

Temas 6 y 7: El espacio euclídeo. Problemas métricos del espacio euclídeo.

1 Introducción.

Definición. 1.1 Un espacio euclídeo es un espacio afín $(X, V, +)$ sobre $\mathbb{R}$ en el que V está dotado del producto escalar. Un sistema de referencia métrico (u ortonormal) en $(X, V, +)$ es un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ tal que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ es una base ortonormal de V .

Definición. 1.2 En un espacio euclídeo se define la *distancia entre puntos*, en la forma siguiente:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Esta distancia verifica las propiedades usuales de una métrica, a saber:

Proposición. 1.3 1. $d(P, Q) \geq 0$.

2. $d(P, Q) = d(Q, P)$.

3. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$, con igualdad si y sólo si $Q \in \overline{PR}$. En particular, lo anterior es una desigualdad para cualquier permutación de P, Q, R si y sólo si estos tres puntos no están alineados.

La demostración de estas propiedades es inmediata a partir de las propiedades del producto escalar.

En un espacio euclídeo se verifica una relación muy sencilla, llamada el *teorema de Pitágoras*, que dice así:

Teorema. 1.4 Si A, B, C son tres puntos no alineados tales que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ son ortogonales, entonces

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

Hiperplano mediador de un segmento.- Si $P, Q \in X$ son dos puntos distintos, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de P y Q es el hiperplano $L = M + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle^\perp$, donde M es el punto medio de $\overline{PQ}$. A L se le llama el *hiperplano mediador* del segmento $\overline{PQ}$. En el caso particular en que $\dim X = 2$ se hablará de la *mediatriz* del segmento $\overline{PQ}$. En efecto, se tiene, para $R \in X$,

$$\begin{aligned} d(R, P) = d(R, Q) &\Leftrightarrow |\overrightarrow{RP}|^2 = |\overrightarrow{RQ}|^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MR})^2 = (\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MR} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} = -\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MR} = 0. \end{aligned}$$

que es la ecuación del hiperplano que pasa por M y es perpendicular a $\overrightarrow{MP}$.

Obsérvese que $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ}|$ y que $\overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{MP}$, por ser M el punto medio de $\overline{PQ}$.

2 Distancia de un punto a una variedad.

Definición. 2.1 Sea $P \in X$ un punto, L una variedad lineal afín no vacía. Se llamará *distancia de P a L* , y se notará $d(P, L)$ a

$$d(P, L) = \inf\{d(P, Q) \mid Q \in L\}.$$

Es claro que, si $P \in L$, $d(P, L) = 0$.

En el siguiente resultado se comprueba que este ínfimo se alcanza, efectivamente, en un punto de L .

Proposición. 2.2 Sean $P \in X$ un punto y L una variedad lineal afín no vacía. Sea $L' = P + D(L)^\perp$. Se verifica:

1. $L \cap L'$ es un punto de X .
2. $d(P, Q) = d(P, L)$.

Ejemplo. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN HIPERPLANO.- Sea H un hiperplano de ecuación $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ y sea $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Entonces

$$d(P, H) = \frac{|a_0 + a_1p_1 + \dots + a_np_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

En efecto: si $P \in H$ es claro. Supongamos que $P \notin H$. La ecuación de H se puede escribir

$$a'_0 + a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = 0 \text{ donde } \mathbf{u} = (a'_1, \dots, a'_n) \quad , \quad |\mathbf{u}| = 1 \quad , \quad \mathbf{u} \in D(H)^\perp$$

Sabemos que $d(P, H) = d(P, Q)$, siendo $Q \in H$ y $\overrightarrow{PQ} \in D(H)^\perp$. Entonces, $\overrightarrow{PQ} = \lambda \mathbf{u}$ y $d(P, H) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\lambda|$. Como $Q = P + \lambda \mathbf{u} \in H$ será

$$a'_0 + a'_1(p_1 + \lambda a'_1) + \dots + a'_n(p_n + \lambda a'_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad a'_0 + a'_1p_1 + \dots + a'_np_n + \lambda = 0$$

de donde,

$$\lambda = -(a'_0 + a'_1p_1 + \dots + a'_np_n) \quad \Rightarrow \quad d(P, H) = |\lambda| = \frac{|a_0 + a_1p_1 + \dots + a_np_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

3 Distancia entre variedades. Perpendicular común.

De manera análoga a lo anterior se define la distancia entre dos variedades lineales afines no vacías, aunque no existen dos puntos únicos (uno en cada una) que minimicen esa distancia (piénsese en dos variedades paralelas, por ejemplo). También existe una variedad lineal afín perpendicular común a dos disjuntas. Veamos primero unas definiciones.

Definición. 3.1 Dos variedades lineales afines L, L' de X se dicen perpendiculares si $D(L) \subset D(L')^\perp$ o $D(L) \supset D(L')^\perp$. Este hecho se representa escribiendo $L \perp L'$.

Definición. 3.2 Sean L_1, L_2 dos variedades lineales afines no vacías de X . Se llama distancia de L_1 a L_2 , y se nota $d(L_1, L_2)$, a

$$d(L_1, L_2) = \inf\{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in L_1, P_2 \in L_2\}.$$

Evidentemente, si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entonces $d(L_1, L_2) = 0$. Estudiemos el otro caso.

Proposición. 3.3 Sean L_1, L_2 variedades lineales afines no vacías y disjuntas. Existe una variedad lineal afín L verificando las siguientes propiedades:

1. $\dim L \geq 1$.
2. $L \cap L_i$ es un punto P_i , para $i = 1, 2$.
3. $L \perp L_i$, para $i = 1, 2$.
4. Toda otra L' que verifique las anteriores condiciones es tal que $D(L') \subset D(L)$ y, por tanto, $\dim L' \leq \dim L$.
5. $d(L_1, L_2) = d(P_1, P_2)$.
A esta variedad L se le llama una perpendicular común a L_1 y L_2 .
6. L es única si y sólo si L_1 y L_2 se cruzan.

4 Ángulos entre variedades.

Lema. 4.1 Sean $\mathbf{u}' \in L(\mathbf{u})$, $\mathbf{v}' \in L(\mathbf{v})$, $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$. Se verifica

$$\frac{|\mathbf{u}' \bullet \mathbf{v}'|}{|\mathbf{u}'| \cdot |\mathbf{v}'|} = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Definición. 4.2 ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS. Sean r y s dos rectas y sean $\mathbf{u} \in D(r)$, $\mathbf{v} \in D(s)$. Se define el ángulo que forman r y s como el único ángulo α , $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

El lema anterior nos asegura que el ángulo de dos rectas está bien definido, puesto que no depende de los vectores que se tomen en sus respectivas direcciones.

Definición. 4.3 ÁNGULO ENTRE RECTA E HIPERPLANO. Sea r una recta, $\mathbf{u} \in D(r)$, H un hiperplano y $\mathbf{a} \in D(H)^\perp$. Si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, la ecuación de H será: $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. Se define el ángulo entre r y H como

$$\widehat{(r, H)} = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \text{siendo } \alpha \text{ el único ángulo, } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \text{ tal que } \cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{a}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{a}|}$$

Definición. 4.4 ÁNGULO ENTRE DOS HIPERPLANOS. Sean H_1 y H_2 dos hiperplanos de ecuaciones respectivas

$$\begin{aligned} H_1 : & a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D(H_1)^\perp \\ H_2 : & b_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in D(H_2)^\perp \end{aligned}$$

Se define el ángulo entre H_1 y H_2 como

$$\widehat{(H_1, H_2)} = \alpha, \quad \text{siendo } \alpha \text{ el único ángulo, } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \text{ tal que } \cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Nota. 4.5 En el caso $n = 2$ las tres definiciones anteriores responden a la misma situación puesto que en el plano los hiperplanos son las rectas. Veamos, entonces, que las tres definiciones coinciden en este caso.

Sea $r : a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ y $s : b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$.

Observamos que $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{u} = (a_2, -a_1)$, $\mathbf{v} = (b_2, -b_1)$ verifican:

$$\begin{aligned} D(r) &= \langle \mathbf{u} \rangle & D(r)^\perp &= \langle \mathbf{a} \rangle & \mathbf{u} \bullet \mathbf{a} &= 0 \\ D(s) &= \langle \mathbf{v} \rangle & D(s)^\perp &= \langle \mathbf{b} \rangle & \mathbf{v} \bullet \mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

Para probar que las tres definiciones coinciden tendremos que ver que

$$\frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u} \bullet \mathbf{b})^2}{|\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2}} = \frac{|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

En efecto.

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = a_2b_2 + a_1b_1 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$|\mathbf{u}|^2 = a_1^2 + a_2^2 = |\mathbf{a}|^2$$

$$|\mathbf{v}|^2 = b_1^2 + b_2^2 = |\mathbf{b}|^2$$

Por otra parte, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{b} = a_2b_1 - a_1b_2$ y

$$1 - \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)^2}{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{b}|^2} = \frac{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_2b_1 - a_1b_2)^2}{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2} = \frac{(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2}$$

con lo que queda demostrada la coincidencia.