

Temas 4 y 5:

El espacio afín. Variedades lineales.

Paralelismo.

1 Introducción.

La Geometría afín sobre $\mathbb{R}$ tiene como objetos básicos los siguientes: un conjunto no vacío X , cuyos elementos serán llamados puntos, que notaremos por letras mayúsculas P, Q, R , etc, y un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, cuyos elementos serán llamados vectores o flechas, y que notaremos por letras minúsculas negritas, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, etc. Hay, además, una aplicación de $X \times V \rightarrow X$, que corresponde a la idea intuitiva de mover un punto P a un punto Q mediante un vector $\mathbf{u}$ con origen en P y extremo en Q . Formalicemos el concepto de espacio afín.

Definición. 1.1 *Un espacio afín es una terna $(X, V, +)$ formado por un conjunto no vacío X , un espacio vectorial V de dimensión finita, n , sobre $\mathbb{R}$, y una aplicación*

$$\begin{aligned} + : X \times V &\longrightarrow X \\ (P, \mathbf{u}) &\longmapsto P + \mathbf{u} \end{aligned}$$

que verifica las condiciones siguientes:

1. Para cada $P \in X$, la aplicación

$$\begin{aligned} (+)_P : V &\longrightarrow X \\ \mathbf{u} &\longmapsto P + \mathbf{u} \end{aligned}$$

es biyectiva.

2. Para cada $P \in X$, y para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, se verifica:

$$(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Nota. 1.2 La propiedad 1) de la definición anterior implica, en primer lugar, que

$$P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v} \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

En segundo lugar, fijado $P \in X$, para todo $Q \in X$, existe un único vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $P + \mathbf{u} = Q$. Se escribirá $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, y se dirá que es el vector de origen P y extremo Q . Si, en la propiedad 2), se escribe $Q = P + \mathbf{u}$, $R = Q + \mathbf{v}$, esta propiedad se relee así:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$

Finalmente, de esta última ecuación se deduce que

$$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} \implies \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$$

y

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0} \implies \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

Ejemplo. 1.3 *El ejemplo fundamental de espacio afín es el espacio afín numérico, dado por $X = V = \mathbb{R}^n$, y la aplicación $+$ que es la suma de vectores de $\mathbb{R}^n$. Es trivial comprobar que se satisfacen las condiciones de la definición 1.1.*

Teorema. 1.4 **TEOREMA DE THALES PARALELO:** *Sean $P, Q, R, S \in X$ cualesquiera. Se verifica que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ si y sólo si $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$. Este teorema es también conocido por el nombre de teorema de las partes de paralelas comprendidas entre paralelas.*

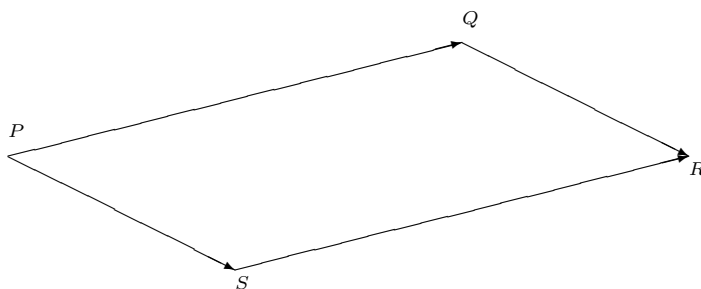


Figure 1: Teorema de Thales paralelo

2 Variedades lineales afines.

Definición. 2.1 Un subconjunto L de X se llamará una *variedad lineal afín* si, o bien $L = \emptyset$, o bien existe un punto $P \in L$ y un subespacio vectorial W de V tales que

$$L = P + W = \{P + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in W\}.$$

Proposición. 2.2 Sea $L = P + W$; se verifica: Si $R \in L$, entonces $L = R + W$.

Proposición. 2.3 Sea $L = P + W$. Si $W' \subset V$ es una variedad lineal y $L = P + W'$, entonces $W = W'$.

Lo anterior prueba que el subespacio W depende sólo de L , y se denotará, en lo sucesivo, por $D(L)$, llamándosele *variedad de dirección* de L . Se llamará *dimensión de una variedad lineal afín* a la de su variedad de dirección. Se convendrá que la dimensión del conjunto vacío es -1 . Nótese que los puntos son las variedades lineales afines de dimensión cero, y el espacio entero X es la única variedad lineal afín de dimensión máxima n . Se utilizarán los nombres clásicos de rectas para las variedades lineales afines de dimensión 1, planos para las de dimensión 2 e hiperplanos para las de dimensión $n - 1$.

Ejemplo. 2.4 ECUACIONES DE UNA VARIEDAD LINEAL AFÍN EN $\mathbb{R}^n$. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ se recuerda que los subespacios vectoriales vienen dados, en particular, por unas ecuaciones implícitas. Dicho de otra manera, un subespacio vectorial es el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}^n$ de un sistema de r ecuaciones *homogéneas* con n incógnitas, para cualquier entero r no negativo. Vamos a ver cómo las variedades lineales afines son, también, conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

Sea $L \neq \emptyset$ una variedad lineal afín en el espacio afín numérico $X = V = \mathbb{R}^n$, $P = (a_1, \dots, a_n) \in L$, y supongamos que $D(L)$ es el subespacio vectorial de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}y_1 & + & \dots & + & a_{1n}y_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}y_1 & + & \dots & + & a_{rn}y_n & = & 0. \end{array}$$

Entonces, un punto $Q = (x_1, \dots, x_n) \in L$ si y sólo si $\overrightarrow{PQ} \in D(L)$, o sea, si y sólo si

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}(x_1 - a_1) & + & \dots & + & a_{1n}(x_n - a_n) & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}(x_1 - a_1) & + & \dots & + & a_{rn}(x_n - a_n) & = & 0, \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & \dots & + & a_{rn}x_n & = & b_r, \end{array}$$

donde

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_j, \quad i = 1, \dots, r$$

Por tanto, los puntos de L son las soluciones de un sistema compatible de r ecuaciones con n incógnitas, que se llaman ecuaciones implícitas de L . Obsérvese que las ecuaciones implícitas de L se obtienen a partir de las de $D(L)$ modificando los términos independientes nulos por los b_i en la forma arriba indicada. Recíprocamente, las ecuaciones implícitas de $D(L)$ se obtienen de las de L haciendo cero los términos independientes. Esto prueba que, recíprocamente, todo conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es una variedad lineal afín. El conjunto vacío no es una excepción, pues es el conjunto de soluciones de un sistema incompatible.

Nota. 2.5 Las ecuaciones paramétricas de una variedad lineal afín L no vacía tienen tratamiento análogo a las de $D(L)$: si

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & \lambda_1 c_{11} & + & \dots & + & \lambda_s c_{s1} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_n & = & \lambda_1 c_{1n} & + & \dots & + & \lambda_s c_{sn} \end{array}$$

son las ecuaciones paramétricas de $D(L)$, entonces las de L son

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_1 & + & \lambda_1 c_{11} & + & \dots & + & \lambda_s c_{s1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & a_n & + & \lambda_1 c_{1n} & + & \dots & + & \lambda_s c_{sn}. \end{array}$$

Aprovechando los resultados del álgebra lineal, se ve que un hiperplano afín posee una única ecuación implícita independiente, mientras que una recta posee unas ecuaciones paramétricas con un solo parámetro. En general, una variedad lineal afín de dimensión s , $0 \leq s \leq n$ tiene $n - s$ ecuaciones implícitas independientes, y unas ecuaciones paramétricas con s parámetros.

Al conjunto de las variedades lineales afines de X lo denotaremos por $\mathcal{R}(X)$. Las operaciones de suma e intersección de subespacios vectoriales pueden trasladarse a las variedades lineales afines pero la situación es muy distinta: mientras que el vector cero es común a todos los subespacios vectoriales, no hay ningún punto común a todas las variedades lineales afines.

Proposición. 2.6 Sea $\{L_i\}_{i \in I}$ una familia de variedades lineales afines; se verifica que $\bigcap_{i \in I} L_i$ es una variedad lineal afín y, si esta intersección es no vacía, entonces

$$D\left(\bigcap_{i \in I} L_i\right) = \bigcap_{i \in I} D(L_i).$$

Definición. 2.7 Dado un subconjunto $E \subset X$, llamaremos variedad lineal afín engendrada por E , y la denotaremos por $L(E)$, a la menor variedad lineal afín (para el orden de la inclusión) que contiene a E . Dicho de otro modo, $L(E)$ es la intersección de todas las variedades lineales afines que contienen a E . La variedad de dirección de $L(E)$ tiene una expresión muy simple, a saber:

Proposición. 2.8 Si $E \subset X$ es un subconjunto no vacío, $P \in E$ cualquiera, entonces

$$D(L(E)) = \langle \overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in E \rangle$$

donde la notación del segundo miembro quiere decir mínimo subespacio vectorial de V que contiene al conjunto descrito.

Definición. 2.9 Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$; llamaremos suma de L_1 y L_2 , que escribiremos $L_1 + L_2$, a la variedad lineal afín $L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2)$. En otras palabras, $L_1 + L_2$ es la mínima variedad lineal afín que contiene a L_1 y a L_2 .

De forma análoga a 2.6 se tiene la

Proposición. 2.10 Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$ no vacías. Se verifica que

$$D(L_1 + L_2) = D(L_1) + D(L_2) + \overrightarrow{P_0 Q_0},$$

donde $P_0 \in L_1, Q_0 \in L_2$ son arbitrarios. En particular, si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, tomando $P_0 = Q_0 \in L_1 \cap L_2$ se obtiene que

$$D(L_1 + L_2) = D(L_1) + D(L_2).$$

Proposición. 2.11 Con las operaciones suma e intersección, el conjunto $\mathcal{R}(X)$ de las variedades lineales afines del espacio afín tiene las propiedades siguientes:

1. Asociativas: Para $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{R}(X)$, se verifica que

$$(a) (L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$$

$$(b) (L_1 \cap L_2) \cap L_3 = L_1 \cap (L_2 \cap L_3)$$

2. Idempotentes: Para toda $L \in \mathcal{R}(X)$ se verifica que:

$$(a) L + L = L$$

$$(b) L \cap L = L$$

3. Conmutativas: Para todas $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$, es

$$(a) L_1 + L_2 = L_2 + L_1$$

$$(b) L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1$$

4. Leyes de simplificación: Si $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$, es

$$(a) L_1 + (L_1 \cap L_2) = L_1$$

$$(b) L_1 \cap (L_1 + L_2) = L_1$$

Para completar esta sección estudiamos el paralelismo entre variedades lineales afines .

Definición. 2.12 Dos variedades lineales afines L_1, L_2 no vacías se llaman paralelas si existe una relación de inclusión entre sus variedades de dirección, i.e. si $D(L_1) \subset D(L_2)$ ó $D(L_1) \supset D(L_2)$. Se escribirá $L_1 \parallel L_2$ en este caso.

El teorema de la dimensión de las variedades lineales afines es mucho más complejo que el correspondiente vectorial, debido, en parte, al paralelismo.

Teorema. 2.13 Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{R}(X)$; se verifica:

1. Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, entonces

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

2. Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, entonces

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim[D(L_1) \cap D(L_2)].$$

Nota. 2.14 Si $L_1 \parallel L_2$ y no son disjuntas, hay una relación de inclusión entre ellas, y el punto primero del teorema anterior es, entonces, una trivialidad.

Si $L_1 \parallel L_2$ y son disjuntas, el ‘término corrector’ del punto 2 del teorema (es decir, el tercer sumando del segundo miembro) no es nulo, salvo el caso trivial en que una de las dos sea un punto. Así, la fórmula de la dimensión (entendida ésta como la del punto 1), no se verifica.

Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $D(L_1) \cap D(L_2) = \{0\}$, se verifica la fórmula de la dimensión (i.e. el término corrector es cero), y se dice que L_1, L_2 se cruzan.

Nota. 2.15 Se pueden utilizar los resultados anteriores para hallar posiciones relativas de variedades lineales afines. Estudiamos unos cuantos casos a continuación.

Sean H un hiperplano y L una variedad lineal afín no vacía de dimensión s en un espacio afín de dimensión n ($s \leq n$). Si $H \cap L = \emptyset$, la segunda fórmula de 2.13 nos dice que $n - 1 = n - 1 + s - \dim[D(H) \cap D(L)]$, luego esta dimensión vale s , y así $H \parallel L$. Si H no contiene a L y $H \cap L \neq \emptyset$, la primera fórmula de 2.13 nos dice que $n + \dim(H \cap L) = n - 1 + s$, luego $\dim(H \cap L) = s - 1$. Así, H y L o bien son paralelos y disjuntos, o bien $L \subset H$, o bien se cortan en una variedad de dimensión $s - 1$.

Sean L_1, L_2 dos rectas distintas. Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, esta intersección es un punto (las rectas se dicen secantes) y, por la primera fórmula de 2.13, $\dim(L_1 + L_2) = 2$, luego ambas rectas son coplanarias (están en un mismo plano). Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y no son paralelas, es $D(L_1) \cap D(L_2) = \{0\}$, la segunda fórmula de 2.13 nos dice que $\dim(L_1 + L_2) = 3$ y ambas rectas se cruzan. Así, dos rectas, o coinciden, o son secantes, o son paralelas disjuntas, o se cruzan (en este caso la mínima variedad lineal afín que contiene a ambas tiene dimensión 3).

Para que dos variedades lineales afines de un espacio de dimensión n se crucen tienen que sumar sus dimensiones a lo sumo $n - 1$.

3 Dependencia lineal afín.

En toda esta sección fijaremos un espacio afín $(X, V, +)$ de dimensión n sobre $\mathbb{R}$.

Definición. 3.1 Sea $E \subset X$ un subconjunto no vacío. Se dirá que un punto $P \in X$ depende afínmente de E si $P \in L(E)$. Se dirá que E es afínmente dependiente si existe un punto $P \in E$ tal que P depende afínmente de $E \setminus \{P\}$. En este caso, se dirá también que los puntos de E son afínmente dependientes. En caso contrario diremos que E es afínmente independiente, o que sus puntos son afínmente independientes.

En los resultados que vienen a continuación, se expresará la dependencia lineal afín en términos vectoriales, lo que permitirá un tratamiento analítico de ella.

Un resultado crucial es el siguiente

Teorema. 3.2 Sea $E = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ un conjunto de puntos distintos; las condiciones siguientes son equivalentes:

1. E es afínmente dependiente.
2. Existe un índice i , $0 \leq i \leq m$ tal que

$$\{\overrightarrow{P_i P_0}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_m}\}$$

es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

3. Para todo $i = 0, 1, \dots, m$, los vectores

$$\{\overrightarrow{P_i P_0}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_m}\}$$

son linealmente dependientes.

Ejemplo. 3.3 En el espacio afín numérico $\mathbb{R}^n$ se consideran el conjunto $E = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ con $P_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 0, 1, \dots, m$ y el punto $P = (b_1, \dots, b_n)$. Por el teorema anterior E es afínmente dependiente si y sólo si

$$\text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} - a_{01} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - a_{01} & \dots & a_{mn} - a_{0n} \end{pmatrix} < m,$$

o sea, si y sólo si

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ 1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} < m + 1$$

4 Sistema de Referencia. Coordenadas de un punto.

Nota. 4.1 Sea $E = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ y $L = L(E)$. Fijemos un índice i , $0 \leq i \leq m$, digamos $i = 0$ y, de entre los generadores

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$$

de $D(L)$, elijamos una base, digamos

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\}.$$

Entonces, poniendo $E' = \{P_0, P_1, \dots, P_r\}$, tenemos que E' es un conjunto afínmente independiente y, como

$$D(L(E)) = \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_m} \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r} \rangle = D(L(E')),$$

comprobamos que cualquier variedad lineal afín puede ser generada por puntos afínmente independientes.

Cuando una variedad lineal afín L está generada por puntos afínmente independientes, el número de éstos es constante, igual a $1 + \dim(L)$.

Definición. 4.2 Sea L una variedad lineal afín de dimensión s ; una $(s+1)$ -upla de L^{s+1} formada por puntos afínmente independientes se llamará un sistema de referencia afín en L . Un sistema de referencia afín simplemente, significará un sistema de referencia afín en el espacio. El primer punto de un sistema de referencia afín será llamado el origen del sistema.

Nota. 4.3 Incidentalmente, un sistema de referencia afín (digamos en el espacio) será denotado en la forma

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\},$$

pero deberá tenerse muy en cuenta que se trata de una $(n+1)$ -upla ordenada.

Si $L_1 \subset L_2$ son dos variedades lineales afines, todo sistema de referencia afín en L_1 se puede ampliar hasta uno de L_2 . En efecto, tomando un sistema de referencia afín

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_s\}$$

en L_1 , se tiene que $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_s}\}$ es una base de $D(L_1)$, que se puede ampliar a una base

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_s}, \overrightarrow{P_0P_{s+1}}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\}$$

de $D(L_2)$, y así $\{P_0, P_1, \dots, P_r\}$ es un sistema de referencia afín en L_2 .

Fijado un sistema de referencia afín, digamos en el espacio,

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\},$$

se pueden asignar coordenadas cartesianas a los puntos de X , y ecuaciones (paramétricas e implícitas) a las variedades lineales afines de X , de modo similar a como se hace en algebra lineal al asignar coordenadas a un vector, una vez fijada una base. En este caso, la asignación se hace de la forma siguiente: a cada punto $P \in X$ se le asocian las coordenadas del vector $\overrightarrow{P_0P}$ en la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$.

Usualmente se escribirá

$$P = (x_1, \dots, x_n)$$

para las coordenadas cartesianas de un punto genérico de X . Si

$$P = (x_1, \dots, x_n), \quad Q = (y_1, \dots, y_n),$$

$$\text{es } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0P} = (y_1 - x_1)\overrightarrow{P_0P_1} + \dots (y_n - x_n)\overrightarrow{P_0P_n}.$$

Se establece así una aplicación biyectiva

$$\mathbf{F}_{\mathcal{R}} : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada punto asigna sus coordenadas cartesianas, y que es la composición de $((+)_{P_0})^{-1}$ con la biyección de V sobre $\mathbb{R}^n$ que asocia coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ a cada vector de V . Es muy fácil ver que $\mathbf{F}_{\mathcal{R}}$ conserva la dependencia lineal afín, y que lleva variedades lineales afines de X en variedades lineales afines de $\mathbb{R}^n$. Así, las distintas formas de ecuaciones de variedades lineales afines de $\mathbb{R}^n$ (véase 2.4) pueden ser interpretadas como ecuaciones de variedades lineales afines de X , respecto de un sistema de referencia.

El tratamiento de coordenadas cartesianas y ecuaciones de variedades lineales afines dentro de una variedad lineal afín de X es análogo.

Sean

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}, \quad \mathcal{R}' = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_n\}$$

dos sistemas de referencia afines donde $P'_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, coordenadas respecto de $\mathcal{R}$. Sea $P \in X$, $P = (x_1, \dots, x_n)$, coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ y $P = (x'_1, \dots, x'_n)$, coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$. Se tiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P'_0P} &= \overrightarrow{P'_0P_0} + \overrightarrow{P_0P} = -\overrightarrow{P_0P'_0} + \overrightarrow{P_0P} = \\ &= (-a_{01}\overrightarrow{P_0P_1} - \dots - a_{0n}\overrightarrow{P_0P_n}) + (x_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + x_n\overrightarrow{P_0P_n}) = \\ &= (x_1 - a_{01})\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + (x_n - a_{0n})\overrightarrow{P_0P_n} = \\ &= x'_1[(a_{11} - a_{01})\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + (a_{1n} - a_{0n})\overrightarrow{P_0P_n}] + \dots \\ &= x'_n[(a_{n1} - a_{01})\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + (a_{nn} - a_{0n})\overrightarrow{P_0P_n}] = \\ &= [(a_{11} - a_{01})x'_1 + \dots + (a_{n1} - a_{01})x'_n]\overrightarrow{P_0P_1} + \dots \\ &= [(a_{1n} - a_{0n})x'_1 + \dots + (a_{nn} - a_{0n})x'_n]\overrightarrow{P_0P_n}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{01} & a_{11} - a_{01} & \dots & a_{n1} - a_{01} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} - a_{0n} & \dots & a_{nn} - a_{0n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Por abuso de lenguaje, se dirá a veces que un sistema de referencia consta de un origen, P_0 , y una n -upla de vectores linealmente independientes $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. En este caso, se pondrá $P_i = P_0 + \mathbf{u}_i$, y todo funcionará como se acaba de indicar.