Tema 2: Diagonalización

1 Introducción

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ podemos asociar a f la matriz $A_1 = [f, \mathcal{B}] \in \mathcal{M}_n$. Si $\mathcal{C}$ es otra base de $\mathbb{R}^n$ y $P \in \mathcal{M}_n$ es la matriz de cambio de base, entonces

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_{\mathcal{C}} = P\mathbf{x}_{\mathcal{B}}.$$

En consecuencia, si $A_2 = [f, \mathcal{C}] \in \mathcal{M}_n$, tendremos

$$A_1 = P^{-1}A_2P,$$

o, si $Q = P^{-1}, \quad A_2 = Q^{-1}A_1Q$. Es decir, las matrices asociadas a un endomorfismo en distintas bases son semejantes. Nos planteamos lo siguiente:

PROBLEMA 1:

¿Es posible encontrar una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$, tal que la matriz $[f, \mathcal{C}]$ sea “lo más simple posible”?

Aquí, entendemos por “lo más simple” que dicha matriz es diagonal, triangular superior..., o posee alguna propiedad similar.

En términos de matrices este problema puede formularse como sigue:

PROBLEMA 2:

Dada $A \in \mathcal{M}_n$, ¿existe $B \in \mathcal{M}_n$, semejante a A y “lo más simple posible”?

En este capítulo resolveremos estos problemas en un caso particular. Veremos cuándo existe solución, y como obtenerla, para las siguientes versiones de estos problemas:

PROBLEMA A:

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, ¿existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $[f, \mathcal{B}]$ es diagonal?

PROBLEMA B:

Dada $A \in \mathcal{M}_n$, ¿existe $B \in \mathcal{M}_n$ diagonal y semejante a A?

2 Autovalores y autovectores

Definición. 2.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Diremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor (o valor propio) de f si:

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

Diremos que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un autovector (o vector propio) de f si:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$$

y, en tal caso, decimos que $\mathbf{v}$ es un vector propio asociado al autovalor λ.

Lema. 2.2 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Se verifica:

i) El vector $\mathbf{0}$ es un vector propio de f.

ii) Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ es un autovector de f, entonces existe un único $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

Definición. 2.3 Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal y $\lambda \in \mathbb{R}$ representaremos por $V(\lambda)$ al conjunto:

$$V(\lambda) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}.$$

Proposición. 2.4 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$. Se verifica:

1) $V(\lambda) = N(f - \lambda id)$, en particular, $V(\lambda)$ siempre es una variedad lineal.
2) $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{\mathbf{0}\}$.
3) Son equivalentes:
   a) λ es un autovalor de f.
   b) $V(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$.
   c) $f - \lambda id$ no es inyectiva.

Definición. 2.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de f, entonces $V(\lambda)$ se denomina subespacio propio (o autoespacio) de f, asociado a λ.

Proposición. 2.6 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ valores propios de f, distintos entre si. Sea, para cada $i = 1, \ldots, p$,

$$\mathbf{x}_i \in V(\lambda_i) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}.$$

Entonces, $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ es l.i.

Corolario. 2.7 Todo endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ posee, a lo sumo, n autovalores distintos.

Los conceptos de autovalor y autovector pueden definirse de manera similar para matrices cuadradas; en concreto, tenemos:

Definición. 2.8 Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Diremos que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es autovector de A si

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Un número $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A si

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Proposición. 2.9 Si $A \in \mathcal{M}_n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λ es un autovalor de A si y sólo si

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Proposición. 2.10 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sea $A = [f, \mathcal{B}] \in \mathcal{M}_n$. Son equivalentes:

1) λ es un autovalor de f.
2) λ es un autovalor de A.
3) $det(A - \lambda I) = 0$.

Como consecuencia de estos últimos resultados, tenemos lo siguiente:

- Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, los autovalores de f coinciden con los de cualquier matriz asociada a f, respecto de cualquier base.
- Si dos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$, f y g, se representan por una misma matriz (respecto de bases distintas) entonces f y g tienen los mismos autovalores.

Definición. 2.11 Dada $A \in \mathcal{M}_n$, llamaremos polinomio característico de A al polinomio de grado n:

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I).$$

La ecuación $p_A(\lambda) = 0$, se denomina ecuación característica de A.

Lema. 2.12 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$. Se verifica:

1) Los autovalores de A son las raices reales de su polinomio característico, $p_A(\lambda)$, es decir, las soluciones de la ecuación característica de A.

2) Si A y B son semejantes, entonces $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ y, por tanto, A y B tienen los mismos autovalores.

Puesto que, dado un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ y dos bases, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, de $\mathbb{R}^n$ distintas, las matrices $A = [f, \mathcal{B}]$ y $B = [f, \mathcal{C}]$ son semejantes, ambas tienen el mismo polinomio característico. Por tanto, podemos asociar dicho polinomio a f sin que haya ambigüedad. Esto nos permite hacer la siguiente

Definición. 2.13 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Definimos el polinomio característico de f, y lo denotamos por $p_f(\lambda)$, como el polinomio característico de la matriz asociada a f respecto de cualquier base de $\mathbb{R}^n$.

De nuevo, los autovalores de un endomorfismo, f, son las raices reales de su polinomio característico, $p_f(\lambda)$.

3 Endomorfismos diagonalizables

Definición. 3.1 Un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ se denomina diagonalizable si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $[f, \mathcal{B}]$ es diagonal.

Teorema. 3.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Son equivalentes:

a) f es diagonalizable.

b) Existe una base, $\mathcal{B}$, de $\mathbb{R}^n$, formada por autovectores de f y, en tal caso,

$$[f, \mathcal{B}] = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

siendo los λ_i autovalores de f.

A continuación veremos como los autovalores y autovectores de un endomorfismo nos permiten estudiar, de una manera relativamente simple, si es, o no, diagonalizable.

Teorema. 3.3 Si un endomorfismo, f, de $\mathbb{R}^n$ posee n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.

Definición. 3.4 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal y $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de f. Definimos la multiplicidad geométrica de λ como la dimensión del subespacio propio asociado a λ, es decir, el número

$$dim(V(\lambda)).$$

La multiplicidad algebraica de λ se define como la multiplicidad de λ como raiz del polinomio característico de f.

Proposición. 3.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal y $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ un autovalor de f, entonces:

$$1 \leq \text{ mult. geométrica de } \lambda_1 \leq \text{mult. algebraica de } \lambda_1.$$

Teorema. 3.6 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ los autovalores de f, siendo $m_1, \ldots, m_p$ sus multiplicidades algebraicas, respectivamente. Entonces:

$$f \text{ es diagonalizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 + \cdots + m_p = n \\ \text{y} \\ \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad m_i = dim(V(\lambda_i)) \end{cases}$$

4 Diagonalización de matrices

Definición. 4.1 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, diremos que A es diagonalizable si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n$ tal que:

$$P^{-1}AP = D \text{ diagonal.}$$

La matriz P se denomina una matriz de paso.

En este punto podemos ver que los dos problemas que planteábamos al principio del tema son, en cierto sentido, equivalentes ya que cada caso particular de uno de ellos se reduce a un caso particular del otro. De manera mas precisa:

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y definamos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Entonces,

$$f \text{ es diagonalizable} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ es diagonalizable.}$$

Por tanto, podemos establecer, para matrices cuadradas, un teorema similar al que hemos probado para endomorfismos.

Teorema. 4.2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ los autovalores de A, siendo $m_1, \ldots, m_p$ sus multiplicidades algebraicas, respectivamente. Entonces:

$$A \text{ es diagonalizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 + \cdots + m_p = n \\ \text{y} \\ \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad m_i = dim(V(\lambda_i)) \end{cases}$$

Esto nos da un criterio general para determinar si una matriz cuadrada es, o no, diagonalizable. Sin embargo, para ciertos tipos de matrices, esto puede asegurarse a priori. Un ejemplo de esto es el caso de las matrices simétricas.

Proposición. 4.3 Si $A \in \mathcal{M}_n$ es simétrica, entonces $p_A(\lambda)$ tiene n raices reales, es decir, A tiene n autovalores, si contamos cada uno de ellos tantas veces como indique su multiplicidad algebraica.

Proposición. 4.4 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dos autovalores de A, $\lambda \neq \mu$. Entonces,

$$\forall\, \mathbf{u} \in V(\lambda),\ \forall\, \mathbf{v} \in V(\mu), \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

Admitiremos sin demostración el siguiente

Teorema. 4.5 Toda matriz simétrica es diagonalizable y, de hecho, esto puede conseguirse usando una matriz de paso ortogonal.

Definición. 4.6 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_c$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, diremos que f es simétrico si

$$A = [f, \mathcal{B}_c] \in \mathcal{M}_n, \text{ es simétrica.}$$

Proposición. 4.7 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Son equivalentes:

a) f es simétrica.

b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{y})$.

c) Para toda B.O.N., $\mathcal{B}$, de $\mathbb{R}^n$, $[f, \mathcal{B}]$ es simétrica.

Teorema. 4.8 Si f es un endomorfismo simétrico de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una B.O.N., $\mathcal{B}$, de $\mathbb{R}^n$, tal que $[f, \mathcal{B}]$ es diagonal.

Para terminar, supongamos ahora que $A \in \mathcal{M}_n$ es diagonalizable. Veamos como es posible obtener una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n$ y una matriz de paso, P, de tal modo que

$$D = P^{-1}AP.$$

Calculemos los autovalores de A, es decir, las raices del polinomio característico de A, $p_A(\lambda)$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ los autovalores de A y $m_1, \ldots, m_r$ sus multiplicidades algebraicas. Recordemos que al ser A diagonalizable

$$\forall\ i = 1, \ldots, r, \quad m_i = dim(V(\lambda_i))$$

y, además, $m_1 + \cdots + m_r = n$.

Obtengamos, para cada $i = 1, \ldots, r$, una base $\mathcal{B}_i$ de $V(\lambda_i)$. Podemos asegurar que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$$

es una base de $\mathbb{R}^n$ y, si $\mathcal{B} = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ se tiene

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \overset{(m_1}{\ddots} & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \overset{(m_2}{\ddots} & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & & & \overset{(m_r}{\ddots} & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

siendo $P = [\mathbf{p}_1 | \ldots | \mathbf{p}_n]$ (los autovectores $\mathbf{p}_i$ están ordenados del mismo modo que sus correspondientes autovalores en D).