

Tema 7

Formas bilineales

7.1 Representación matricial

Definición 7.1.1.— Sea V un espacio vectorial sobre K . Una aplicación

$$\Phi : V \times V \rightarrow K$$

es una forma bilineal sobre V si para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ y todo $\alpha \in K$ se verifica:

- (1) $\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{z}, \mathbf{w}) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{w})$.
- (2) $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{z})$.
- (3) $\Phi(\alpha \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha \cdot \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.
- (4) $\Phi(\mathbf{v}, \alpha \cdot \mathbf{w}) = \alpha \cdot \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Diremos que Φ es simétrica si además

- (5) $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

Ejemplos 7.1.2.—

1. $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ es la forma bilineal cero.
2. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V , $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{w}_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

es una forma bilineal simétrica.

3. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base de V , $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{w}_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2)$

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

es una forma bilineal no simétrica (alternada).

4. Sea $V = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P(X)) \leq 3\}$ y $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ una base de V .
Si $P(X), Q(X) \in V$,

$$\Phi(P(X), Q(X)) = \int_0^1 P(X) \cdot Q(X) dX$$

es una forma bilineal.

Proposición 7.1.3.— Φ es una forma bilineal si y sólo si $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ es

$$\Phi(\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}, \gamma \cdot \mathbf{w} + \delta \cdot \mathbf{z}) = \alpha\gamma\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \alpha\delta\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + \beta\gamma\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \beta\delta\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{z})$$

Proposición 7.1.4.— Sea $A \in M(n \times n, K)$. La aplicación

$$\Phi_A : K^n \times K^n \rightarrow K$$

definida por:

$$\Phi_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

es una forma bilineal.

Proposición 7.1.5.— Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K . Sean Φ una forma bilineal sobre V , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V y

$$A = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & \dots & \Phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1) & \dots & \Phi(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \end{pmatrix}$$

Entonces para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Phi_A(\mathbf{v}_{\mathcal{B}}, \mathbf{w}_{\mathcal{B}})$$

Definición 7.1.6.— La matriz obtenida en 7.1.5 se denomina matriz de Φ respecto de $\mathcal{B}$ y la notaremos por $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$.

Ejemplos 7.1.7.— Las matrices de los ejemplos citados en 7.1.2, respecto de las bases que allí se indican,

son respectivamente: 0 , I , $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$

Una generalización del anterior ejemplo es el siguiente:

Sea V_n el espacio vectorial de todos los polinomios de $\mathbb{R}[X]$ de grado menor o igual a n . Entonces, $\dim(V_n) = n + 1$ y una base de V_n es, por ejemplo, $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$. Sea $\Phi : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\Phi(P(X), Q(X)) = \int_0^1 P(X) \cdot Q(X) \cdot dX$$

Φ es una forma bilineal simétrica, y la matriz de Φ respecto de $\mathcal{B}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & 1/(n+3) & \dots & 1/(2n+1) \end{pmatrix}$$

Proposición 7.1.8.— Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) Φ forma bilineal simétrica.
- (2) $\forall \mathcal{B}$ base de V es $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ simétrica ($A = A^t$).
- (3) $\exists \mathcal{B}$ base de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ es simétrica.

Proposición 7.1.9.— Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ bases de V y Φ una forma bilineal sobre V . Entonces

$$M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \cdot M_{\mathcal{B}}(\Phi) \cdot M(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t$$

Definición 7.1.10.— Sean $A, B \in M(n \times n, K)$. Diremos que A y B son congruentes si existe $P \in Gl(n, K)$ tal que:

$$A = P \cdot B \cdot P^t$$

Nota 7.1.11.— La congruencia es una relación de equivalencia.

Proposición 7.1.12.— Sean $A, B \in M(n \times n, K)$ y V un espacio vectorial de dimensión n sobre K . Las condiciones siguientes son equivalentes.

- (1) A y B son congruentes.
- (2) Existen una forma bilineal Φ sobre V y bases de V , $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, tales que: $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = A$ y $M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = B$.

7.2 Clasificación de formas bilineales simétricas reales

Lema 7.2.1.— Sea Φ una forma bilineal simétrica sobre V .

- (1) Si $\Phi \neq 0$, existe siempre un vector $\mathbf{u}$ tal que $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = b \neq 0$
- (2) Sean $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$, tales que $\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij} \cdot b_i$, $\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \right)$, con $b_i \neq 0$, $i, j = 1, \dots, k$. Sea $L = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$. Si llamamos

$$L^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{x}) = 0, \forall i = 1, \dots, k\} \text{ (variedad ortogonal a } L)$$

se verifica:

- a) $L^\perp$ es una variedad lineal de V .
- b) $V = L \oplus L^\perp$

Teorema 7.2.2.— Sea Φ una forma bilineal simétrica sobre V . Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ es diagonal.

Definición 7.2.3.— Sean $A, B \in M(n \times n, K)$. Diremos que A y B son equivalentes si existen $P, Q \in Gl(n, K)$ tales que:

$$A = P \cdot B \cdot Q$$

Nota 7.2.4.— La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.

Proposición 7.2.5.— Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango.

Definición 7.2.6.— Supongamos que $K = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. Sea $A \in M(n \times n, K)$ una matriz diagonal. La *signatura* de A , $\text{sig}(A)$, es el número de elementos positivos de su diagonal principal.

Teorema 7.2.7.— (de Sylvester) Sean $A, B \in M(n \times n, K)$ matrices diagonales. Entonces

- (1)

$$\text{Si } K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \quad A \text{ y } B \text{ congruentes} \Rightarrow \begin{cases} \text{rang}(A) = \text{rang}(B) \\ \text{sig}(A) = \text{sig}(B) \end{cases}$$

- (2)

$$\text{Si } K = \mathbb{R}, \quad A \text{ y } B \text{ congruentes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rang}(A) = \text{rang}(B) \\ \text{sig}(A) = \text{sig}(B) \end{cases}$$

Corolario 7.2.8.— Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y Φ una forma bilineal simétrica sobre V . Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que:

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \left. \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \right\}^p & & & \\ & -1 & & \\ & & \left. \begin{matrix} \ddots & & \\ & -1 & \end{matrix} \right\}^q & \\ & & & 0 & \\ & & & & \left. \begin{matrix} \ddots & & \\ & & 0 \end{matrix} \right\}^r \end{pmatrix}$$

con p y q unívocamente determinados ($p + q = \text{rango}$).