

Tema I: Introducción a la Teoría de Conjuntos.

1 Generalidades

La palabra conjunto es un término básico no definido. Los conjuntos se designarán por letras mayúsculas $A, B, \dots$. Los objetos que integran un conjunto se llaman elementos. Para indicar que un objeto a es un elemento de A se escribe: $a \in A$.

Los conjuntos se pueden definir de 2 formas distintas: por extensión dando todos sus elementos, p.e. $A = \{a, b, c\}$ o por comprensión, dando una propiedad que caracterice al conjunto, p.e. H el conjunto de todas las rectas del plano, o bien $D = \{x \in \mathbb{N} : x > 5\}$.

Un conjunto se llama unitario si tiene un solo elemento. El conjunto que no tiene ningún elemento se llama vacío y se denota por $\emptyset$.

Un conjunto F se dice que está contenido o que es un subconjunto de E si todo elemento de F es también de E y se utiliza la notación $F \subset E$ o bien $F \subseteq E$.

Propiedades

- a) $E \subset E$
- b) $F \subset E$ y $E \subset F \Rightarrow E = F$.
- c) $F \subset E$ y $E \subset G \Rightarrow F \subset G$.

Definición. 1.1 Dado un conjunto E , se llama conjunto de partes de E al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de E y se denota por $\mathcal{P}(E)$.

2 Operaciones entre conjuntos

Definición. 2.1 Sean E y F dos conjuntos. Se llama unión de E y F y se denota por $E \cup F$ al conjunto cuyos elementos pertenecen a E o (en sentido no excluyente) a F .

Proposición. 2.2 Siendo E, F, G conjuntos, se cumplen las siguientes leyes:

- a) Conmutativa: $E \cup F = F \cup E$.
- b) Asociativa: $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$.
- c) $F \subset E \Leftrightarrow F \cup E = E$.

Definición. 2.3 Sean E y F dos conjuntos. Se llama intersección de E y F y se denota por $E \cap F$ al conjunto cuyos elementos pertenecen a E y a F .

Proposición. 2.4 Siendo E, F, G conjuntos, se cumplen las siguientes leyes:

- a) Conmutativa: $E \cap F = F \cap E$.
- b) Asociativa: $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$.
- c) $F \subset E \Leftrightarrow F \cap E = F$.

Definición. 2.5 Sean E y F dos conjuntos. Se llama diferencia de E y F y se denota por $E - F$ al conjunto de los elementos de E que no pertenecen a F .

Proposición. 2.6 Siendo E, F, G conjuntos, se cumplen las siguientes leyes:

- a) $E - E = \emptyset$.
- b) $E - \emptyset = E$.
- c) $\emptyset - E = \emptyset$.
- d) $E - F = F - E \Rightarrow E = F$.
- e) $(E - F) - G \subset E - (F - G)$.

Definición. 2.7 Sean E y F dos conjuntos, tales que $F \subset E$. Se llama complemento de F con respecto a E y se denota por $\complement_E F$ (o bien por $\complement F$, si no hay lugar a confusión, o bien por $\overline{F}$, o F') a la diferencia $E - F$.

Proposición. 2.8 Siendo $F \subset E$ se cumplen las siguientes leyes:

- a) $F \cup \overline{F} = E$.
- b) $F \cap \overline{F} = \emptyset$.
- c) $\overline{\emptyset} = E$
- d) $\overline{E} = \emptyset$
- e) $\overline{\overline{F}} = F$

Proposición. 2.9 Leyes distributivas Siendo E , F y G tres conjuntos se verifica:

- a) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
- b) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Proposición. 2.10 Leyes de Morgan Sean F y G subconjuntos de E , se verifica:

- a) $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$.
- b) $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$.

3 Producto cartesiano. Correspondencia y función

Definición. 3.1 Dados 2 conjuntos E y F , el conjunto formado por los pares ordenados (a, b) , $a \in E, b \in F$ se llama producto cartesiano de E y F y se denota por $E \times F$. Cuando $E = F$ se denota también por E^2 .

Si E , F y G son conjuntos se define $E \times F \times G$ al conjunto formado por las ternas ordenadas (a, b, c) , $a \in E, b \in F, c \in G$. Y así sucesivamente para más de 3 conjuntos.

Definición. 3.2 Un conjunto G es una gráfica si sus elementos son pares ordenados. Si G es una gráfica y $(x, y) \in G$, se dice que y es correspondiente de x por G .

Definición. 3.3 Si G es una gráfica, se llama primera (respectivamente segunda) proyección de G , al conjunto de las primeras (respectivamente segundas) coordenadas de elementos de G .

A la primera proyección de G se le suele llamar también conjunto de definición de G y a la segunda conjunto de valores de G y se denotan por $pr_1 G$ y $pr_2 G$.

Definición. 3.4 Se llama correspondencia o relación entre un conjunto A y un conjunto B a una terna ordenada $\Gamma = (G, A, B)$, donde G es una gráfica tal que $pr_1 G \subset A$ y $pr_2 G \subset B$. Se dice que G es la gráfica de Γ , A el conjunto de partida y B el conjunto de llegada.

Si $(x, y) \in G$, se dice también que y es correspondiente de x por la correspondencia Γ o que Γ hace corresponder al elemento x el elemento y . Para todo $x \in pr_1 G$ se dice que la correspondencia Γ está definida para el elemento x , y $pr_1 G$ se llama el conjunto de definición de Γ o dominio de Γ ; para todo y perteneciente a $pr_2 G$ se dice que y es un valor tomado por Γ y $pr_2 G$ se llama el conjunto de valores de Γ .

Definición. 3.5 Sea G una gráfica. Se llama gráfica inversa de G y se designa por G^{-1} , a la gráfica cuyos elementos son los pares ordenados (x, y) , tales que $(y, x) \in G$.

Definición. 3.6 Sea $\Gamma = (G, A, B)$ una correspondencia entre A y B . Se llama correspondencia inversa de Γ y se denota por Γ^{-1} a la correspondencia (G^{-1}, B, A) .

Definición. 3.7 Se dice que una correspondencia $f = (F, A, B)$ es una función o un aplicación si:

- 1. $A = pr_1 F$.
- 2. Para cada $x \in A$ existe un único elemento correspondiente a x por F .

Función o aplicación: Se dice que $f = (F, A, B)$ es una función o aplicación de A en B o que está definida en A y toma sus valores en B , y se suele escribir: $f : A \rightarrow B$. Al único elemento $y \in B$, correspondiente a x se denota por $f(x)$ y se llama la imagen de x por f , es decir son equivalentes $y = f(x)$ y $(x, y) \in F$. A A se le llama dominio de la función y al conjunto de llegada B también se le llama codominio o contradominio de f .

Definición. 3.8 Imagen e imagen inversa por una función:

Sea $f = (F, A, B)$ una función y $X \subset A$, se llama imagen por f de X y se le denota por $f(X)$ al subconjunto de B formado por las imágenes de $x \in X$ o sea $f(X) = \{y \in B : y = f(x), \text{ para algún } x \in X\}$.

Si $Y \subset B$ se llama imagen inversa de Y por f y se denota por $f^{-1}(Y)$ al subconjunto de A formado por los elementos cuya imagen está en Y , es decir $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$.

Proposición. 3.9 Sea $f = (F, A, B)$ una función y X e Y subconjuntos de A y U y V subconjuntos de B . Se verifica:

- a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
- b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
- c) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

Definición. 3.10 Dadas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ definimos la composición de f y g como la aplicación $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ dada por

$$\forall a \in X, \quad h(a) = g(f(a)).$$

Definición. 3.11 Sea $f : X \rightarrow Y$ diremos que:

- 1) f es **inyectiva** si cualesquiera dos elementos de X distintos entre si tienen imágenes distintas. En otras palabras,

$$\forall a_1, a_2 \in X, \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

- 2) f es **sobreyectiva** si todo elemento de Y es la imagen de algún elemento de X , es decir,

$$\forall b \in Y, \exists a \in X, \quad f(a) = b.$$

- 3) f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva. En otras palabras,

$$\forall b \in Y, \exists! a \in X, \quad f(a) = b.$$

Proposición. 3.12 Sea $f = (F, A, B)$ una función inyectiva y X e Y subconjuntos de A . Se verifica: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Proposición. 3.13 Sea f una función de A en B . Para que la correspondencia f^{-1} sea una función es necesario y suficiente que f sea biyectiva.

Definición. 3.14 Sea f una función biyectiva. Se llama función inversa de f a la correspondencia f^{-1} .

4 Relaciones de equivalencia y de orden

Definición. 4.1 Sea A un conjunto. Se llama relación en A o relación entre elementos de A a toda correspondencia donde el conjunto de partida y el de llegada son subconjuntos de A .

Si R es una relación en un conjunto A , y si y es correspondiente de x por la relación R , se dice que x e y están R -relacionados o que x está R -relacionado (o simplemente relacionado si no hay lugar a confusión) con y y se escribe: $x R y$.

Definición. 4.2 Sea A un conjunto y sea R una relación en A . Se dice que R es

- a) **Reflexiva:** Si $\forall a \in A, a R a$.
- b) **Simétrica:** Si $a R b \Rightarrow b R a$.
- c) **Antisimétrica:** Si $a R b$ y $b R a \Rightarrow a = b$.
- d) **Transitiva:** Si $a R b$ y $b R c \Rightarrow a R c$.

Definición. 4.3 Sea A un conjunto y sea R una relación en A . Se dice que R es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición. 4.4 Clases de equivalencia Sea E un conjunto y sea R una relación de equivalencia en E . Para todo $x \in E$ se llama clase de equivalencia de x a la imagen por R de $\{x\}$, o sea $R(x) = \{y \in E : x R y\}$.

Proposición. 4.5 Sea E un conjunto y sea R una relación de equivalencia en E . Se verifica:

- a) Todo elemento de E pertenece a una clase de equivalencia.
- b) Toda clase de equivalencia es no vacía.
- c) Dos clases de equivalencia son disjuntas o iguales.

Definición. 4.6 Sea E un conjunto y sea R una relación de equivalencia en E . Se llama conjunto cociente de E por R al conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de E .

Definición. 4.7 Sea A un conjunto y sea R una relación en A . Se dice que R es una relación de orden en A si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Para una relación de orden en A se suele utilizar en lugar de $a R b$ la notación $a \leq b$.

Definición. 4.8 Se dice que una relación de orden $\leq$ en un conjunto A es de orden total, o que $(A, \leq)$ está totalmente ordenado por la relación $\leq$ si para todo par de elementos $a, b \in A$ se verifica: $a \leq b$ ó $b \leq a$.

Definición. 4.9 Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Un elemento $a \in A$ se llama elemento maximal de $(A, \leq)$ si para todo $x \in A$ tal que $a \leq x$ se tiene $a = x$. Un elemento $a \in A$ se llama elemento minimal de $(A, \leq)$ si para todo $x \in A$ tal que $x \leq a$ se tiene $a = x$.

Definición. 4.10 Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $X \subset A$. Un elemento $k \in A$ se llama cota superior de X si $\forall x \in X, x \leq k$. Un elemento $k \in A$ se llama cota inferior de X si $\forall x \in X, k \leq x$.

Un subconjunto X de A se dice acotado superiormente si tiene alguna cota superior y se dice acotado inferiormente si tiene alguna cota inferior, y se dice simplemente acotado si está acotado superiormente e inferiormente.