n),$$

diremos que es combinación lineal de las matrices-fila (columna) B y C , dadas por

$$B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n), \quad C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n),$$

cuando existan $\alpha, \beta \in k$ tales que $A = \alpha B + \beta C$, esto es,

$$a_i = \alpha b_i + \beta c_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Análogamente diremos que A es combinación lineal de matrices-fila $B_1, \dots, B_r$ cuando existan escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in k$ tales que

$$A = \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_r B_r.$$

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$ verificando que $F(A)_i$ es combinación lineal de matrices fila $B_1, \dots, B_r$;

$$F(A)_i = \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_r B_r.$$

En estas condiciones el determinante de A es

$$|A| = \alpha_1 |A_1| + \dots + \alpha_r |A_r|,$$

donde cada A_j es la matriz resultante de cambiar, en A la fila $F(A)_i$ por la matriz-fila B_j .

Demostración.— Sólo haremos la demostración para $r = 2$, porque el caso general se obtiene aplicando reiteradamente este caso. Este razonamiento se usará varias veces en el futuro y tal vez merezca la pena detenerse un instante en él. En efecto, supongamos que sólo hemos probado el caso $r = 2$. Entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} C(A)_1 \\ \vdots \\ C(A)_i \\ \vdots \\ C(A)_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C(A)_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_r B_r \\ \vdots \\ C(A)_n \end{vmatrix},$$

y, aplicando el caso de dos sumandos,

$$|A| = \alpha_1 \begin{vmatrix} C(A)_1 \\ \vdots \\ B_1 \\ \vdots \\ C(A)_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C(A)_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_r B_r \\ \vdots \\ C(A)_n \end{vmatrix}.$$

Aplicando de nuevo el caso probado al último determinante,

$$|A| = \alpha_1 \begin{vmatrix} C(A)_1 \\ \vdots \\ B_1 \\ \vdots \\ C(A)_n \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} C(A)_1 \\ \vdots \\ B_2 \\ \vdots \\ C(A)_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C(A)_1 \\ \vdots \\ \alpha_3 B_3 + \dots + \alpha_r B_r \\ \vdots \\ C(A)_n \end{vmatrix},$$

y, en r aplicaciones sucesivas,

$$|A| = \alpha_1 |A_1| + \dots + \alpha_r |A_r|.$$

Probemos entonces el caso $r = 2$. Para ello simplificaremos la notación y supondremos

$$F(A)_i = \alpha B + \beta C,$$

con

$$B = (b_{i1} \dots b_{in}), \quad C = (c_{i1} \dots c_{in}),$$

donde usamos una notación algo extraña, para facilitar la situación de B y C como filas i -ésimas de A_1 y A_2 .

Desarrollamos el determinante de A , usando la notación habitual,

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1r_1} \dots a_{ir_i} \dots a_{nr_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1r_1} \dots (\alpha b_{ir_i} + \beta c_{ir_i}) \dots a_{nr_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1r_1} \dots (\alpha b_{ir_i}) \dots a_{nr_n} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1r_1} \dots (\beta c_{ir_i}) \dots a_{nr_n} \\ &= \alpha |A_1| + \beta |A_2|, \end{aligned}$$

donde A_1 (resp. A_2) es la matriz resultante de A al cambiar $F(A)_i$ por B (resp. C). *Q.E.D.*

Corolario.— Si multiplicamos todos los elementos de una fila de A por un elemento $\alpha \in k$, el determinante de la matriz resultante es $\alpha |A|$.

Demostración.— Es el resultado anterior para $r = 1$ (la demostración se adapta trivialmente). *Q.E.D.*

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$, y denominemos B la matriz resultante de intercambiar dos filas de A . Entonces $|B| = -|A|$.

Demostración.— Supongamos que las filas que se permutan son $F(A)_i$ y $F(A)_j$ (con $i < j$) y denotemos, como es usual, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Entonces:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} b_{1r_1} \dots b_{ir_i} \dots b_{jr_j} \dots b_{nr_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1r_1} \dots a_{jr_i} \dots a_{ir_j} \dots a_{nr_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1r_1} \dots a_{ir_j} \dots a_{jr_i} \dots a_{nr_n} \end{aligned}$$

Fijémonos ahora en la permutación indicada en los subíndices de los sumandos: no es σ , sino otra permutación, llamémosla τ , que coincide con σ en todo, salvo porque

$$\tau(i) = \sigma(j) = r_j, \quad \tau(j) = \sigma(i) = r_i.$$

Tratemos de relacionar las inversiones de σ con las de τ . Obviamente, para $1, \dots, i-1, j+1, \dots, n$ las inversiones que tienen lugar por ambas permutaciones son exactamente las mismas. Si tomamos $i < k < j$, entonces las inversiones que contamos en k por σ y τ son distintas en dos casos:

- (a) Si $r_i < r_k < r_j$, en τ aparece una inversión (porque $\tau(k) = r_k > \tau(j) = r_i$) que no aparecía en σ . Pero, de hecho, también aparece otra ($\tau(i) = r_j > \tau(k) = r_k$).
- (b) Si $r_i < r_k < r_j$, se da el caso simétrico.

Así las cosas, la diferencia entre las inversiones que contemos en σ y las de τ van siempre de dos en dos, a excepción de un solo caso: si $r_i > r_j$ en σ hay una inversión ($i < j, \sigma(i) > \sigma(j)$) que no aparece en τ . Por contra, si $r_i < r_j$, en τ aparece una inversión que no aparece en σ . En cualquier circunstancia

$$(-1)^{nt(\sigma)} = (-1) \cdot (-1)^{nt(\tau)},$$

de donde

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{\tau \in S_n} -(-1)^{nt(\tau)} a_{1r_1} \dots a_{ir_j} \dots a_{jr_i} \dots a_{nr_n} \\ &= -|A|, \end{aligned}$$

porque, cuando σ recorre todas las biyecciones de S_n , τ también lo hace. Esto se puede probar directamente o bien observando que $\tau = v\sigma$, donde v es la permutación que intercambia i con j , dejando todos los demás elementos de $\{1, \dots, n\}$ iguales. Entonces, cuando σ varía por todas las biyecciones de S_n , τ lo hace por las de $v \cdot S_n = S_n$ (ver 1.5.). *Q.E.D.*

Proposición.— El determinante de I_n vale 1.

Demostración.— Es inmediata, dado que la única permutación que no arroja un sumando nulo en el desarrollo es $\sigma(i) = i$, para todo $i = 1, \dots, n$, que no tiene inversiones. Entonces

$$|I_n| = (-1)^0 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1.$$

Q.E.D.

Observación.— Puede probarse (aunque no lo haremos aquí), que las tres propiedades estudiadas en esta lección (denominadas habitualmente, por este orden, multilinealidad, alternancia y normalidad) caracterizan el determinante como aplicación de $\mathcal{M}(n; k)$ en k .

2.4. Determinantes (II).

Continuamos con las propiedades básicas del determinante, incluyendo una prueba, que raras veces se expone en clase con total rigor, de que el determinante del producto de

dos matrices es el producto de los determinantes de ambas matrices. Aunque es obligatorio que los alumnos conozcan este resultado, se puede optar por sustituir la prueba por algunos ejemplos n -dimensionales, determinantes de Vandermonde o algunos otros ejemplos que puedan resultar útiles en el futuro.

Proposición.— El determinante de una matriz con dos filas iguales es 0.

Demostración.— En efecto, si $A \in \mathcal{M}(n; k)$ tiene dos filas iguales, al permutarlas obtenemos la misma matriz A . Pero, por alternancia, eso implica $|A| = -|A|$, de donde $|A| = 0$. *Q.E.D.*

Proposición.— Si una matriz tiene una fila proporcional a otra, su determinante es 0.

Demostración.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$ tal que $F(A)_i = \alpha F(A)_j$ para cierto $\alpha \in k$. Entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} F(A)_1 \\ \vdots \\ F(A)_i \\ \vdots \\ F(A)_j \\ \vdots \\ F(A)_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F(A)_1 \\ \vdots \\ \alpha F(A)_j \\ \vdots \\ F(A)_j \\ \vdots \\ F(A)_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} F(A)_1 \\ \vdots \\ F(A)_j \\ \vdots \\ F(A)_j \\ \vdots \\ F(A)_n \end{vmatrix} = 0,$$

por la alternancia del determinante. *Q.E.D.*

Corolario.— Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante es 0.

Demostración.— Inmediata. *Q.E.D.*

Proposición.— Si en una matriz una fila es combinación lineal de otras, el determinante es 0.

Demostración.— Supongamos que, en la matriz $A \in \mathcal{M}(n; k)$, tenemos

$$F(A)_i = \alpha_1 F(A)_{j_1} + \alpha_2 F(A)_{j_2} + \dots + \alpha_r F(A)_{j_r}.$$

Entonces el determinante de A se puede descomponer, por multilinealidad, como suma de r determinantes, cada uno de ellos con dos filas proporcionales y, en consecuencia, nulos. Así $|A| = 0$. *Q.E.D.*

Proposición.— Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(n; k)$, si sumamos a una fila de A una combinación lineal de otras filas de A , obtenemos una matriz B que verifica $|A| = |B|$.

Demostración.— Supongamos que B se obtiene de A haciendo

$$F(B)_i = F(A)_i + \alpha_1 F(A)_{j_1} + \alpha_2 F(A)_{j_2} + \dots + \alpha_r F(A)_{j_r},$$

y todas las demás filas de B coinciden con las de A . Entonces

$$\begin{aligned}
 |B| &= \begin{vmatrix} F(A)_1 \\ \vdots \\ F(A)_i + \alpha_1 F(A)_{j_1} + \dots + \alpha_r F(A)_{j_r} \\ \vdots \\ F(A)_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} F(A)_1 \\ \vdots \\ F(A)_i \\ \vdots \\ F(A)_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F(A)_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 F(A)_{j_1} + \dots + \alpha_r F(A)_{j_r} \\ \vdots \\ F(A)_n \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|.
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposición.— Sean $A, B \in \mathcal{M}(n; k)$. Entonces $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Demostración.— Esta prueba es bastante compleja, y es muy probable que el docente opte por no hacerla en clase; de todos modos la haremos por si no es éste el caso.

Sea $D = AB$. Entonces, por definición del producto,

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj},$$

por lo que

$$F(D)_i = \sum_{l=1}^n a_{il}F(B)_l, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Así pues tenemos que

$$\begin{aligned}
 |D| &= \begin{vmatrix} F(D)_1 \\ \vdots \\ F(D)_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{l_1=1}^n a_{1l_1}F(B)_{l_1} \\ \vdots \\ \sum_{l_n=1}^n a_{nl_n}F(B)_{l_n} \end{vmatrix} \\
 &= \sum_{l_1=1}^n \dots \sum_{l_n=1}^n a_{1l_1} \dots a_{nl_n} \begin{vmatrix} F(B)_{l_1} \\ \vdots \\ F(B)_{l_n} \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

usando (reiteradamente) la multilinealidad del determinante. Ahora bien, por alternancia, sabemos que si los $\{l_1, \dots, l_n\}$ no son todos distintos dos a dos, el sumando correspondiente es 0, al tener el determinante del sumando dos filas iguales.

Nos quedamos, pues, con los sumandos no nulos. Para uno de estos sumandos, definimos $\sigma \in S_n$ por $\sigma(j) = l_j$ para $j = 1, \dots, n$. Notemos que σ es una permutación bien definida, para todos los sumandos no nulos de $|D|$ y, recíprocamente, toda permutación de S_n va a aparecer de esta forma en algún sumando de la expresión anterior.

En uno de nuestros sumandos, observemos que

$$\begin{vmatrix} F(B)_{l_1} \\ \vdots \\ F(B)_{l_n} \end{vmatrix} = (-1)^{nt(\sigma)} |B|.$$

Esto puede probarse de manera similar a la prueba de que $nt(\sigma) = nt(\sigma^{-1})$. Entonces

$$\begin{aligned} |D| &= \sum_{l_1=1}^n \dots \sum_{l_n=1}^n a_{1l_1} \dots a_{nl_n} \begin{vmatrix} F(B)_{l_1} \\ \vdots \\ F(B)_{l_n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} (-1)^{nt(\sigma)} |B| \\ &= |B| \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} (-1)^{nt(\sigma)} = |A| \cdot |B|. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Observación.— Algunas otras propiedades que se deducen de las ya estudiadas o que se prueban de forma análoga, y que pueden aparecer como corolarios o como ejercicios (o no aparecer en absoluto e ir probándolas según surjan) son las siguientes: dada $A \in \mathcal{M}(n; k)$,

- (a) $|\alpha A| = \alpha^n |A|$, para todo $\alpha \in k$.
- (b) $|A^r| = |A|^r$, para todo $r \in \mathbb{N}$.
- (c) Si A es triangular superior (inferior), $|A|$ es el producto de sus elementos diagonales.

Estudiamos ahora un método de cálculo de determinantes a mano: el desarrollo de un determinante por adjuntos de una fila (columna).

Definición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$, a_{ij} un elemento de A . La submatriz de A resultante de eliminar $F(A)_i$ y $C(A)_j$, se denomina submatriz complementaria de a_{ij} y se denota M_{ij} . Su determinante se llama menor complementario de a_{ij} , que notaremos α_{ij} . El escalar

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

se denomina adjunto de a_{ij} .

Observación.— Los adjuntos se puede usar para calcular explícitamente los determinantes, en especial si se usan junto con las propiedades estudiadas anteriormente. Probemos primero el resultado esencial de esta lección.

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$ y escojamos una fila (columna) cualquiera $F(A)_i$. Entonces

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = |A|,$$

esto es, el determinante de $|A|$ se puede hallar calculando el desarrollo de una fila (columna) por sus adjuntos.

Demostración.— El desarrollo de $|A|$ era

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

por lo que los sumandos que contienen a un a_{ij} escogido de antemano se agrupan en

$$a_{ij} \sum_{\sigma(i)=j} (-1)^{nt(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{ij} B_{ij}.$$

Obviamente el objetivo es probar que $B_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$.

Dado que en cada sumando de $|A|$ hay exactamente un elemento de cada fila y de cada columna, en cada sumando de B_{ij} hay precisamente un elemento de cada fila de A (excepto de $F(A)_i$) y de cada columna (excepto de $C(A)_j$). Por tanto, salvo eventualmente el signo en cada sumando, B_{ij} es el determinante de M_{ij} .

Veamos, para un sumando concreto de B_{ij} la relación entre el signo con que aparece arriba (esto es, $(-1)^{nt(\sigma)}$) y el signo con el que aparece en el desarrollo del determinante de M_{ij} .

Dado $\sigma \in S_n$ con $\sigma(i) = j$,

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_{i-1} & j & r_{i+1} & \dots & r_n \end{bmatrix},$$

denominaremos σ' la biyección entre $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ y $\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ definida por $\sigma'(l) = \sigma(l)$. En estas condiciones si indicamos las filas de M_{ij} por $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ y las columnas por $1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$, tenemos que $(-1)^{nt(\sigma')}$ es el coeficiente con que aparece $a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ en $|M_{ij}|$.

N.B.: Para hacerlo usando permutaciones de S_{n-1} , deberíamos denotar por σ' a la permutación de S_{n-1} definida por

$$\sigma'(l) = \begin{cases} \sigma(l) & \text{si } 1 \leq l \leq i-1, \quad 1 \leq \sigma(l) \leq j-1 \\ \sigma(l) - 1 & \text{si } 1 \leq l \leq i-1, \quad j+1 \leq \sigma(l) \leq n \\ \sigma(l-1) & \text{si } i+1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq \sigma(l) \leq j-1 \\ \sigma(l-1) - 1 & \text{si } i+1 \leq l \leq n, \quad j+1 \leq \sigma(l) \leq n \end{cases}$$

o sea, σ' consiste simplemente en borrar i del conjunto original y j del conjunto imagen. Cuando σ recorre S_n , σ' recorre S_{n-1} .

Ahora bien, al eliminar $\sigma(i) = j$, el número de inversiones de σ' se ve alterado como sigue:

$$nt(\sigma') = nt(\sigma) - \#\{r_l > j \mid l = 1, \dots, i-1\} + \#\{r_l < j \mid l = i+1, \dots, n\}.$$

Si llamamos s al segundo sumando en la expresión anterior, entonces el tercer sumando es claramente $(j-1) - (i-1-s) = j-i+s$, por lo que

$$nt(\sigma') = nt(\sigma) - (s + j - i + s),$$

de donde

$$(-1)^{nt(\sigma')} = (-1)^{nt(\sigma) - 2s - j + i} = (-1)^{nt(\sigma) + i + j}.$$

De esta forma hemos probado que el coeficiente de a_{ij} en $|A|$ es

$$\sum_{\sigma'} (-1)^{nt(\sigma') + i + j} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Q.E.D.

Observación.— Este resultado, junto con las propiedades del determinante (especialmente el hecho de que sea invariante al sumar a una fila una combinación lineal de otras) se usa frecuentemente para el cálculo explícito, aplicando este desarrollo una vez que se han hecho en una fila todos los elementos cero, salvo uno. Esto permite convertir un determinante de orden n en uno de orden $n - 1$.

Lema.— Dada $A \in \mathcal{M}(n; k)$, escojamos dos filas distintas $F(A)_i$ y $F(A)_j$. Entonces

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0,$$

esto es, el desarrollo de una fila por los adjuntos de otra es siempre 0.

Demostración.— Tenemos que evaluar la suma anterior (supongamos $i < j$), donde un sumando arbitrario es

$$a_{il}A_{jl} = (-1)^{j+l}a_{il} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1l+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,l-1} & a_{j-1,l+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,l-1} & a_{j+1,l+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y usando el desarrollo visto anteriormente, pero a la inversa, podemos escribir

$$\begin{aligned} a_{il}A_{jl} &= a_{il} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1l} & a_{1l+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,l-1} & a_{il} & a_{i,l+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,l-1} & a_{j-1,l} & a_{j-1,l+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,l-1} & a_{j+1,l} & a_{j+1,l+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,l-1} & a_{nl} & a_{n,l+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1l} & a_{1l+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,l-1} & a_{il} & a_{i,l+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,l-1} & a_{j-1,l} & a_{j-1,l+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{il} & 0 & \dots & 0 \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,l-1} & a_{j+1,l} & a_{j+1,l+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,l-1} & a_{nl} & a_{n,l+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De esta forma cuando realizamos la suma, usando la multilinealidad del determinante, obtenemos el determinante de A , sustituyendo la fila j -ésima por la i -ésima. Al tener dos filas repetidas, el determinante (esto es, la suma que queremos evaluar) vale 0. *Q.E.D.*

2.5. Matriz inversa.

Definición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$. Diremos que A es regular si existe $B \in \mathcal{M}(n; k)$ verificando

$$AB = BA = I_n.$$

En este caso, B se denomina la matriz inversa de A y se denota A^{-1} . Las matrices no regulares se denominan singulares.

Observación.— Notemos en primer lugar que la matriz inversa de A , de existir, es única (lo cual justifica que se la denote A^{-1}). En efecto, si B y C son matrices inversas de A , tendremos

$$AB = I_n \implies I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n \implies B = I_n B = CI_n = C.$$

Observación.— Pasamos ahora a la vertiente práctica, esto es: cómo reconocer si una matriz es regular y, en caso afirmativo, cómo hallar A^{-1} .

Definición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$. Se denomina matriz adjunta de A a la matriz $\text{adj } A$ cuyo elemento (i, j) es A_{ij} , el adjunto del elemento (i, j) de A .

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$. Entonces

$$A(\text{adj } A)^t = (\text{adj } A)^t A = |A|I_n.$$

Demostración.— Si notamos como de costumbre

$$A = (a_{ij}), \quad \text{adj } A = (A_{ij}),$$

entonces

$$A(\text{adj } A)^t = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}A_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{1i}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i}A_{ni} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}A_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{2i}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2i}A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}A_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{ni}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{ni}A_{ni} \end{pmatrix},$$

esto es,

$$A(\text{adj } A)^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix},$$

usando las propiedades de los adjuntos. La otra igualdad es análoga. *Q.E.D.*

Con este resultado ya podemos probar el enunciado que resuelve los dos problemas antes citados.

Teorema de la matriz inversa.— Sea $A \in \mathcal{M}(n; k)$. Entonces A es regular si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)^t.$$

Demostración.— Es nuestra primera prueba de una condición necesaria y suficiente, así que la haremos paso a paso para acentuar el procedimiento estándar.

Primero supondremos que A es regular, y tendremos que probar que $|A| \neq 0$. Pero esto es trivial porque, como existe A^{-1} ,

$$A \cdot A^{-1} = I_n,$$

de donde $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, por lo que $|A| \neq 0$. Además hemos probado que $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

Ahora supondremos que $|A| \neq 0$. Entonces, por la proposición anterior

$$(\text{adj } A)^t \cdot A = A \cdot (\text{adj } A)^t = |A| \cdot I_n,$$

de donde, usando las propiedades del producto por escalares,

$$\left(\frac{1}{|A|} (\text{adj } A)^t \right) \cdot A = A \cdot \left(\frac{1}{|A|} (\text{adj } A)^t \right) = I_n.$$

Q.E.D.

Corolario.— El conjunto

$$\text{GL}(n; k) = \{A \in \mathcal{M}(n; k) \mid |A| \neq 0\}$$

denominado grupo lineal de orden n es, en efecto, un grupo con la operación producto.

Demostración.— La propiedad asociativa se verifica en todo $\mathcal{M}(n; k)$ y el elemento neutro del producto, I_n , está en el conjunto, por lo que sólo hay que probar que existe elemento inverso. Pero esto es sencillo usando el teorema anterior. *Q.E.D.*

Obsérvese que este grupo no es, en general, abeliano.

2.6. Rango.

Definición.— Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$. Un menor de orden r de A es el determinante de una submatriz cuadrada de A de orden r .

El rango de A , notado indistintamente $\text{rg}(A)$ o $\text{rango}(A)$, es el mayor $r \in \mathbb{N}$ tal que existe un menor de orden r de A distinto de 0. Dicho de otro modo, es el orden del mayor menor no nulo de A .

Observación.— De las propiedades estudiadas en 2.4. se deduce inmediatamente que, si todos los menores de orden $r+1$ son nulos, también lo son los de orden $r+2$ y, por tanto, los de cualquier orden mayor que r ; de donde $\text{rg}(A) \leq r$.

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$. Se verifica:

- (a) Si intercambiamos dos filas (columnas) de A , obtenemos una matriz con el mismo rango.
- (b) Si eliminamos de A una fila (columna) de ceros, obtenemos una matriz con el mismo rango.

- (c) Si sumamos a una fila (columna) de A una combinación lineal de otras filas (columnas), obtenemos una matriz del mismo rango.
- (d) Si eliminamos de A una fila (columna) que es combinación lineal de otras filas (columnas), obtenemos una matriz con el mismo rango.

Demostración.— Las propiedades (a) y (b) son elementales ya que, si denominamos B a la matriz resultante de intercambiar dos filas o de eliminar una fila de ceros, todo menor no nulo de A puede formarse en B , y viceversa, por lo que el resultado es inmediato.

Probemos la propiedad (c). Para ello, comenzaremos reduciendo el problema al caso básico en el que la operación efectuada sea sumar, a una fila, otra multiplicada por un escalar. En efecto, probado esto, sumar una combinación lineal arbitraria se traduce en aplicar el caso básico cuantas veces sean necesarias.

Una vez constatado esto, podemos también reducir el problema al caso

$$F(B)_1 = F(A)_1 + \alpha F(A)_2, \quad F(B)_i = F(A)_i, \text{ para } i = 2, \dots, n;$$

ya que, de no ser así, podemos permutar las filas afectadas (lo cual no varía el rango, por (a)). Ahora probaremos que $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(B)$ y con esto habremos finalizado, pues A también se puede obtener de B usando una combinación lineal de filas y, en consecuencia, la misma demostración que vamos a realizar prueba que $\text{rg}(B) \geq \text{rg}(A)$.

Supongamos entonces que $\text{rg}(A) = r$ y, por tanto, todos los menores de orden $r + 1$ son cero. Tomemos entonces un menor M cualquiera de orden $r + 1$ de B y probemos que es 0. Para ello, notemos en primer lugar que si M no involucra a $F(B)_1$ se puede hallar exactamente el mismo menor en A , por lo que $M = 0$. Así mismo si involucra tanto a $F(B)_1$ como a $F(B)_2$, también se puede hallar el mismo menor en A , convirtiendo $F(B)_1$ en $F(A)_1$ usando $F(B)_2 = F(A)_2$. Así pues, el único caso a tratar es cuando M involucra a $F(B)_1$, pero no a $F(B)_2$.

Podemos permutar las filas y columnas involucradas de manera que las filas sean $F(B)_1, F(B)_3, \dots, F(B)_{r+2}$ y las columnas $C(B)_1, \dots, C(B)_{r+1}$, sólo por simplificar notación. Pero entonces

$$\begin{aligned} M &= \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{21} & a_{12} + \alpha a_{22} & \dots & a_{1r+1} + \alpha a_{2r+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & \dots & a_{r+2,r+1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & \dots & a_{r+2,r+1} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & \dots & a_{r+2,r+1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que M es combinación de dos menores de orden $r + 1$ de A , de donde $M = 0$.

El apartado (d) es combinación directa de los apartados (c) y (b). $\mathcal{Q.E.D.}$

Corolario.— Dada $A \in \mathcal{M}(n; \mathbb{C})$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{rg}(\bar{A})$.

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, $P \in \text{GL}(m; k)$, $Q \in \text{GL}(n; k)$. Entonces $\text{rg}(PA) = \text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$.

Demostración.– Haremos sólo el caso $\text{rg}(PA) \leq \text{rg}(A)$, porque la otra desigualdad se tiene multiplicando a izquierda por P^{-1} y el caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(QA)$ es similar.

Procediendo como el apartado (c) de la proposición anterior, podemos suponer $\text{rg}(A) = r - 1$ (para facilitar la notación) y tomar, sin pérdida de generalidad, M , el menor formado por las r primeras filas y columnas de PA . Si probáramos $M = 0$, tendríamos el resultado. Pero, si notamos,

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}, \quad P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,m},$$

tenemos que

$$M = \begin{vmatrix} \sum_{l=1}^m p_{1l}a_{l1} & \dots & \sum_{l=1}^m p_{1l}a_{lr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^m p_{rl}a_{l1} & \dots & \sum_{l=1}^m p_{rl}a_{lr} \end{vmatrix}$$

y este menor, por la multilinealidad del determinante, puede escribirse como combinación lineal de menores de orden r de A , separando primero en sumas de determinantes (usando la multilinealidad por filas, no por columnas) y extrayendo después r coeficientes p_{ij} de cada determinante (también por filas).

Dado que el proceso completo es sumamente engorroso, no entraremos en los detalles, pero haremos un ejemplo suponiendo $r = m = 2$ para ilustrar la complejidad de dar explícitamente M como suma de menores de A . Así, en ese caso

$$\begin{aligned} M &= \begin{vmatrix} p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21} & p_{11}a_{12} + p_{12}a_{22} \\ p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21} & p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} p_{11}a_{11} & p_{11}a_{12} \\ p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21} & p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22} \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} p_{12}a_{21} & p_{12}a_{22} \\ p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21} & p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} p_{11}a_{11} & p_{11}a_{12} \\ p_{21}a_{11} & p_{21}a_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11}a_{11} & p_{11}a_{12} \\ p_{22}a_{21} & p_{22}a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{12}a_{21} & p_{12}a_{22} \\ p_{21}a_{11} & p_{21}a_{12} \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} p_{12}a_{21} & p_{12}a_{22} \\ p_{22}a_{21} & p_{22}a_{22} \end{vmatrix} \\ &= p_{11}p_{22}M_1 + p_{12}p_{21}M_2, \end{aligned}$$

donde M_1 y M_2 son menores de orden 2 de A . *Q.E.D.*

Observación.– No hemos dado aún un método para calcular el rango, más allá de los dos evidentes que se desprende de la definición: bien ir hallando todos los menores de un orden dado hasta que aparezca uno no nulo y, en ese momento, comenzar con los del orden siguiente; bien comenzar con los menores de orden máximo e ir bajando hasta encontrar uno no nulo.

Como muestra de la ineffectividad de estos procedimientos, baste poner un ejemplo, ni tan siquiera numérico: consideremos una matriz cuadrada de orden 5 y rango 3.

Si comenzamos haciendo menores de orden bajo y vamos ascendiendo, aún en el caso de que tengamos suerte y hallemos pronto un menor de orden 3 no nulo, nadie nos quita de

tener que calcular todos los menores de orden 4 hasta cerciorarnos de que todos son nulos. Eso implica 25 determinantes de orden 4. Si optamos por hacer primero el determinante de la matriz y luego ir buscando menores de menor rango aparte de los 25 determinantes de orden 4 debemos añadir a nuestra lista de tareas un determinante de orden 5.

A continuación desarrollaremos un método más efectivo para el cálculo a mano del rango de una matriz, conocido como el método de orlado. En el ejemplo anterior, bastan cuatro determinantes de orden 4 para garantizar que el rango de la matriz es 3.

El método del orlado se basa en el resultado siguiente:

Proposición.— Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$, verificando que:

- (a) Existe una submatriz cuadrada S de orden r con $|S| \neq 0$.
- (b) Toda submatriz cuadrada de orden $r + 1$ que contenga a S tiene determinante 0.

En estas condiciones $\text{rg}(A) = r$.

Demostración.— Podemos suponer como en la lección anterior que S está formada por las r primeras filas y columnas. Escribimos entonces A por bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} S & M_1 \\ \hline M_2 & M_3 \end{array} \right),$$

y consideramos la matriz cuadrada de orden m dada por bloques

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r \times (m-r)} \\ \hline -M_2 S^{-1} & I_{m-r} \end{array} \right),$$

cuya inversa es (ejercicio sencillo)

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r \times (m-r)} \\ \hline M_2 S^{-1} & I_{m-r} \end{array} \right) = (q_{ij}),$$

aplicando la definición.

Entonces la matriz $B = PA$ tiene el mismo rango que A , pero B tiene la siguiente forma, sin más que aplicar la definición de producto

$$B = \left(\begin{array}{c|c} S & M_1 \\ \hline 0_{(m-r) \times r} & M'_3 \end{array} \right),$$

con $M'_3 = -M_2 S^{-1} M_1 + M_3$.

Ahora bien, supongamos que hay una submatriz de orden $r + 1$ en B que contiene a S y con determinante distinto de 0. Permutando, supondremos que es la formada por las $r + 1$ primeras filas y columnas. Esto implica, en particular que $b_{r+1,r+1} \neq 0$, ya que $b_{r+1,i} = 0$ para $i = 1, \dots, r$.

Entonces, hacemos $P^{-1}B = A$ y es elemental (aunque algo largo de probar con detalle: lo dejamos al juicio del docente) ver que la submatriz formada por las $r + 1$ primeras filas y columnas de A es precisamente

$$\overline{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{1r+1} \\ & & & \vdots \\ & & & b_{rr+1} \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{array} \right),$$

donde se verifica

$$a_{r+1,j} = \sum_{l=1}^m q_{r+1,l} b_{lj}, \quad j = 1, \dots, r+1$$

pero, al ser $q_{r+1,l} = 0$ para $l > r+1$, y $q_{r+1,r+1} = 1$, en realidad

$$a_{r+1,j} = \sum_{l=1}^r q_{r+1,l} b_{lj} + b_{r+1,j}, \quad j = 1, \dots, r+1$$

y, para $l, j \leq r$ se tiene que $b_{lj} = a_{lj}$ y $b_{r+1,j} = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} a_{r+1,j} &= \sum_{l=1}^r q_{r+1,l} a_{lj} & j = 1, \dots, r \\ a_{r+1,r+1} &= \sum_{l=1}^r q_{r+1,l} a_{l,r+1} + b_{r+1,r+1} \end{aligned}$$

Si ahora realizamos la operación

$$F(\overline{S})_{r+1} - \sum_{l=1}^r q_{r+1,l} F(\overline{S})_l,$$

obtenemos una matriz de determinante $|\overline{S}|$ y forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{1r+1} \\ & & & \vdots \\ S & & & b_{rr+1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & b_{r+1,r+1} \end{array} \right).$$

De todo esto deducimos que, si $b_{r+1,r+1} \neq 0$, podemos hallar también en A una submatriz de orden $r+1$ que contiene a S y de determinante distinto de 0. Por reducción al absurdo se deduce que $\text{rg}(B) = r$ y, por tanto, también $\text{rg}(A) = r$. *Q.E.D.*

Observación.— El método del orlado para el cálculo del rango de una matriz A se basa en el resultado anterior de la manera obvia: dada A comenzamos buscando un menor de orden 1 distinto de 0. Si lo hay, $\text{rg}(A) \geq 1$, si no, $\text{rg}(A) = 0$ y hemos terminado.

En caso de no haber terminado, buscamos un menor de orden 2 cuya submatriz contenga la del menor de orden 1 no nulo hallado anteriormente. Si encontramos tal menor, $\text{rg}(A) \geq 2$, si no, por la proposición, $\text{rg}(A) = 1$ y hemos terminado.

Así, cuando tengamos $\text{rg}(A) \geq i$ porque hemos hallado una submatriz de orden i y menor no nulo, buscamos una submatriz de orden $i+1$ que contenga a la anterior (lo cual recorta mucho la búsqueda) y de determinante no nulo. Si la hallamos $\text{rg}(A) \geq i+1$ y seguimos, si no, $\text{rg}(A) = i$ y hemos finalizado.

2.7. Sistemas de ecuaciones lineales: Sistemas de Cramer.

Definición.— Un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas, pongamos $x_1, \dots, x_n$ definido sobre un cuerpo k es un conjunto de expresiones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $a_{ij}, b_i \in k$ para todo $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

En notación matricial el sistema anterior se expresa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o, abreviadamente,

$$AX^t = B^t.$$

La matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ se denomina matriz de coeficientes del sistema y la matriz

$$(A \mid B^t) = (C(A)_1 \mid \dots \mid C(A)_n \mid B^t)$$

se denomina matriz ampliada del sistema (nótese que hemos usado B^t en lugar de $(C(B^t)_1)$, abusando un poco de la notación).

Una solución del sistema es una asignación de valores

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n,$$

con $\alpha_i \in k$ para todo $i = 1, \dots, n$; de tal forma que se verifica

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B^t.$$

Abreviadamente también se dirá que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una solución del sistema.

Dos sistemas se dicen equivalentes cuando tienen exactamente las mismas soluciones; esto es, toda solución de uno lo es de otro, y viceversa.

Observación.— El caso más simple (y, en cierto sentido, el único) de sistemas equivalentes es aquél en el que añadimos o sustraemos a un sistema ecuaciones formadas a partir de las del sistema mediante combinaciones lineales.

Observación.— Notemos que la existencia de una solución $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es equivalente a que

$$\alpha_1 C(A)_1 + \alpha_2 C(A)_2 + \dots + \alpha_n C(A)_n = B^t.$$

Definición.— Atendiendo a la existencia y a la cantidad de soluciones, los sistemas de ecuaciones lineales pueden clasificarse como:

- (a) Sistemas incompatibles: Aquéllos que no tienen soluciones.
- (b) Sistemas compatibles: Aquéllos que admiten soluciones. Éstos, a su vez, se dividen en:
 - (b.1) Sistemas compatibles determinados: Aquéllos que admiten una única solución.
 - (b.2) Sistemas compatibles indeterminados: Aquéllos que admiten más de una solución.

Definición.— Un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo cuando la matriz B tiene todos sus elementos nulos.

Observación.— Los sistemas homogéneos han sido de gran importancia históricamente y también lo serán en esta asignatura. Como es obvio, todo sistema homogéneo es compatible.

Definición.— Un sistema de ecuaciones lineales se dice de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y verifica que $|A| \neq 0$.

Teorema.— Un sistema de Cramer es siempre compatible determinado.

Demostración.— Si escribimos el sistema en notación matricial $AX^t = B^t$, dado que $|A| \neq 0$, podemos escribir

$$A^{-1}AX^t = A^{-1}B^t \implies I_n X^t = X^t = A^{-1}B^t,$$

lo cual demuestra el resultado, por la unicidad de A^{-1} .

Corolario.— Un sistema de Cramer homogéneo tiene como única solución

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Observación.— Para resolver un sistema de ecuaciones hay muchos métodos distintos, y, si bien un estudio detallado de la complejidad de cada uno está fuera por completo de los objetivos de la asignatura, sí podemos recalcar que el método que a continuación probaremos para los sistemas de Cramer, si bien es claramente inmanejable para sistemas de más de 4 incógnitas, puede resultar de ayuda para sistemas con pocas ecuaciones donde no queramos pararnos a buscar combinaciones que eliminen variables.

Regla de Cramer.— Sea un sistema de ecuaciones de Cramer, notado matricialmente,

$$AX^t = B^t.$$

Entonces la solución única del sistema viene dada por

$$x_i = \frac{1}{|A|} \det \left(C(A)_1 \mid \dots \mid C(A)_{i-1} \mid B^t \mid C(A)_{i+1} \mid \dots \mid C(A)_n \right),$$

para $i = 1, \dots, n$. Esto es, el valor de cada x_i es el cociente de dos determinantes, el determinante de A como denominador y, como numerador, el determinante de la matriz

obtenida al sustituir, en A , la columna de los coeficientes de x_i por la de términos independientes.

Demostración.— Si recobramos de la prueba anterior la solución del sistema de Cramer,

$$X^t = A^{-1}B^t,$$

podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} X^t &= \frac{1}{|A|} (\text{adj } A)^t B^t \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de lo cual

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n}{|A|},$$

donde, para finalizar la demostración sólo resta observar que el numerador es el desarrollo por los adjuntos de la columna i -ésima del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Q.E.D.

Observación.— Gracias a los sistemas de Cramer podemos probar el recíproco de una propiedad del rango de una matriz.

Proposición.— Sea A una matriz con $\text{rg}(A) = r$. Si al eliminar una fila (columna) de A el rango continúa siendo r , la fila (columna) eliminada era combinación lineal de las restantes.

Demostración.— Podemos suponer, como ya hemos explicado varias veces, que un menor de orden maximal lo dan las r primeras filas y columnas. Probaremos entonces que la columna $C(A)_{r+1}$ es combinación lineal de $C(A)_1, \dots, C(A)_r$ y todos los demás casos se siguen de éste.

Si denominamos S a la submatriz anteriormente descrita, tenemos que

$$SX^t = \begin{pmatrix} a_{1r+1} \\ \vdots \\ a_{rr+1} \end{pmatrix}$$

es un sistema de Cramer de orden r , por lo que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in k$ tales que, para $l = 1, \dots, r$

$$\alpha_1 a_{l1} + \dots + \alpha_r a_{lr} = a_{lr+1}.$$

Ahora bien, si al hacer $\alpha_1 C(A)_1 + \dots + \alpha_r C(A)_r - C(A)_{r+1}$ no obtenemos exactamente una columna de ceros es porque hay un elemento no nulo por debajo de la fila r -ésima. Pero entonces al orlar la submatriz S con esa fila y la columna $(j+1)$ -ésima, obtenemos una submatriz de determinante no nulo y orden $r+1$, contradiciendo la hipótesis. Así, ha de ser

$$C(A)_{r+1} = \alpha_1 C(A)_1 + \dots + \alpha_r C(A)_r.$$

Q.E.D.

2.8. Teorema de Rouché–Fröbenius.

El teorema de Rouché–Fröbenius es el resultado más importante visto hasta ahora, ya que clasifica perfectamente los sistemas en función de los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

Teorema de Rouché–Fröbenius.— La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes coincida con el rango de la matriz ampliada.

En estas condiciones, si dicho rango coincide con el número de variables el sistema es determinado. Si el rango es menor, el sistema es indeterminado.

Demostración.— Notamos, como en las anteriores lecciones, $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$ la matriz de coeficientes, $(A \mid B^t)$ la matriz ampliada y el sistema por

$$AX^t = B^t.$$

Probemos primero la condición necesaria, esto es: si un sistema es compatible ha de darse que los rangos coincidan. Esto es consecuencia directa de la observación que hicimos en la lección 2.7.: la existencia de una solución $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ implica que

$$\alpha_1 C(A)_1 + \dots + \alpha_n C(A)_n = B^t,$$

por lo que la última columna de $(A \mid B^t)$ es combinación lineal de las anteriores y, en consecuencia, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid B^t)$.

Demostremos ahora que si los rangos de A y $(A \mid B^t)$ coinciden, entonces existe solución para el sistema. Para ello, supongamos que $\text{rg}(A) = h$ y, permutando ecuaciones y variables si es necesario, que las h primeras filas y columnas de A forman un menor no nulo (de A y de $(A \mid B^t)$, claro).

Por tanto, las $m - h$ filas restantes de $(A \mid B^t)$ son, como vimos en la lección pasada, combinación lineal de las anteriores. Esto es, las $m - h$ ecuaciones últimas son combinación lineal de las h primeras, por lo que podemos eliminarlas del sistema y el sistema que nos queda es equivalente.

Así mismo, como las h primeras columnas participan en el menor no nulo, reescribiremos el sistema original de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1h}x_h &= b_1 - a_{1h+1}x_{h+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2h}x_h &= b_2 - a_{2h+1}x_{h+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots &\vdots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hh}x_h &= b_h - a_{hh+1}x_{h+1} - \dots - a_{hn}x_n \end{cases}$$

que, como sistema de h ecuaciones en las variables $x_1, \dots, x_h$ es de Cramer y, por tanto, tiene solución única. En concreto, por los resultados de la lección anterior, si denotamos el sistema anterior

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \end{pmatrix} = B'$$

obtenemos

$$x_i = \frac{A'_{1i}b'_1 + A'_{2i}b'_2 + \dots + A'_{hi}b'_h}{|A'|},$$

para $i = 1, \dots, h$ donde

$$b'_j = b_j - a_{jh+1}x_{h+1} - \dots - a_{jn}x_n.$$

Esto es, para cada valor que demos a las variables $x_{h+1}, \dots, x_n$ obtenemos una solución del sistema de Cramer. En nomenclatura habitual, las variables $x_{h+1}, \dots, x_n$ son parámetros del espacio de soluciones.

A partir de aquí todas las afirmaciones del teorema se siguen de manera obvia: existe solución; y es única si y sólo si no existen parámetros, esto es, cuando $h = n$; ya que si existe un sólo parámetro, dándole valores 0 y 1 se han de obtener necesariamente al menos dos soluciones distintas. $\mathcal{Q.E.D.}$

Observación.— Sea el sistema de m ecuaciones en n incógnitas dado por $AX^t = B^t$, y consideremos el sistema $AX^t = 0_{m \times 1}$, denominado usualmente el sistema homogéneo asociado. Sea

$$L = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ soluciones de } AX^t = 0_{m \times 1}\},$$

y sean $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ y $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ dos soluciones particulares del sistema original $AX^t = B^t$. Entonces

$$(\beta_1 - \gamma_1, \dots, \beta_n - \gamma_n) \in L,$$

como se deduce trivialmente, ya que

$$A \begin{pmatrix} \beta_1 - \gamma_1 \\ \vdots \\ \beta_n - \gamma_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = B^t - B^t = 0_{m \times 1}.$$

De la misma forma se prueba que $(\beta_1 + \alpha_1, \dots, \beta_n + \alpha_n)$ es solución del sistema original para cualquier $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L$. Ambas afirmaciones prueban entonces que el conjunto de soluciones del sistema original se puede hallar sumando una solución particular cualquiera con todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Ejercicios del tema 2

Ejercicio 1.– Demostrar que cada matriz cuadrada se descompone como suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica, y que, además, la descomposición es única. Descomponer así la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.– Se considera la matriz:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallar las potencias de Z : $Z^2, Z^3, \dots$
2. Hallar $P(Z) = I_4 + 2Z^2 + Z^3 + 3Z^4$?
3. Sea $Q(X) = \sum_{i=1}^n iX^i \in \mathbf{Q}[X]$. Escribir la matriz $Q(Z)$.

Ejercicio 3.– Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular A^8 .

Ejercicio 4.– Consideremos la matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son tres números complejos distintos. Estudiar cuáles son las matrices cuadradas M de orden 3 que conmutan con D , es decir que verifican:

$$DM = MD$$

Ejercicio 5.– Consideremos las tres matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificar la ley de asociatividad sobre el ejemplo particular del producto ABC . Es decir, efectuar el producto ABC de las dos maneras: $(AB)C$ y $A(BC)$.

Ejercicio 6.– Encontrar todas la matrices B tales que $BA = I_2$ y las matrices C tales que $AC = I_3$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7.– Calcular los determinantes siguientes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 8.– Calcular los determinantes:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \quad D_6 = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & b & x & x \\ x & x & c & x \\ x & x & x & d \end{vmatrix}$$

Ejercicio 9.– Determinar el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 20 & -2 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -i & i \\ i & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1+i & -1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2i & 1 & -1 \\ -1 & -1-i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10.– Determinar el rango de la matriz siguiente, según los valores del parámetro a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11.– Dar explícitamente la inversa de la matriz 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

supuesto que $ad - bc \neq 0$.

Ejercicio 12.– Calcular las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13.– Clasificar, en función del parámetro a ; y resolver cuando sea posible el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2ax_1 + x_2 + 3ax_3 &= 0 \\ 2x_1 + ax_2 + x_4 &= 1 \\ ax_2 - 3x_3 &= a \end{cases}$$

Ejercicio 14.– Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 &= 1 \end{cases}$$

Ejercicio 15.– Para los siguientes enunciados, decir si son verdaderos o falsos, razonando la respuesta **brevemente**.

1. Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.
2. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones que incógnitas.
3. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones independientes que incógnitas.
4. Para todo sistema incompatible se verifica que el número de ecuaciones independientes es mayor o igual que el de incógnitas.
5. El número de ecuaciones independientes de todo sistema compatible indeterminado es menor que el número de incógnitas.
6. No existen sistemas compatibles indeterminados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
7. Un sistema compatible determinado con coeficientes enteros tiene su solución entera.