Tema 2: Matrices

1 Definiciones generales

Definición. 1.1 Dados $m, n \in \mathbb{N}$, una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes reales es una ordenación rectangular de $m \times n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas.

Dada una matriz, A, de orden $m \times n$ con coeficientes reales, para cada par de números naturales, $i,\ j,\ 1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, representaremos el elemento de A situado en la fila i y la columna j, por a_{ij}. De este modo, la notación habitual para representar matrices será disponer sus elementos por filas y columnas en un rectángulo, de forma que el elemento a_{ij} se encuentre en la fila i y en la columna j. Así tendremos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El conjunto formado por todas las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes reales, lo denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Definición. 1.2 Diremos que dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si son del mismo orden y además

$$\forall i, j :\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n, \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

Definición. 1.3 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

1) Llamaremos diagonal de la matriz A a la sucesión formada por los elementos de A cuyos índices coinciden, es decir:

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}, \qquad \text{siendo } p = \min(m, n).$$

2) Una submatriz de A es una matriz que puede obtenerse a partir de A suprimiendo ciertas filas y columnas.

3) Una caja, o bloque, de la matriz A es una submatriz de A en la cual los índices de sus filas y columnas son consecutivos.

Definición. 1.4 (Tipos de matrices)

1) Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se denomina cuadrada si tiene igual número de filas que de columnas, es decir, $m = n$. El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n (es decir, $n \times n$) se denotará por $\mathcal{M}_n$.

2) Una matriz $A = (a_{ij})$, se llama triangular superior si todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos, esto es:

$$\forall i, j :\ i > j, \quad a_{ij} = 0.$$

Análogamente, diremos que A es triangular inferior si

$$\forall i, j :\ i < j, \quad a_{ij} = 0.$$

3) Una matriz $D = (d_{ij})$ se llama diagonal si es cuadrada y

$$\forall i, j : \; i \neq j, \quad d_{ij} = 0.$$

En otras palabras, si todos los elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal son nulos.

4) Una matriz escalar es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales.

5) Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ se llama simétrica si

$$\forall i, j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

es decir, la fila i-ésima es igual que la columna i-ésima.

6) Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ se llama antisimétrica si

$$\forall i, j, \quad a_{ij} = -a_{ji}.$$

En particular, $a_{ii} = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

2 Operaciones con matrices

Definición. 2.1 Dadas las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_{m\times n}$, llamamos matriz suma de A y B a la matriz

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

De este modo, dadas dos matrices A y B, **del mismo orden**, podemos calcular de manera natural su suma, que será, de nuevo, una matriz del mismo orden que A y B.

Proposición. 2.2 Sean A, B y C matrices de $\mathcal{M}_{m\times n}$. Se verifica:

1) **Propiedad asociativa**: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2) **Propiedad conmutativa**: $A + B = B + A$.

3) **Elemento Neutro**: Existe una única matriz $\Theta = (\theta_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $\theta_{ij} = 0$ para todo i, j, que llamaremos matriz nula y verifica:

$$\forall M \in \mathcal{M}_{m\times n}, \quad M + \Theta = \Theta + M = M.$$

4) **Elemento opuesto**: Para cualquier matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, existe una única matriz $-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, que llamaremos opuesta de A, tal que

$$A + (-A) = (-A) + A = \Theta.$$

Definición. 2.3 Dados $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, llamamos producto de A por el escalar α, y lo denotaremos por αA, a la matriz

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n},$$

es decir, los elementos de de αA son los de A multiplicados por α.

Proposición. 2.4 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

4) $1A = A$ y $0A = \Theta$.

A continuación definiremos el producto de matrices. A diferencia de la suma, la definición usual del producto no es la natural y exige una cierta adecuación entre los órdenes de las matrices que multiplicamos.

Definición. 2.5 Dadas las matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$, definimos el producto de A y B como la matriz $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, que denotamos por AB y cuyos elementos se obtienen de la siguiente forma:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Nota. 2.6 □

a) Dadas dos matrices A y B, para que podamos obtener el producto AB es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

b) Si $F = (f_{ij}) \in \mathcal{M}_{1\times p}$ y $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p\times 1}$, el producto FC es una matriz de orden 1×1, que puede ser considerada como un escalar:

$$FC = [f_{11}\ f_{12}\ \cdots\ f_{1p}] \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{p1} \end{bmatrix} = f_{11}c_{11} + f_{12}c_{21} + \cdots + f_{1p}c_{p1}.$$

Teniendo en cuenta esto, dadas $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$, si $C = AB$, el elemento c_{ij}, que ocupa el lugar (i, j) en C, es el resultado de multiplicar la fila i de A por la columna j de B.

Proposición. 2.7 Sean A, B y C matrices de órdenes convenientes. Se verifica:

1) **Propiedad asociatica**: $(AB)C = A(BC)$.

2) **Propiedad distributiva del producto respecto de la suma**:

$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{y} \qquad (B + C)A = BA + CA.$$

3) **Elemento unidad**: Existe una matriz $I_n \in \mathcal{M}_n$ tal que $AI_n = A$, $I_mA = A$ para toda matriz A $m \times n$.

4) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nota. 2.8 □

1) El producto de matrices **no es conmutativo***, es decir, existen matrices A y B, de órdenes convenientes, tales que $AB \neq BA$. Y más aún, existen matrices tales que AB está definido pero BA no.*

2) Dadas dos matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_n$, el producto AB es de nuevo una matriz cuadrada de orden n y la suma también, por lo que todas las propiedades anteriores se verifican para matrices cuadradas.

En algunos casos, las operaciones entre matrices conservan el tipo de matriz. En concreto se tiene:

Proposición. 2.9 □

1) La suma de dos matrices diagonales (respectivamente, triangulares inferiores o superiores, simétricas) es otra matriz diagonal (triangular inferior o superior, simétrica, respectivamente).
2) El producto de dos matrices diagonales (respectivamente, triangulares inferiores o superiores) es otra matriz diagonal (triangular inferior o superior, respectivamente).

Definición. 2.10 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se llama regular, si existe otra matriz cuadrada de orden n, que denotamos por A^{-1}, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

La matriz A^{-1} se denomina inversa de A.

Proposición. 2.11 Si la inversa de una matriz existe, es única.

Nota. 2.12 *Si $A \in \mathcal{M}_n$ es regular podemos "despejar" B en una ecuación de la forma $AB = C$, sin más que multiplicar ambos términos de la igualdad por A^{-1}:*

$$A^{-1}AB = A^{-1}C \quad \Longrightarrow \quad I_nB = A^{-1}C \quad \Longrightarrow \quad B = A^{-1}C,$$

y lo mismo para la ecuación $BA = C$, multiplicando ahora por la derecha.

Proposición. 2.13 Si A y B son dos matrices regulares del mismo orden, entonces AB también es regular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definición. 2.14 Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, llamamos matriz traspuesta de A, y la denotamos por A^t, a la matriz que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A, es decir,

$$A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i, j,\ b_{ij} = a_{ji}.$$

Proposición. 2.15 Dadas las matrices A y B, de órdenes convenientes, y $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica:

a) $(A^t)^t = A$.
b) $(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
c) $(AB)^t = B^tA^t$.
d) Si A es regular, entonces A^t también y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
e) $A \in \mathcal{M}_n$ es simétrica si y sólo si $A^t = A$.
e) $A \in \mathcal{M}_n$ es antisimétrica si y sólo si $A^t = -A$.

3 Operaciones por bloques

En esta sección veremos como pueden realizarse las operaciones con matrices cuando éstas están divididas en bloques. Lo haremos para matrices cuadradas, pero los resultados que exponemos pueden extenderse a matrices rectangulares de órdenes convenientes.

Proposición. 3.1 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$ y $A_{11}, B_{11} \in \mathcal{M}_r$, $A_{12}, B_{12} \in \mathcal{M}_{r\times(n-r)}$, $A_{21}, B_{21} \in \mathcal{M}_{(n-r)\times r}$, $A_{22}, B_{22} \in \mathcal{M}_{(n-r)}$, de tal forma que

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

Se verifica:

1) $\alpha A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \hline \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{array}\right]$

2) $A^t = \left[\begin{array}{c|c} (A_{11})^t & (A_{21})^t \\ \hline (A_{12})^t & (A_{22})^t \end{array}\right]$

3) $A + B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{array}\right]$

4) $AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$

Proposición. 3.2 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$ y $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ tales que

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array}\right] \quad \text{y} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

siendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ las columnas de A. Se verifica:

$$AX = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

$$BA = B\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} BA_1 & BA_2 & \cdots & BA_n \end{array}\right]$$

Nota. 3.3 *Si una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ tiene una columna de ceros, entonces no es regular, ya que dada otra matriz $B \in \mathcal{M}_n$, el producto BA también tendrá una columna de ceros y, por tanto, $BA \neq I_n$.*

4 Transformaciones elementales

Las transformaciones elementales son operaciones simples que nos permiten obtener, a partir de una matriz dada, otras matrices operando sobre las filas o sobre las columnas de la matriz inicial. Serán de gran utilidad en los próximos temas para obtener matrices de formas convenientes o facilitar los cálculos.

Las **transformaciones elementales por filas** son:

1) Intercambiar las filas i y j.

2) Multiplicar la fila i por un escalar $\alpha \neq 0$.

3) Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un escalar α.

El hecho fundamental es que **realizar cualquiera de estas transformaciones elementales sobre una matriz A, es equivalente a multiplicarla por la izquierda, por un matriz conveniente.**Para hacer esta última afirmación más precisa, consideremos las siguientes matrices, que denominamos **matrices elementales**:

Para cada $i, j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, definimos:

P_{ij}: es la matriz que se obtiene a partir de la identidad intercambiando las filas i y j. Al multiplicar por la izquierda una matriz A por P_{ij}, se intercambian las filas i y j de la matriz A.

$F_i(\alpha)$: es la matriz que se obtiene a partir de la identidad multiplicando la fila i por α. Al multiplicar por la izquierda una matriz A por $F_i(\alpha)$, se multiplica la fila i de la matriz A por α.

$F_{ij}(\alpha)$: es la matriz que se obtiene a partir de la identidad sumando a la fila i la fila j multiplicada por α. Si una matriz A, se multiplica por la izquierda por $F_{ij}(\alpha)$ se obtiene efecto siguiente: a la fila i de A se le suma la fila j de A multiplicada por α.

De manera análoga, podemos definir matrices elementales cuyo efecto sobre una matriz A, al **multiplicarla por la derecha** por una de estas matrices, es el mismo que aplicar a la matriz A una transformación elemental por columnas, es decir:

Para cada $i, j :\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, definimos:

Q_{ij}: es la matriz que se obtiene a partir de la identidad intercambiando la columna i con la j. Al multiplicar una matriz A, por la derecha por Q_{ij} se intercambian las columnas i y j en A.

$C_i(\alpha)$: se obtiene a partir de la identidad multiplicando la columna i por α. Al multiplicar una matriz A por la derecha por $C_i(\alpha)$ la columna i de A queda multiplicada por α.

$C_{ij}(\alpha)$: se obtiene a partir de la identidad sumando a la columna i la j multiplicada por α. El efecto de multiplicar A por la derecha por $C_{ij}(\alpha)$ es sumar a la columna i la j multiplicada por α.

Lema. 4.1 Las matrices elementales son regulares y sus inversas son:

$$\begin{array}{lll} (P_{ij})^{-1} = P_{ji} & (F_i(\alpha))^{-1} = F_i(1/\alpha) & (F_{ij}(\alpha))^{-1} = F_{ij}(-\alpha) \\ (Q_{ij})^{-1} = Q_{ji} & (C_i(\alpha))^{-1} = C_i(1/\alpha) & (C_{ij}(\alpha))^{-1} = C_{ij}(-\alpha) \end{array}$$

Una matriz A se denomina **matriz escalonada por filas**, o se dice que está en forma escalonada por filas, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
- Cada entrada principal (primera entrada no nula en una fila de una matriz) no nula está a la derecha de la entrada principal no nula de la fila de la fila precedente.

Se dice que una matriz escalonada por filas A se ha puesto en forma canónica por filas si tiene las dos propiedades adicionales siguientes:

- Cada entrada principal no nula es 1.
- Cada entrada principal no nula es la única entrada distinta de cero en su columna.

El siguiente algoritmo reduce por filas una matriz A a forma escalonada:

1. Encontrar la primera columna con una entrada no nula. Supongamos que es la columna j_1.
2. Intercambiar las filas de forma que aparezca una entrada no nula en la primera fila de la columna j_1, esto es, conseguir que $a_{1j_1} \neq 0$.
3. Utilizar a_{1j_1} como pivote para obtener cero bajo él.
4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 con la submatriz formada por todas las filas, excluyendo la primera.
5. Continuar el proceso anterior hasta que la matriz quede en forma escalonada.

El siguiente algoritmo reduce por filas una matriz escalonada a su forma canónica por filas. Aquí A está en forma escalonada, digamos con entrada principales no nulas: $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$.

1. Multiplicar la última fila no nula por $\frac{1}{a_{rj_r}}$ de forma que la entrada principal no nula sea 1.
2. Utilizar $a_{rj_r} = 1$ como pivote para obtener ceros sobre él.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para las filas anteriores.
4. Multiplicar la fila 1 por $\frac{1}{a_{1j_1}}$.

Los anteriores algoritmos muestran que cualquier matriz es equivalente por filas a al menos una matriz en forma canónica por filas. Admitiremos, sin demostración, que dicha matriz es única. Lo que podemos enunciar en el siguiente teorema:

Teorema. 4.2 *Cualquier matriz A es equivalente por filas a una única matriz en forma canónica por filas (llamada la* forma canónica por filas *de A).*

Si una matriz A está en forma escalonada, sus entradas principales no nulas se denominan entradas pivote.

Lo dicho para filas se extiende de manera obvia a transformaciones elementales por columnas.

Teorema. 4.3 *Sea A una matriz cuadrada. Entonces son equivalentes las aserciones siguientes:*

1. *A es invertible (no singular).*
2. *A es equivalente por filas a la matriz identidad I.*
3. *A es producto de matrices elementales.*

Teorema. 4.4 *Si $AB = I$, entonces $BA = I$, y por tanto $B = A^{-1}$.*

Los dos últimos teoremas nos permiten calcular la inversa de una matriz A mediante transformaciones elementales por filas: Si A es equivalente por filas a I, sea $E_s \cdots E_2 E_1 A = I$, entonces $A^{-1} = E_s \cdots E_2 E_1$, luego si mediante transformaciones elementales de filas llevamos A a la matriz unidad, realizando las mismas transformaciones en la matriz I obtenemos la matriz inversa A^{-1}.

El siguiente teorema es válido para matrices rectangulares $m \times n$.

Teorema. 4.5 *B es equivalente por filas a A si y solo si existe una matriz no singular P, tal que $B = PA$*

Las transformaciones elementales nos servirán, también, para poder transformar una matriz A en otra lo más parecida posible a la identidad. Este proceso es de gran utilidad en el cálculo de la matriz inversa de una matriz regular y en el cálculo del rango de una matriz y de un conjunto de vectores, así como en el cálculo de determinantes.

Se dice que una matriz B es equivalente a otra A si B puede obtenerse de A mediante una sucesión de transformaciones elementales entre filas y columnas.

Teorema. 4.6 Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, existen dos matrices regulares, $P \in \mathcal{M}_m$ y $Q \in \mathcal{M}_n$ tales que, para cierto $r \in \mathbb{N}$:

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \Theta \\ \hline \Theta & \Theta \end{array}\right]$$

siendo P y Q producto de matrices elementales por filas y por columnas, respectivamente.