Tema 3: Determinantes

1 Definición de determinante: Propiedades

Históricamente la teoría de los determinantes precedió a la teoría de matrices, y muchos resultados familiares de la teoría de matrices fueron originalmente formulados en términos de determinantes. Hoy día, la teoría de determinantes no juega un papel central en el álgebra lineal, pero hay ciertos aspectos en los que los determinantes ofrecen una interpretación más natural, o una prueba más sencilla de algunos resultados. Por ello, el interés de los determinantes, sobre todo para matrices de orden elevado, es, fundamentalmente, teórico.

Notación : 1.1 *A lo largo de todo este tema sólo consideraremos matrices cuadradas y, como ya se hizo en el tema anterior, dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escribiremos:*

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array}\right]$$

para indicar que las columnas de A son $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (en ese orden).

Definición. 1.2 Llamaremos **función determinante** a una aplicación:

$$det : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$$

que a cada matriz cuadrada de orden n le asocia un escalar, que denotamos por $det(A)$ (y en algunos textos por $|A|$), de tal modo que se verifican las siguientes propiedades:

1) **Multilinealidad:**

   a) Dados $A = [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n] \in \mathcal{M}_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ si tenemos, para algún i $(1 \leq i \leq n)$,

   $$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \alpha\mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n$$

   entonces,

   $$det(B) = \alpha det(A).$$

   b) Si $A = [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_i|\cdots|\mathbf{a}_n] \in \mathcal{M}_n$, siendo $\mathbf{a}_i = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, para cierto i $(1 \leq i \leq n)$, se tiene:

   $$\begin{aligned} det(A) &= det([\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\overbrace{\ \mathbf{b}\ }^{i)}|\cdots|\mathbf{a}_n])+ \\ &\quad +det([\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\underbrace{\ \mathbf{c}\ }_{i)}|\cdots|\mathbf{a}_n]) \end{aligned}$$

2) **Antisimetría:**

   Si una matriz B, se obtiene a partir de otra matriz A, intercambiando entre si dos columnas distintas, entonces

   $$det(B) = -det(A).$$

3) **Normalidad:**

   Si I_n es la matriz identidad de orden n, entonces:

   $$det(I_n) = 1.$$

Puede demostrarse que, para cada n, sólo existe una función que satisface las propiedades de la definición. De este modo, dada $A \in \mathcal{M}_n$, el valor $det(A)$ está definido de manera única y lo llamaremos el determinante de A. De hecho, a partir de las tres propiedades básicas del determinante podemos calcular los determinantes de las matrices elementales y probar nuevas propiedades.

Proposición. 1.3 Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se verifica:

a) Si A tiene una columna de ceros, entonces $det(A) = 0$.

b) Si A tiene dos columnas iguales, entonces $det(A) = 0$.

c) Si A tiene dos columnas proporcionales, entonces $det(A) = 0$.

d) Si B es una matriz que se obtiene a partir de A sumándole a una columna un múltiplo de otra, entonces $det(A) = det(B)$.

Las propiedades a), b), c) de esta última proposición pueden generalizarse de la siguiente manera:

Definición. 1.4 Decimos que la columna i-ésima de la matriz

$$A = [\mathbf{a}_1 | \cdots | \mathbf{a}_i | \cdots | \mathbf{a}_n] \in \mathcal{M}_n$$

es combinación lineal de las demás, si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \mathbf{a}_j.$$

Proposición. 1.5 Dada $A \in \mathcal{M}_n$, si una columna de A es combinación lineal de las demás, entonces $det(A) = 0$.

Proposición. 1.6 Dados i y j, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, se verifica:

1) $det(Q_{ij}) = -1$.

2) $det(C_i(\alpha)) = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) $det(C_{ij}(\alpha)) = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

El siguiente resultado, que admitiremos sin demostración, tendrá importantes consecuencias.

Teorema. 1.7 Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$, se verifica:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Utilizando este resultado podemos probar que el determinante de cualquier matriz es igual al de su traspuesta. Para ello necesitamos algunos resultados previos:

Lema. 1.8 Sean i, j: $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ e $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se verifica:

1) $det(Q_{ij}^t) = det(Q_{ij}) = -1$.

2) $det(C_i(\alpha)^t) = det(C_i(\alpha)) = \alpha$.

3) $det(C_{ij}(\alpha)^t) = det(C_{ij}(\alpha)) = 1$.

Nota. 1.9 *Dado que se tiene $P_{ij} = Q_{ij}^t$, $F_i(\alpha) = C_i(\alpha)^t$ y $F_{ij}(\alpha) = C_{ij}(\alpha)^t$, el anterior lema nos permite concluir:*

$$\begin{array}{l} det(P_{ij}) = det(P_{ij}^t) = -1 \\ det(F_i(\alpha)) = \alpha = det(F_i(\alpha)^t) \text{ ya que } F_i(\alpha) = C_i(\alpha) \\ det(F_{ij}(\alpha)) = det(F_{ij}(\alpha)^t) = 1 \text{ ya que } F_{ij}(\alpha) = C_{ij}(\alpha)^t \end{array}$$

Teorema. 1.10 Dada $A \in \mathcal{M}_n$, se verifica:

$$det(A) = det(A^t).$$

Nota. 1.11 *Gracias a este último teorema* **todas las propiedades anteriores son válidas cambiando en su enunciado columnas por filas**.

2 Cálculo de determinantes: desarrollo por los elementos de una línea

A continuación veremos como calcular, de manera efectiva, el determinante de una matriz.

Si el orden de la matriz es bajo, por ejemplo para matrices de orden 2 o 3, podemos obtener expresiones explícitas, bastante simples, para su determinante. En concreto, tenemos los siguientes resultados:

1) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$, entonces

$$det(A) = det(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2) Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3$, entonces

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{aligned}$$

Esta identidad se conoce como Regla de Sarrus.

Es posible obtener expresiones similares a éstas para matrices de orden arbitrario, sin embargo, para $n \geq 4$ las expresiones obtenidas son demasiado complicadas para ser utilizadas en la práctica. Por consiguiente, será necesario un método más práctico para calcular el determinante de una matriz de orden elevado.

Definición. 2.1 Si $A \in \mathcal{M}_n$, denotaremos por $A(i|j)$ la submatriz de A que se obtiene suprimiendo la fila i y la columna j. $A(i|j)$ es, por tanto, cuadrada de orden $n-1$.

El número $det(A(i|j))$ se denomina menor complementario del elemento a_{ij} de A y se suele denotar por M_{ij}.

Llamaremos adjunto (o cofactor) del elemento a_{ij} de A, al número

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} det(A(i|j)).$$

Definición. 2.2 Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ y, para cada i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ A_{ij} es el adjunto de a_{ij}, la matriz

$$adj(A) = (A_{ij})^t,$$

se llama matriz adjunta de A.

El resultado central de esta sección es el siguiente, que admitiremos sin demostración:

Teorema. 2.3 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$. Se verifica:

1) $\forall i = 1, \ldots, n, \quad det(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$

2) $\forall j = 1, \ldots, n, \quad det(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$

En el caso 1) decimos que $det(A)$ ha sido calculado desarrollándolo por los adjuntos de la fila i-ésima y, en el caso 2), $det(A)$ ha sido calculado desarrollándolo por los adjuntos de la j-ésima columna.

Nota. 2.4 *Si tomamos una fila, la k-ésima, con $k \neq i$, y calculamos*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$$

es decir, los adjuntos de la fila k por los elementos correspondientes de otra fila (la i-ésima en este caso), lo que obtenemos es el determinante de la matriz B que resulta de sustituir la fila k por la fila i. De este modo B tiene dos filas iguales y su determinante es cero. Y lo mismo sucede por columnas.

En resumen, la situación es la siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} det(A) & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases} \qquad (1 \leq i, k \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} det(A) & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases} \qquad (1 \leq j, k \leq n)$$

El último teorema, junto con las propiedades enunciadas en la sección anterior, nos facilitan el cálculo efectivo de un determinante cuando el orden de la matriz es elevado. Gracias a él tenemos:

Corolario. 2.5 El determinante de una matriz triangular superior (o inferior) es igual al producto de los elementos de su diagonal. En particular, el determinante de una matriz diagonal $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ es

$$det(D) = d_1 d_2 \ldots d_n.$$

Nota. 2.6 *Dado que calcular el determinante de una matriz triangular es extraordinariamente simple, un método muy empleado en la práctica, a la hora de calcular el determinante de una matriz cualquiera, es aplicar a dicha matriz transformaciones elementales que no cambien el valor de su determinante, salvo quizá en el signo, hasta llevarla a una forma triangular superior para la cual resulta fácil calcularlo.*

3 Matrices regulares

Una de las principales aplicaciones de los determinantes es la de proporcionar un criterio, formalmente muy simple, para determinar si un matriz cuadrada es regular o no. Además, proporciona una expresión bastante sencilla de la inversa de una matriz regular.

Teorema. 3.1 Una matriz cuadrada A es regular si y sólo si $det(A) \neq 0$. En concreto, se verifica:

$$A(adj(A)) = adj(A)A = (det(A))I.$$

Por tanto, si $det(A) \neq 0$, tendremos

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

Para terminar añadimos un resultado que nos será util en los temas siguientes:

Teorema. 3.2 Una matriz cuadrada, triangular inferior (superior) con diagonal unidad, es regular y su matriz inversa es una matriz del mismo tipo.