Tema 1: Aplicaciones lineales

1 Definiciones y propiedades generales

Definición. 1.1 Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diremos que f es lineal si:

i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$.

Como ejemplos de aplicaciones lineales tenemos:

1) La aplicación identidad, $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad id(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

2) La aplicación nula, $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \theta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Sin embargo, los ejemplos mas característicos se obtienen a partir del siguiente

Lema. 1.2 Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

es lineal.

Proposición. 1.3 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Se verifica:

1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$.

3) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

4) Dados $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$f(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(\mathbf{x}_i).$$

Definición. 1.4 Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diremos que f es un isomorfismo si f es lineal y biyectiva.

Proposición. 1.5 Se verifica:

1) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ son aplicaciones lineales, entonces la aplicación $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ también es lineal.

2) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, entonces también lo es su aplicación inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

2 Determinación de aplicaciones lineales

En esta sección veremos qué datos son necesarios para conocer todos los valores de una aplicación lineal y, por tanto, para que ésta quede determinada totalmente.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal y $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Entonces, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, existen unos únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i.$$

Por tanto,

$$f(\mathbf{x}) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{a}_i).$$

Es decir, el valor de f sobre un vector cualquiera, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, queda determinado una vez que los valores de f sobre una base de $\mathbb{R}^n$ son conocidos. De hecho tenemos,

Proposición. 2.1 Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y consideremos $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^m$. Entonces existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{y}_i.$$

A continuación pasaremos a estudiar el modo de determinar las propiedades (inyectiva, sobreyectiva etc.) de una aplicación lineal.

Proposición. 2.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se verifica:

i) Si $L_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal, entonces,

$$f(L_1) = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} \in L_1\}$$

es una variedad lineal de $\mathbb{R}^m$.

ii) Si $L_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ es una variedad lineal, entonces,

$$f^{-1}(L_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ f(\mathbf{x}) \in L_2\}$$

es una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$.

Definición. 2.3 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Definimos la imagen de f como la variedad lineal de $\mathbb{R}^m$,

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \ \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}.$$

El núcleo de f se define como la siguiente variedad lineal de $\mathbb{R}^n$

$$N(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Proposición. 2.4 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, $L \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$. Se verifica:

1) Si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ es l. d. entonces

$$\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\} \text{ es l. d.}$$

2) Si $\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\}$ es l.i. entonces

$$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\} \text{ es l.i.}$$

3) Si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ genera L entonces

$$\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\}$$

genera $f(L)$. En particular, si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ generan $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\}$$

generan $Im(f) = f(\mathbb{R}^n)$.

Nota. 2.5 *Si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es l.i. y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal, en general, $\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\}$ puede ser linealmente dependiente.*

Proposición. 2.6 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, entonces:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ es inyectiva} & \Longleftrightarrow & N(f) = \{\mathbf{0}\} \\ f \text{ es sobreyectiva} & \Longleftrightarrow & Im(f) = \mathbb{R}^m \end{array}$$

Corolario. 2.7 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal y sobreyectiva y $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ generan $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\}$$

generan $\mathbb{R}^m$.

Proposición. 2.8 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal inyectiva. Se verifica:

1) Si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ son l.i. entonces,

$$\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\}$$

son l.i.

2) Si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una base de L entonces,

$$\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p)\}$$

es base de $f(L)$. En particular, si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_n)\}$$

es base de $Im(f)$.

Corolario. 2.9 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo y $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \text{ es base de } \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_n)\} \text{ es base de } \mathbb{R}^m.$$

En particular, $n = m$.

Definición. 2.10 Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, llamaremos rango de f al número

$$rang(f) = dim(Im(f)).$$

Proposición. 2.11 Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, se verifica:

$$dim(N(f)) + dim(Im(f)) = n.$$

Proposición. 2.12 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Se verifica:

i) f es inyectiva $\iff$ $rang(f) = n$.

ii) f es sobreyectiva $\iff$ $rang(f) = m$.

Corolario. 2.13 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Son equivalentes:

1) f es biyectiva.

2) f es sobreyectiva.

3) f es inyectiva.

4) $rang(f) = n$.

3 Matriz asociada a una aplicación lineal

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, $\mathcal{B}_n = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ y $\mathcal{B}_m = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Entonces, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tendremos $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ luego

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}_n} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{y} \quad (f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}_m} = (\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

¿Qúe relación existe entre $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$?

Sea para cada $j = 1, \ldots, n$, $(f(\mathbf{a}_j))_{\mathcal{B}_m} = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$, es decir,

$$f(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{b}_i.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{a}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{a}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} \right) \mathbf{b}_i. \end{aligned}$$

Dado que $(f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}_m} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ tenemos,

$$\forall i = 1, \ldots, m, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij}.$$

Matricialmente, esto puede expresarse del siguiente modo:

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, es decir,

$$A = [(f(\mathbf{a}_1))_{\mathcal{B}_m} | \ldots | (f(\mathbf{a}_n))_{\mathcal{B}_m}].$$

Entonces,

$$(f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}_m} = A\mathbf{x}_{\mathcal{B}_n}.$$

Podemos establecer, de este modo, el siguiente resultado:

Teorema. 3.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, $\mathcal{B}_n$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_m$ una base de $\mathbb{R}^m$. Entonces, existe una única matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}_m} = A\mathbf{x}_{\mathcal{B}_n}.$$

La matriz A se denotará por $[f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m]$ y se denominará matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_m$.

Teorema. 3.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ lineales, $\mathcal{B}_n$ una base de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_m$ una base de $\mathbb{R}^m$ y $\mathcal{B}_p$ una base de $\mathbb{R}^p$. Se tiene:

1. $[f + g, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m] = [f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m] + [g, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m]$.
2. $[\alpha f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m] = \alpha[f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m]$
3. $[h \circ f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p] = [h, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}_p][f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m]$

Proposición. 3.3 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal y $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_m$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Entonces,

$$rang(f) = r([f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m]).$$

Proposición. 3.4 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal definida por

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Sean $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{C}_m$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Entonces,

$$[f, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_m] = A.$$

Proposición. 3.5 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Son equivalentes:

i) A es regular.

ii) f es un isomorfismo.

iii) $r(A) = n$.

4 Matrices semejantes

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal (un endomorfismo) y dos bases de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} \text{ y } \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\},$$

sean $A = [f, \mathcal{B}] = [f, \mathcal{B}, \mathcal{B}]$ y $A' = [f, \mathcal{C}] = [f, \mathcal{C}, \mathcal{C}]$.

¿Qué relación existe entre A y A'?

Sabemos que, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} = A\mathbf{x}_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad (f(\mathbf{x}))_{\mathcal{C}} = A'\mathbf{x}_{\mathcal{C}}.$$

Además, si $P = [(\mathbf{b}_1)_{\mathcal{C}}| \ldots |(\mathbf{b}_n)_{\mathcal{C}}] \in \mathcal{M}_n$ entonces,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_{\mathcal{C}} = P\mathbf{x}_{\mathcal{B}}.$$

Así, por una parte, tenemos

$$(f(\mathbf{x}))_{\mathcal{C}} = A'\mathbf{x}_{\mathcal{C}} = A'P\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$$

y, por otra,

$$(f(\mathbf{x}))_{\mathcal{C}} = P(f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}},$$

luego, igualando, obtenemos

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad P(f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} = A'P\mathbf{x}_{\mathcal{B}},$$

y de aquí,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} = P^{-1}A'P\mathbf{x}_{\mathcal{B}}.$$

Hemos probado, así, que

$$[f, \mathcal{B}] = A = P^{-1}A'P = P^{-1}[f, \mathcal{C}]P.$$

Este resultado da pié a introducir la siguiente

Definición. 4.1 Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$, diremos que A y B son semejantes si existe $P \in \mathcal{M}_n$ regular, tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

Proposición. 4.2 Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$, son equivalentes:

a) A es semejante a B.

b) Existe un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y dos bases, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, de $\mathbb{R}^n$, tales que:

$$A = [f, \mathcal{B}] \quad \text{y} \quad B = [f, \mathcal{C}].$$

5 Matrices idempotentes y ortogonales

Definición. 5.1 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, diremos que A es idempotente si $A^2 = A$.

Proposición. 5.2 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$ idempotentes. Se verifica:

a) $A + B$ es idempotente si y sólo si $AB + BA = \theta$.

b) Si $AB = BA$ entonces AB es idempotente.
(El recíproco no es cierto, en general).

c) $I - A$ es idempotente.

Definición. 5.3 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, diremos que A es ortogonal si:

$$A^tA = AA^t = I.$$

Proposición. 5.4 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$. Se verifica:

a) A es ortogonal si y sólo si A es regular y $A^{-1} = A^t$.

b) Si A es ortogonal, entonces A^{-1} es ortogonal.

c) Si A y B son ortogonales, entonces AB es ortogonal.

d) Si A es ortogonal, entonces $det(A) = \pm 1$.

Nota. 5.5 *En general, la suma de matrices ortogonales no es ortogonal.*

Proposición. 5.6 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es ortogonal si y sólo si sus filas (o columnas) forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

6 Aplicaciones ortogonales

Definición. 6.1 Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diremos que f es ortogonal si:

i) f es una aplicación lineal y

ii) f conserva el producto escalar, es decir,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Un ejemplo típico de aplicación ortogonal nos lo da el siguiente

Lema. 6.2 Dada $A \in \mathcal{M}_n$, una matriz ortogonal, la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

es ortogonal.

Proposición. 6.3 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación ortogonal. Se verifica:

1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.

2) Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales, entonces $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{y})$ son ortogonales.

3) Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un sistema ortogonal (resp. ortonormal) entonces

$$\{f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_k)\} \subseteq \mathbb{R}^m,$$

es ortogonal (resp. ortonormal).

4) f es inyectiva.

Proposición. 6.4 Sean $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dos aplicaciones ortogonales, entonces la composición $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ también es ortogonal.

Los siguientes resultados nos permiten caracterizar las aplicaciones ortogonales.

Proposición. 6.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Son equivalentes:

1) f es ortogonal.

2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.

3) Existe una base, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, de $\mathbb{R}^n$, ortonormal, tal que

$$\{f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

es un sistema ortonormal.

4) Para toda base, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, de $\mathbb{R}^n$, ortonormal,

$$\{f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

es un sistema ortonormal.

De manera similar al caso general de una aplicación lineal obtenemos:

Proposición. 6.6 Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una B.O.N. de $\mathbb{R}^n$ y $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sistema ortonormal de $\mathbb{R}^m$, entonces existe una única aplicación ortogonal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i.$$

Naturalmente, puesto que toda aplicación ortogonal, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, es lineal, dada una base de $\mathbb{R}^n$ y otra de $\mathbb{R}^m$, podemos asociar a dicha aplicación su matriz respecto de estas bases. Sin embargo, cuando se trata de un endomorfismo, si la base fijada es ortonormal, podemos obtener algunas propiedades más.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación ortogonal y $\mathcal{B}$ una B.O.N. de $\mathbb{R}^n$. Sea $A = [f, \mathcal{B}] \in \mathcal{M}_n$, es decir,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} = A\mathbf{x}_{\mathcal{B}}.$$

Entonces, dados $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} \cdot (f(\mathbf{y}))_{\mathcal{B}} = (A\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t \cdot (A\mathbf{y}_{\mathcal{B}}) = (\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t A^t A \mathbf{y}_{\mathcal{B}}.$$

Además,

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t \cdot \mathbf{y}_{\mathcal{B}}.$$

Por tanto, igualando, obtenemos:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t A^t A \mathbf{y}_{\mathcal{B}} = (\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t \cdot \mathbf{y}_{\mathcal{B}}$$

y, en consecuencia, $A^t A = I$. Gracias a esto, tenemos:

Proposición. 6.7 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, entonces, f es ortogonal si y sólo si la matriz de f respecto de una base ortonormal es ortogonal.

7 Proyección sobre una variedad lineal. Matrices de proyección

En esta sección introducimos una nueva clase de aplicaciones lineales que generalizan la proyección ortogonal.

Definición. 7.1 Sean $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ dos variedades lineales tales que

$$\mathbb{R}^n = L_1 \oplus L_2.$$

Entonces,

$$\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \exists! \mathbf{v}_1 \in L_1,\ \exists! \mathbf{v}_2 \in L_2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Definimos la proyección sobre L_1, paralela a L_2, como el endomorfismo, f, de $\mathbb{R}^n$, definido, para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, por

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1.$$

Proposición. 7.2 Sean $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ variedades lineales complementarias y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la proyección sobre L_1, paralela a L_2. Entonces,

1) f es lineal.

2) $f^2 = f \circ f = f$.

3) $Im(f) = L_1$ y $N(f) = L_2$.

Proposición. 7.3 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Entonces f es una proyección si y solo si $f^2 = f$.

Definición. 7.4 Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Diremos que A es una matriz de proyección si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ y una proyección f tal que $A = [f, \mathcal{B}]$.

Proposición. 7.5 Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Son equivalentes:

1) A es una matriz de proyección.
2) A es idempotente.

Definición. 7.6 Dada una proyección, f, sobre una variedad $L_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, paralela a $L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, se denomina proyección complementaria de f, a la aplicación lineal $g = id - f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. (De hecho, $id - f$ es la proyección sobre L_2, paralela a L_1).

Definición. 7.7 Diremos que una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una proyección ortogonal, si existe una v.l. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que f es la proyección sobre L paralela a $L^\perp$.

Proposición. 7.8 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una proyección y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

1) f es una proyección ortogonal.
2) $\forall i = 1, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, n, \quad f(\mathbf{u}_i) \cdot g(\mathbf{u}_j) = 0$,
   siendo $g = id - f$ la proyección complementaria de f.

Proposición. 7.9 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, $\mathcal{B}$ una B.O.N. de $\mathbb{R}^n$ y sea $A = [f, \mathcal{B}]$. Son equivalentes:

1) f es una proyección ortogonal.
2) A es idempotente y simétrica.