

Tema 4: Estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$.

1 Definiciones y propiedades

Definición. 1.1 Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las n -tuplas de números reales, es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \}.$$

Notaremos los elementos de $\mathbb{R}^n$ por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, etc. y los denominaremos vectores. Además dado $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, para cada $i = 1, \dots, n$, el número a_i se denominará componente i -ésima de $\mathbf{a}$.

Nota. 1.2 Observemos que dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_i = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

En particular, identificaremos cada vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, con una matriz columna (de orden $n \times 1$).

Definición. 1.3 Dados $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos la suma de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como el vector

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Es fácil comprobar que la suma tiene las siguientes propiedades:

Proposición. 1.4 Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ se verifica:

a) Propiedad asociativa:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

b) Prop. conmutativa:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

c) Elemento neutro: existe $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

d) Elemento opuesto: dado $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ existe $-\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Definición. 1.5 Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ definimos:

$$\alpha \mathbf{a} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

De nuevo resulta fácil establecer las siguientes propiedades:

Proposición. 1.6 Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, se verifica:

$$1. (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$$

$$2. \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

$$3. \alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$$

$$4. 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Se dice que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Proposición. 1.7 Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, se verifica:

1. $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$
2. $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$
3. $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ ó } \mathbf{a} = \mathbf{0})$
4. $\alpha\mathbf{a} = \beta\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$
5. $\alpha\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ y $\alpha \neq 0 \implies \mathbf{a} = \mathbf{b}$
6. $\alpha(-\mathbf{a}) = -(\alpha\mathbf{a}) = (-\alpha)\mathbf{a}$

2 Dependencia lineal

Definición. 2.1 Dados $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ una combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ es un vector del tipo:

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{a}_r$$

para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

Definición. 2.2 Diremos que $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si el vector $\mathbf{0}$ puede expresarse como una combinación lineal, no trivial, de ellos, es decir, si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}.$$

Diremos que $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, si

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0.$$

Proposición. 2.3 Los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Proposición. 2.4 Sean $H, H' \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos finitos. Se verifica:

- i) Si $\mathbf{0} \in H$ entonces H es linealmente dependiente.
- ii) Si H es lin. dep. y $H \subseteq H'$ entonces H' es lin. dep.
- iii) Si H es lin. indep. y $H' \subseteq H$ entonces H' es lin. indep.

Obviamente el hecho de que un conjunto de vectores sea linealmente dependiente, o independiente, no depende del orden de dichos vectores. Además tenemos las siguientes propiedades, que nos permitirán desarrollar un método para estudiar la dependencia lineal de un conjunto finito de vectores:

Proposición. 2.5 Sea $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Se verifica:

- a) Fijado $i = 1, \dots, r$ si $H' = \{\mathbf{a}_1, \dots, \alpha\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r\}$, entonces

$$H \text{ es l. d. (o l. i.)} \iff H' \text{ es l. d. (o l. i.).}$$

b) Fijados $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$ si

$$H'' = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i + \alpha \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_r\},$$

entonces

$$H \text{ es l. d. (o l. i.)} \iff H'' \text{ es l. d. (o l. i.).}$$

Definición. 2.6 Diremos que $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es escalonado si la matriz cuyas filas son $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ es escalonada por filas.

Proposición. 2.7 Si $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es escalonado y todos los vectores son distintos de $\mathbf{0}$, entonces los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ son linealmente independientes.

Utilizando estos dos resultados, a la hora de determinar la dependencia, o independencia, lineal de un conjunto finito de vectores, podemos razonar como sigue:

Sea $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ la matriz que tiene como filas los vectores de H . Sabemos que A es equivalente por filas a una matriz escalonada E .

Podemos asegurar entonces que:

- i) H es l. i. si y sólo si los vectores formados por las filas de E son l. i.
- ii) Las filas de E son l. i. si y sólo si ninguna de ellas es nula.

3 Variedades lineales. Bases

Definición. 3.1 Dado $L \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que L es una variedad lineal (o subespacio vectorial) de $\mathbb{R}^n$ si $L \neq \emptyset$ y verifica:

- 1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} \in L.$
- 2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \mathbf{x} \in L.$

Lema. 3.2 Dada una variedad L de $\mathbb{R}^n$, se verifica:

- 1) $\mathbf{0} \in L.$
- 2) $\forall \mathbf{x} \in L, \quad -\mathbf{x} \in L.$
- 3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L.$
- 4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \quad \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in L.$

Definición. 3.3 Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la variedad lineal generada por H , como

$$L(H) = \{ \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{a}_r : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in H, r \in \mathbb{N} \},$$

es decir, $L(H)$ es el conjunto formado por todas las posibles combinaciones lineales de elementos de H . Por definición, si $H = \emptyset$ entonces $L(H) = \{\mathbf{0}\}$.

Lema. 3.4 Dado $H \subseteq \mathbb{R}^n$, $L(H)$ es la menor variedad lineal que contiene a H .

Proposición. 3.5 1. $L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_r\}) = L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r\})$

- 2. Sea $\alpha \neq 0$, entonces $L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r\}) = L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \alpha \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r\})$

3. Sea $\alpha \in R$ e $i \neq j$, entonces $L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_r\}) = L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \alpha \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_r\})$
4. $L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}) = L(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{a}_i\})$

Proposición. 3.6 Sean $H, F \subseteq \mathbb{R}^n$. Se verifica:

- 1) $H \subseteq L(H)$.
- 2) Si $H \subseteq F$ entonces $L(H) \subseteq L(F)$.
- 3) $L(L(H)) = L(H)$.

Definición. 3.7 Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $H \subseteq W$ tal que $L(H) = W$. Diremos entonces que H genera W , o que H es un conjunto de generadores de W .

Definición. 3.8 (base)

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \subseteq W$. Diremos que $\mathcal{B}$ es una base de W si:

- 1) $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.
- 2) $L(\mathcal{B}) = W$.

Ejemplo.- Una base de $\mathbb{R}^m$ es $(1, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$.

En todo lo que sigue V será una variedad lineal de $\mathbb{R}^m$, distinta de la variedad lineal $\{\mathbf{0}\}$.

Lema. 3.9 Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ linealmente independientes y $\mathbf{v} \in V$. Se verifica una de las dos posibilidades:

1. $\mathbf{v} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ son linealmente dependientes.
2. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ son linealmente independientes.

Lema. 3.10 Sean $A \subseteq S \subseteq V$ subconjuntos finitos de V con A linealmente independiente y S generador de V . Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V , tal que $A \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.

Lema. 3.11 1. Todo conjunto finito de generadores de V contiene una base de V .
2. Todo subconjunto finito de V linealmente independiente puede ser ampliado a una base de V .

Lema. 3.12 (del intercambio) Sea $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r \in V$ vectores linealmente independientes tales que $\mathbf{x} \in L(\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\})$, entonces, existe un $i: 1 \leq i \leq r$, tal que

- 1) $\mathbf{b}_i \in L(\{\mathbf{b}_1, \dots, \overset{(i)}{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{b}_r\})$, y por tanto $L(\{\mathbf{b}_1, \dots, \overset{(i)}{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{b}_r\}) = L(\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\})$.
- 2) $\{\mathbf{b}_1, \dots, \overset{(i)}{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{b}_r\}$ es linealmente independiente.

Proposición. 3.13 Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ una base de V . Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subseteq V$ son linealmente independientes, entonces $m \geq r$. Además, si $m = r$ entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es una base de V .

Corolario. 3.14 Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ una base de V . Se verifica:

- a) Todas las bases de V tienen m elementos.
- b) Todo subconjunto de V linealmente independiente con m elementos es una base de V .

- c) Todo conjunto con más de m vectores es linealmente dependiente.
- d) Todo sistema de generadores tiene al menos m elementos y si tiene m es una base.

Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vectores linealmente independientes de V . Se dice que forman un conjunto máximo de vectores de V linealmente independientes, si, dado cualquier elemento $\mathbf{w} \in V$, los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}$ son linealmente dependientes.

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de V se dice generador mínimo de V , si todo subconjunto propio de S no es generador.

Proposición. 3.15 a) Si S es un conjunto máximo de vectores linealmente independientes de V , entonces S es una base de V .

b) Si S es un conjunto de vectores de V generador mínimo, entonces S es una base de V .

Teorema. 3.16 Toda variedad lineal de $\mathbb{R}^n$, no trivial, es decir, distinta de $\{\mathbf{0}\}$, posee una base con $m \leq n$ elementos.

Dado que todas las bases de una variedad lineal tienen el mismo número de elementos podemos dar la siguiente

Definición. 3.17 Dada una variedad lineal $W \subseteq \mathbb{R}^n$ llamaremos dimensión de W , $\dim(W)$, al número de elementos de una base de W . Por definición, $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Lema. 3.18 Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ una base de W . Entonces, dado $\mathbf{v} \in W$, existen unos únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}^m$ tales que

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i.$$

Definición. 3.19 Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ una base de W . Dado $\mathbf{v} \in W$ llamaremos coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto de $\mathcal{B}$ al único elemento $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i.$$

Proposición. 3.20 Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ una base de W . Se verifica:

- 1) $\mathbf{0}_{\mathcal{B}} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$.
- 2) $\forall \mathbf{v} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha \mathbf{v})_{\mathcal{B}} = \alpha \mathbf{v}_{\mathcal{B}}$.
- 3) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W, (\mathbf{v} + \mathbf{w})_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}_{\mathcal{B}} + \mathbf{w}_{\mathcal{B}}$.
- 4) Si $A = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subseteq W$ y $A' = \{\mathbf{v}_{1\mathcal{B}}, \dots, \mathbf{v}_{r\mathcal{B}}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ entonces

$$A \text{ es l. d. (resp. l. i.)} \iff A' \text{ es l. d. (resp. l. i.).}$$

4 Cambio de base

Sea $L \subseteq \mathbb{R}^n$ una v. l. y $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ dos bases de L . Entonces, dado $\mathbf{x} \in L$ existen $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{B}_2} = (\beta_1, \dots, \beta_m).$$

Sin embargo, ¿qué relación existe entre $\mathbf{x}_{\mathcal{B}_1}$ y $\mathbf{x}_{\mathcal{B}_2}$? Para resolver esta cuestión, expresamos los vectores de una de las bases, por ejemplo $\mathcal{B}_2$, como combinación lineal de los vectores de la otra base, $\mathcal{B}_1$, de este modo, para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^m p_{ij} \mathbf{u}_i, \text{ es decir, } (\mathbf{v}_j)_{\mathcal{B}_1} = (p_{1j}, \dots, p_{mj}).$$

Sea $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_m$ la matriz que se obtiene colocando por columnas las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_2$ respecto de $\mathcal{B}_1$, esto es,

$$P = [(\mathbf{v}_1)_{\mathcal{B}_1} | (\mathbf{v}_2)_{\mathcal{B}_1} | \dots | (\mathbf{v}_m)_{\mathcal{B}_1}].$$

Entonces, dado $\mathbf{x} \in L$, si $\mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y $\mathbf{x}_{\mathcal{B}_2} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ tendremos

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^m p_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \beta_j p_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m p_{ij} \beta_j \right) \mathbf{u}_i$$

Puesto que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas resulta

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} \beta_j.$$

Matricialmente,

$$\forall \mathbf{x} \in L, \quad \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = P \mathbf{x}_{\mathcal{B}_2}.$$

5 Rango

Definición. 5.1 Dado $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$, llamamos rango de H , $\text{rang}(H)$, al número máximo de vectores linealmente independientes contenidos en H .

Proposición. 5.2 Dado $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $r(H) = \dim L(H)$.

Proposición. 5.3 1. Sea $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r\}$, $H' = \{\mathbf{a}_1, \dots, \alpha \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r\}$, siendo $\alpha \neq 0$, entonces $r(H) = r(H')$.

2. Sea $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r\}$, $H' = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \alpha \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_r\}$, siendo $i \neq j$ entonces $r(H) = r(H')$.

Definición. 5.4 Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ definimos:

- El espacio fila de A , $F(A)$, es la variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ generada por las filas de A . $F(A) = \{\mathbf{x}^t A : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$ o bien escritos por columnas como $F(A) = \{A^t \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$.
- El espacio columna de A es la v. l. de $\mathbb{R}^m$, generada por las columnas de A . $C(A) = \{A \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

Definición. 5.5 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

- a) Definimos el rango por filas de A como el rango del subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por las filas de A , consideradas como vectores de $\mathbb{R}^n$, es decir $r_f(A) = \dim(F(A))$.
- b) Definimos el rango por columnas de A como el rango del subconjunto de $\mathbb{R}^m$ formado por las columnas de A , consideradas como vectores de $\mathbb{R}^m$, es decir $r_c(A) = \dim(C(A))$.

Definición. 5.6 Llamaremos menor de una matriz A al determinante de cualquiera de sus submatrices cuadradas.

Definición. 5.7 Definimos el rango por menores de una matriz como el mayor de los órdenes de sus menores no nulos y lo denotaremos por $r_m(A)$.

Proposición. 5.8 Si un menor de orden $r \neq 0$ de A es distinto de 0, y todos los menores de orden $r + 1$ de A son 0, entonces $r_m(A) = r$:

Proposición. 5.9 1. Si B es equivalente por filas a A , entonces $F(B) = F(A)$ y por tanto $r_f(B) = r_f(A)$. Si B es escalonada por filas, $r_f(B) =$ número de filas no nulas de B .

2. Si B es equivalente por columnas a A , entonces $C(B) = C(A)$ y por tanto $r_c(B) = r_c(A)$. Si B es escalonada por columnas, $r_c(B) =$ número de columnas no nulas de B .

Proposición. 5.10 Si se hace una transformación elemental (por filas o columnas) en A obteniendo B , entonces $r_m(B) = r_m(A)$.

Proposición. 5.11 Si A es escalonada por filas (columnas), entonces $r_m(A) =$ número de filas (columnas) no nulas de A .

Proposición. 5.12 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Entonces $r_f(A) = r_m(A)$.

Proposición. 5.13 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Entonces $r_c(A) = r_m(A)$.

Teorema. 5.14 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Entonces $r_f(A) = r_m(A) = r_c(A)$.

Definición. 5.15 Se define el rango de una matriz A , como su rango por filas, o su rango por columnas o su rango por menores. Dicho número se denotará por $r(A)$.

Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ sabemos que existen matrices regulares $P \in \mathcal{M}_m$ y $Q \in \mathcal{M}_n$ tales que

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix}$$

Podemos asegurar entonces: $r(A) = r$.

Teorema. 5.16 Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$. A y B son equivalentes $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

Proposición. 5.17 Se tienen las siguientes propiedades:

- a) Si $A \in \mathcal{M}_n$, entonces

$$A \text{ es regular} \iff r(A) = n.$$

- b) Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, si $P \in \mathcal{M}_m$ y $Q \in \mathcal{M}_n$ son regulares, entonces

$$r(PAQ) = r(A).$$

c) Para toda $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $r(A) = r(A^t)$.

d) Si $A \in \mathcal{M}_{m \times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p \times n}$, entonces

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B)).$$

Proposición. 5.18 Si en una matriz A un menor de orden r es distinto de cero y los orlados con la fila p y restantes columnas son cero, entonces la fila p es combinación lineal de las filas que entran en el menor.