Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Capítulo 2

Nociones básicas de curvas

Antes de comenzar, debemos decir unas palabras sobre una consecuencia importante de las notas 1.2.14 y del teorema 1.2.15. Sea A un dominio factorial y sean

$$\begin{aligned} f(X) &= a_0X^p + a_1X^{p-1} + \cdots + a_{p-1}X + a_p\,,\ a_0 \neq 0 \\ g(X) &= b_0X^q + b_1X^{q-1} + \cdots + b_{q-1}X + b_q\,,\ b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

dos polinomios en $A[X]$ de grado positivo. Las notas nos dicen que la resultante R es simétrica en las raíces x_i, $i = 1, \ldots, n$ y en las raíces y_j, $j = 1, \ldots, m$ por separado, cosa por otra parte evidente, por las relaciones de Cardano y porque la resultante es un polinomio en los coeficientes. Por otra parte, el teorema nos dice que la resultante R es homogénea de grado pq en las raíces $x_i\,, y_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$. El teorema 1.2.12 nos dice entonces que la resultante R es un polinomio en $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ y $(b_0, b_1, \ldots, b_q)$ tal que, otorgando a a_i y b_j los grados i y j, respectivamente, cada término de R es homogéneo de grado pq.

Esto tiene una consecuencia trascendental cuando se trata con formas en más de una variable. Supongamos que $F, G \in \mathbb{C}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ son dos formas distintas de cero de grados respectivos p y q. Fijándonos en una variable, digamos y_n que aparezca en una de las dos, podemos escribir

$$\begin{aligned} F &= a_0y_n^p + a_1y_n^{p-1} + \cdots + a_{p-1}y_n + a_p \\ G &= b_0y_n^q + b_1y_n^{q-1} + \cdots + b_{q-1}y_n + b_q\,, \end{aligned}$$

donde $a_i\, b_j$ pertenecen a $\mathbb{C}[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]$ y son formas, de grados respectivos $i\,, j$. Si R es la resultante, o bien $R = 0$ (con lo que no hay nada que decir), o bien $R \neq 0$ y, entonces, es homogénea de grado pq en $(y_0, y_1 \ldots, y_{n-1})$.

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

2.1. Curvas proyectivas planas

Operaremos sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$. Consideraremos siempre el espacio afín $\mathbb{C}^n$ sumergido en el proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 2$, en la forma:

$$(a_1, \ldots, a_n) \longrightarrow (1 : a_1 : \ldots : a_n).$$

Las coordenadas proyectivas serán designadas normalmente por la notación clásica $(y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$ y las afines por $(x_1, \ldots, x_n)$, luego el hiperplano del infinito tiene como ecuación $y_0 = 0$. Los anillos correspondientes serán $P = \mathbb{C}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ y $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Recordemos de 1.1.3.1 que, si $0 \neq F \in P$ es una forma de grado m y $Q = (q_0 : q_1 : \ldots : q_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, tiene sentido hablar de que F se anule en Q o no.

Definición 2.1.1.– *Una hipersuperficie proyectiva es el conjunto $V(F)$ de los puntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ que anulan a una forma $0 \neq F \in P$ de grado positivo. Se dirá que $F = 0$ es una ecuación de $V(F)$.*

Tenemos que hacer algunas aclaraciones sobre las hipersuperficies proyectivas.

Notas 2.1.2.–

2.1.2.1. Vamos a tratar, en primer lugar, de las ecuaciones de las hipersuperficies proyectivas. No podemos perder de vista que, por 1.1.2.3, la forma F factoriza en producto de formas, luego se podrá escribir

$$F = F_1^{r_1} \cdots F_s^{r_s},$$

donde las F_i son irreducibles. En este caso, $V(F) = V(F_1^{r_1}) \cup \cdots \cup V(F_s^{r_s})$ y, como es claro que $V(F_i^{r_i}) = V(F_i)$, tenemos que $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_s)$.

Sea $G = F_1 \cdots F_s$, entonces $V(G) \subset V(F)$. Hay algo que es importante, y es el siguiente

2.1.2.2. Aserto: Sea $H \in P$ una forma tal que $H(Q) = 0$, $\forall Q \in V(F)$; entonces $G|H$. En efecto, tomemos un factor irreducible cualquiera, digamos F_1, que suponemos de grado m_1, y sea R_1 la resultante de H y F_1 con respecto a alguna de las variables que aparezcan en F_1, digamos y_n. Si $R_1 = 0$, entonces H y F_1 deben tener un factor común, que no puede ser otro que F_1 por irreducibilidad, luego $F_1|H$. Supongamos que $R_1 \neq 0$; entonces R_1 es una forma de grado $m_1 h$, donde h es el grado de H, en las variables $(y_0, y_1 \ldots, y_n)$. Existe un punto proyectivo $Q_1' = (q_0' : q_1' : \ldots : q_{n-1}')$ tal que $R_1(q_0', q_1', \ldots, q_{n-1}') \neq 0$. Por tanto, debe existir un punto proyectivo $Q' = (q_0' : q_1' : \ldots : q_n')$ que anule a F_1 (luego a F) que, sin

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

embargo, no puede anular a H por no anular Q_1' a la resultante. Esto contradice la hipótesis de que H se anula sobre todos los puntos de $V(F)$, luego $R_1 = 0$. Esto prueba que H es divisible por todos los factores irreducibles F_i, luego que $G|H$.

2.1.2.3. Como consecuencia inmediata de este aserto se deduce que $V(F) = V(G)$, con lo que podemos tomar siempre como ecuación de una hipersuperficie una forma sin factores múltiples, *cosa que haremos siempre en el futuro*. Los factores $F_1, \ldots, F_s$ están unívocamente determinados salvo producto por constantes. Es claro, entonces que

$$V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_s)$$

y a las $V(F_i)$ se les llama las componentes irreducibles de $V(F)$.

2.1.2.4. A veces nos interesarán las figuras de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ definidas por la anulación de una forma F de grado $m > 0$, el la cual F pueda tener factores múltiples. Esto facilitará el lenguaje. Por ejemplo, si hablamos de cónicas como los conjuntos de puntos que anulan una forma de segundo grado en $\mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$, sabemos por álgebra lineal elemental que los tipos proyectivos de cónicas vienen definidos por el rango de su matriz. Desde este punto de vista se llamará cónica al conjunto de los puntos del plano de ecuación $y_0^2 = 0$. Como conjunto, éste no es más que una recta. En el lenguaje ordinario vamos a decir que se tratra de *una recta contada dos veces*. En general, llamaremos *ciclo* al par formado por una forma $F = 0$ de grado positivo en $\mathbb{C}[y_0, y_1, \ldots, y_n$ (sin restricción sobre la factorización) y la propia forma F. Si $F = F_1^{r_1} \cdots F_s^{r_s}$, diremos que la componente de ecuación $F_i = 0$ está contada r_i veces.

2.1.2.5. A lo largo de todas estas notas usaremos el lenguaje de hipersuperficies. Sin embargo, el lcetor deberá darse cuenta de que la inmensa mayoría de las demostraciones no dependen de que las ecuaciones que se toman tengan o no factores múltiples. Con esto los resultados serán válidos si se sustituye la palabra hipersuperficie por ciclo. Un primer ejemplo se obtiene al observar cuidadosamente la demostración de la proposición 2.1.3, que damos enseguida.

Proposición 2.1.3.– *Una hipersuperficie proyectiva C tiene infinitos puntos.*

Demostración: Sea $F = 0$ una ecuación de C, donde F es una forma de grado m. Como el grado de F es positivo, debe aparecer en ella alguna variable; digamos que aparece y_n. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} F &= a_{m-s}(y_0, \ldots, y_{n-1})y_n^s + \cdots + \\ & a_{m-1}(y_0, \ldots, y_{n-1})y_n + a_m(y_0, \ldots, y_{n-1})y_n^s, \end{aligned}$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

donde cada a_i es una forma de grado i en las variables que se indican, $s > 0$ (luego $m - s < m$) y $a_{m-s}(y_0, \dots, y_{n-1}) \neq 0$. Tanto si a_{m-s} es una constante, como si no, exiten infinitos puntos de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ que no la anulan. Para cada uno de ellos $(\alpha_0 : \dots : \alpha_{n-1})$, la ecuación en y_n

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & a_{m-s}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) y_n^s + \cdots + \\ & a_{m-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) y_n + a_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \alpha_n^s , \end{aligned}$$

tiene $s > 0$ soluciones. Esto prueba la proposición. En lenguaje geométrico diremos que se proyecta C sobre $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ y que es finita la fibra de la proyección sobre los puntos de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ fuera de $a_{m-s}(y_0, \dots, y_{n-1}) = 0$. □

Proposición 2.1.4.– *Sea $C : F = 0$ una hipersuperficie, donde $0 \neq F$ es una forma de grado m. Una recta de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ que no está contenida en C la corta en m puntos, de los cuales algunos pueden coincidir.*

Demostración: En primer lugar, es claro que hay rectas no contenidas en C: como $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C \neq \emptyset$ basta tomar un punto $Q_1 = (q_{10} : q_{11} : \dots : q_{1n}) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C$ y otro punto $Q_2 = (q_{20} : q_{21} : \dots : q_{2n}) \in C$ para que la recta Q_1Q_2 no esté contenida en C. Sea $\varrho = Q_1Q_2$; sus ecuaciones paramétricas son

$$y_i = \lambda q_{1i} + \mu q_{2i}, \quad i = 0, 1, \dots, n .$$

Es evidente que

$$G(\lambda, \mu) = F(\lambda q_{10} + \mu q_{20}, \lambda q_{10} + \mu q_{20}, \dots, \lambda q_{1n} + \mu q_{2n})$$

es una forma de grado m en λ, μ, distinta de cero porque, si no, $\varrho \subset C$, luego se descompone en m factores lineales, de los que algunos pueden coincidir. Esto significa que existen

$$(\lambda_1 : \mu_1), \dots, (\lambda_m : \mu_m) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

que son los únicos puntos que anulan a $G(\lambda, \mu)$. Llevados estos puntos a las ecuaciones paramétricas de ϱ, producen exactamente los m puntos de $\varrho \cap C$ (de los que algunos pueden coincidir). Esto prueba la proposición. □

Corolario 2.1.5.– *Sea C una hipersuperficie en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$; entonces $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C$ es un abierto denso de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.*

Demostración: Por 1.1.3.3, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C$ es un abierto; De nuevo por 1.1.3.3, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C$ no es vacío. Sea $Q_2 \in C$ un punto arbitrario y tomemos una recta ϱ que pase por Q_2 y no esté contenida en C; por 2.1.4, $\varrho \cap C$ es un conjunto finito y Q_2 está en

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

él. Existe entonces un polidisco de ϱ centrado en Q_2 que no contiene a ningún otro punto de $\varrho \cap C$. Esto implica claramente que todo polidisco de ϱ centrado en Q_2 debe entonces contener puntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C$, luego que todo polidisco de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ centrado en Q_2 debe contener puntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C$, y así Q_2 es un punto de acumulación de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus C$. Esto prueba el corolario. □

Definición 2.1.6.– *Una curva proyectiva es una hipersuperficie de* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 2.1.7.– Hay un problema computacional evidente. Si se da una forma $F \in \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$ y se pretende definir la curva de ecuación $F = 0$, ¿cómo se sabe si F no tiene factores múltiples? Este problema es secundario, si se quiere. El principal es: ¿cómo se saben los factores de F sobre $\mathbb{C}$? Respondida esta pregunta, y supuesto que hay factores múltiples, se puede definir una nueva ecuación tomando el producto de los factores irreducibles elevados a la primera potencia, para cumplir las condiciones. Si hay un solo factor elevado a la primera potencia, la curva es irreducible. Las componentes irreducibles son los ceros de los factores.

En Maple hay un algoritmo que hace la *factorización absoluta* de un polinomio. Por factorización absoluta entendemos la factorización sobre el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado que contiene al cuerpo de los coeficientes. En Maple se hace la factorización abosluta por medio de la composición de funciones `evala` y `AFactor`. El problema de esta función es que la salida es poco intuitiva. Veamos un ejemplo. Tomamos las formas lineales

$$\begin{aligned} F_1 &= i y_0 - (1+i)\, y_1 + 3\, y_2 \\ F_2 &= -i y_0 - (1-i)\, y_1 + 3\, y_2 \end{aligned}$$

donde i es una de las raíces cuadradas de -1. Multiplicamos ambas formas y obtenemos

$$F = F_1 F_2 = {y_0}^2 - 2\, y_0 y_1 + 2\, {y_1}^2 - 6\, y_1 y_2 + 9\, {y_2}^2 .$$

La cuestión está en recuperar F_1 y F_2 conociendo solamente F. Eso se hace con la orden de Maple `evala(AFactor(F))`, que produce como salida

$$\left(y_0 + \left(-1 - \mathit{RootOf}\left(\_Z^2+1\right)\right) y_1 + 3\, y_2 \mathit{RootOf}\left(\_Z^2+1\right)\right)$$
$$\left(y_0 + \left(-1 + \mathit{RootOf}\left(\_Z^2+1\right)\right) y_1 - 3\, y_2 \mathit{RootOf}\left(\_Z^2+1\right)\right)$$

Tratamos de obtener la factorización sobre el cuerpo de los números algebraicos (en particular sobre $\mathbb{C}$) de la forma F. Entonces la función `AFactor` crea la factorización y la función `evala` (evaluar expresión en números algebraicos)

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

la hace aparecer. La expresión de salida no es muy clara, y hay que interpretarla. De momento dice que F se descompone en un producto de dos factores lineales. Para ver cuáles son, tenemos que sustituir la expresión $RootOf\left(\_Z^2+1\right)$ por i, que es cualquiera de las dos raíces de $\_Z^2+1=0$. El nombre de la variable, $\_Z$, es extraño, pero Maple lo usa quizás para garantizar que el usuario no ha asignado valor anterior a esa variable (¡por lo rara!). O sea, que escribiendo la salida en lenguaje más legible tenemos

$$\begin{array}{rcl} F_2' & = & y_0 + (-1-i)\,y_1 + 3\,i y_2 \\ F_1' & = & y_0 + (-1+i)\,y_1 - 3\,i y_2 \end{array}$$

Nótese que $F_1' = F_1/i$ y $F_2' = iF_2$, luego $F_1'F_2' = F_1F_2$.

Cuando hay factores múltiples, éstos se hacen notar en Maple. Ponemos ahora $G = F_1^2F_2^2$ y así

$$\begin{array}{rcl} G & = & -36\,y_0y_1{y_2}^2 + 24\,y_0{y_1}^2y_2 - 12\,{y_0}^2y_1y_2 + 72\,{y_1}^2{y_2}^2 - 24\,{y_1}^3y_2 \\ & & -8\,y_0{y_1}^3 + 18\,{y_0}^2{y_2}^2 + 81\,{y_2}^4 + 8\,{y_0}^2{y_1}^2 + 4\,{y_1}^4 - 4\,{y_0}^3y_1 \\ & & -108\,y_1{y_2}^3 + {y_0}^4\,. \end{array}$$

La orden `evala(AFactor(G))` produce como salida

$$\left(y_0 + \left(-1 - RootOf\left(\_Z^2+1\right)\right)y_1 + 3\,y_2 RootOf\left(\_Z^2+1\right)\right)^2$$
$$\left(y_0 + \left(-1 + RootOf\left(\_Z^2+1\right)\right)y_1 - 3\,y_2 RootOf\left(\_Z^2+1\right)\right)^2$$

que es la misma que antes, pero indicando su exponente.

La factorización absoluta tiene el mismo inconveniente que la resolución de ecuaciones: que a partir de quinto grado, no hay estructuras matemáticas que representen a las raíces[1].

2.2. El teorema de Bézout

Nuestro primer objetivo en esta sección es dar un teorema que es una versión débil del resultado clave de la teoría de curvas proyectivas planas, el llamado *Teorema de Bézout*.

Nota 2.2.1.– Dada una curva proyectiva C, existe una forma F cuya descomposición factorial no contiene factores múltiples y C tiene como ecuación $F=0$.

[1]Esto se deriva de la teoría de Galois: la ecuación general de grado superior a 4 no es resoluble por radicales

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Esta forma F está determinada unívocamente salvo producto por una constante, luego su grado está unívocamente determinado: se le llama el *grado de la curva*.

Proposición 2.2.2.– *Dos curvas planas proyectivas C y D sin componentes comunes, de grados respectivos m y n, se cortan en un número finito de puntos.*

Demostración: Sean $C : F = 0$, $D : G = 0$, donde F, G son formas sin factores múltiples de grados respectivos m y n. Podemos suponer que $(0:0:1) \notin C \cup D$, luego F y G (salvo producto por una constante) se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} F &= y_2^m + a_1(y_0, y_1) y_2^{m-1} + \cdots + a_m(y_0, y_1) \\ G &= y_2^n + b_1(y_0, y_1) y_2^{n-1} + \cdots + b_n(y_0, y_1) \end{aligned}$$

donde cada $a_i(y_0, y_1)$ es, bien cero, bien una forma de grado i en $\{y_0, y_1\}$ y donde cada $b_j(y_0, y_1)$ es, bien cero, bien una forma de grado j en $\{y_0, y_1\}$. La resultante R de F y G respecto de y_2 no puede ser cero porque C y D no tienen factores comunes, luego es una forma de grado mn en y_0, y_1 que se descompone en un producto de mn factores lineales. Esto significa hay exactamente mn puntos

$$(\alpha_{10} : \alpha_{11}), \ldots, (\alpha_{mn,0} : \alpha_{mn,1}) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

que anulan a R, de los que algunos pueden coincidir. Para todo $i = 1, \ldots, mn$ tenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= y_2^m + a_1(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) y_2^{m-1} + \cdots + a_m(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) \\ 0 &= y_2^n + b_1(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) y_2^{n-1} + \cdots + b_n(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) \end{aligned}$$

cuyas soluciones son los puntos de $C \cap D$. Como cada ecuación por separado tiene un número finito de raíces (m y n respectivamente), el número de raíces comunes debe ser finito (y distinto de cero). Esto prueba la proposición. □

Teorema 2.2.3.– TEOREMA DE BÉZOUT, VERSIÓN DÉBIL. *Dos curvas planas proyectivas C y D de grados respectivos m y n, sin componentes comunes, se cortan en mn puntos, de los que algunos pueden coincidir.*

Demostración: Sean $C : F = 0$, $D : G = 0$ ecuaciones de C y D donde F y G son formas de grados respectivos m y n sin factores múltiples. Por la proposición 2.2.2, $C \cap D$ es un conjunto finito. Si contiene sólo un punto, tomamos un sistema de referencia tal que $(0:0:1) \notin C \cup D$. Si $C \cap D$ contiene más de un punto, por cada dos de ellos pasa una recta, que totalizan un número finito de rectas. Sean $\ell_1 = 0, \ldots, \ell_r = 0$ las ecuaciones de todas las rectas que pasan por cada par de

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

puntos de $C \cap D$, donde ℓ_i es una forma lineal, $\forall i = 1, \ldots, r$. Consideremos la forma $H = FG\ell_1 \cdots \ell_r$ y la curva $V = V(H)$, conjunto de puntos que anulan a H. Existe un punto $Q \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ que no pertenece a V, es decir, $H(Q) \neq 0$. Tomamos un nuevo sistema de referencia proyectivo en el cual $Q = (0:0:1)$ y cambiamos a él todas las ecuaciones. Así pues, podemos suponer, desde el principio que $(0:0:1) \notin V$, es decir, que $(0:0:1)$ no pertenece ni a C ni a D ni a ninguna recta que pase por dos puntos de intersección de C y D. Por 1.1.3.2, y previa multiplicación por una constante no nula si preciso fuera, se puede suponer que

$$\begin{array}{rcl} F & = & y_2^m + a_1(y_0, y_1) y_2^{m-1} + \cdots + a_m(y_0, y_1) \\ G & = & y_2^n + b_1(y_0, y_1) y_2^{n-1} + \cdots + b_n(y_0, y_1) \end{array}$$

donde cada $a_i(y_0, y_1)$ es, bien cero, bien una forma de grado i en $\{y_0, y_1\}$ y donde cada $b_j(y_0, y_1)$ es, bien cero, bien una forma de grado j en $\{y_0, y_1\}$.

Sea $R = R(y_0, y_1)$ la resultante de F y G respecto de y_2; sabemos que $R \neq 0$ porque C y D no tienen componentes comunes. Sabemos también que R es una forma de grado mn, luego hay exactamente mn puntos

$$(\alpha_{10}:\alpha_{11}), \ldots, (\alpha_{mn,0}:\alpha_{mn,1}) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

que la anulan, aunque algunos puedan coincidir. Para todo $i = 1, \ldots, mn$ tenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & y_2^m + a_1(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) y_2^{m-1} + \cdots + a_m(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) \\ 0 & = & y_2^n + b_1(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) y_2^{n-1} + \cdots + b_n(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) \end{array}$$

cuyas soluciones son los puntos de $C \cap D$. La primera ecuación tiene m raíces (distintas o algunas coincidentes) y la segunda n. Sabemos que ambas ecuaciones tienen una raíz común α_i al menos, luego $(\alpha_{i0}:\alpha_{i1}:\alpha_i) \in C \cap D$. Si ambas ecuaciones tuvieran otras raíz $\alpha_i' \neq \alpha_i$, sería $(\alpha_{i0}:\alpha_{i1}:\alpha_i') \in C \cap D$. Como

$$(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \alpha_i) - (\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \alpha_i') = (0, 0, \alpha_i - \alpha_i')$$

y $\alpha_i - \alpha_i' \neq 0$ resultaría que el punto $(0:0:1) = (0:0:\alpha_i - \alpha_i')$ pertenecería a la recta determinada por los puntos $(\alpha_{i0}:\alpha_{i1}:\alpha_i) \in C \cap D$ y $(\alpha_{i0}:\alpha_{i1}:\alpha_i') \in C \cap D$, luego $(0:0:1)$ estaría alineado con dos puntos de intersección de C y D, lo que no es posible por construcción. Así las ecuaciones anteriores sólo pueden tener una raíz común, y $C \cap D$ consta exactamente de mn puntos, aunque algunos puedan coincidir. Esto implica, de paso, que $C \cap D \neq \emptyset$. $\square$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Definición 2.2.4.– *Dadas dos curvas proyectivas C y D, se dice que un sistema de referencia proyectivo $\mathcal{R} = [Q_0, Q_1, Q_2; Q_u]$ está en posición general respecto de ellas si $Q_2 \notin C \cup D$ y ninguna recta que pase por dos puntos distintos de $C \cap D$ contiene a Q_2 (Q_u es el punto unidad). Dadas las curvas C y D, existe un tal sistema de referencia por la demostración del teorema 2.2.3.*

Definición 2.2.5.– *Sean C y D dos curvas proyectivas, supongamos elegido un sistema de referencia en posición general respecto de ellas y sean $F = 0$, $G = 0$ ecuaciones respectivas sin factores múltiples, donde*

$$\begin{aligned} F &= y_2^m + a_1(y_0, y_1) y_2^{m-1} + \cdots + a_m(y_0, y_1) \\ G &= y_2^n + b_1(y_0, y_1) y_2^{n-1} + \cdots + b_n(y_0, y_1)\,. \end{aligned}$$

Sea

$$R = \alpha \prod_{i=1}^{r} (\alpha_{i0} y_1 - \alpha_{i1} y_0)^{s_i}$$

la descomposición factorial de la resultante de F y G respecto de y_2, $\sum_{i=1}^r s_i = mn$ y sea

$$C \cap D = \{P_1 = (\alpha_{10} : \alpha_{11} : \alpha_{12}), \ldots, P_r = (\alpha_{r0} : \alpha_{r1} : \alpha_{r2})\}$$

(ver demostración del teorema 2.2.3). Para cada $i = 1 \ldots, r$ el exponente s_i se llama la multiplicidad de intersección de C y D en el punto P_i respecto del sistema de referencia dado. También se dirá que s_i es el número de veces que aparece P_i en $C \cap D$ o que los puntos de $C \cap D$ se cuentan propiamente cuando cada uno se cuenta el número de veces que aparece.

El punto clave de toda esta sección, y de la teoría de intersección de curvas planas es el siguiente:

Proposición 2.2.6.– *El número de veces que aparece cada P_i en $C \cap D$ no depende del sistema de referencia, siempre y cuando éste se encuentre en posición general respecto de C y D.*

Demostración: Partimos del sistema de referencia y las ecuaciones de la definición 2.2.5. Vamos primero a describir lo que hemos de probar. Tomemos otro sistema de referencia $\mathcal{R} = [Q_0, Q_1, Q_2; Q_u]$ en posición general respecto de ellas, designemos por $(y_0' : y_1' : y_2')$ a las coordenadas respecto de él y sean

$$(y_0, y_1, y_2) = \varrho(y_0', y_1', y_2') \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \varrho \cdot (y_0', y_1', y_2') M$$

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

las fórmulas del cambio de sistema de referencia; entonces

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & F((y'_0, y'_1, y'_2)M) = F'(y'_0, y'_1, y'_2) \\ 0 & = & G((y'_0, y'_1, y'_2)M) = G'(y'_0, y'_1, y'_2) \end{array}$$

son las ecuaciones de C y D respecto de $\mathcal{R}$. Nótese que, en particular,

$$\begin{array}{rcl} 0 & \neq & F'(0,0,1) = \varrho^m F(a_{20}\, a_{21}\, , a_{22}) \\ 0 & \neq & G'(0,0,1) = \varrho^m G(a_{20}\, a_{21}\, , a_{22}) \end{array}$$

Sea

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{10} & a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{20} & a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$$

de tal manera que $(y'_0, y'_1, y'_2) = \delta \cdot (y_0, y_1, y_2)M'$; entonces

$$Q_0 = (a'_{00} : a'_{01} : a'_{02})\,, \quad Q_1 = (a'_{10} : a'_{11} : a'_{12})\,, \quad Q_2 = (a'_{20} : a'_{21} : a'_{22})\,,$$

y

$$Q_u = (a'_{00} + a'_{10} + a'_{20} : a'_{01} + a'_{11} + a'_{21} : a'_{02} + a'_{12} + a'_{22})$$

respecto del sistema de referencia original. Los puntos $\{P_1, \ldots, P_r\} = C \cap D$ tienen las coordenadas siguientes respecto de $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & (\alpha_{10}a'_{00} + \alpha_{11}a'_{10} + \alpha_{12}a'_{20} : \alpha_{10}a'_{01} + \alpha_{11}a'_{11} + \alpha_{12}a'_{21} : \\ & & \alpha_{10}a'_{02} + \alpha_{12}a'_{11} + \alpha_{12}a'_{22}) \\ & & \\ \vdots & & \vdots \\ P_r & = & (\alpha_{r0}a'_{00} + \alpha_{r1}a'_{10} + \alpha_{r2}a'_{20} : \alpha_{r0}a'_{01} + \alpha_{r1}a'_{11} + \alpha_{r2}a'_{21} : \\ & & \alpha_{r0}a'_{02} + \alpha_{r2}a'_{11} + \alpha_{r2}a'_{22}) \end{array}$$

Como $\mathcal{R}$ está en posición general respecto de C y D tenemos que, salvo producto por una constante,

$$\begin{array}{rcl} F' & = & (y'_2)^m + a_1(y'_0, y'_1)(y'_2)^{m-1} + \cdots + a_m(y'_0, y'_1) \\ G' & = & (y'_2)^n + b_1(y'_0, y'_1)(y'_2)^{n-1} + \cdots + b_n(y'_0, y'_1)\,. \end{array}$$

La descomposición factorial de la resultante R' de F' y G' con respecto a y'_2 es del tipo

$$R' = b\prod_{i=1}^{r}[(\alpha_{i0}a'_{00} + \alpha_{i1}a'_{10} + \alpha_{i2}a'_{20})y'_1 - (\alpha_{i0}a'_{01} + \alpha_{i1}a'_{11} + \alpha_{i2}a'_{21})y'_0]^{t_i}$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

con $\sum_{i=1}^{n} t_i = mn$, y se trata de probar que $t_i = s_i$, $\forall i = 1, \dots, r$.

Una vez visto cómo funcionan los cambios de sistema de referencia en las curvas, y lo que tenemos que hacer, vamos a aplicar una técnica llamada de *generalización*. Para ello consideramos un vector de variables

$$\mathbf{x} = (x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{20}, x_{21}, x_{22})$$

y ampliamos el cuerpo base a un cierre algebraico $K = \overline{\mathbb{C}(\mathbf{x})}$. Se trata de operar en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$, cuyas coordenadas designamos por $(z_0 : z_1 : z_2)$. Desde luego, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^n_K$, y así el sistema de referencia sigue siendo

$$(1:0:0), \quad (0:1:0), \quad (0:0:1), \quad (1:1:1).$$

Ahora se consideran las curvas $C_{\mathbf{x}}$ y $D_{\mathbf{x}}$, que son

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{x}} &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^n_K \mid F(z_0, z_1, z_2) = 0\} \\ D_{\mathbf{x}} &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^n_K \mid G(z_0, z_1, z_2) = 0\}. \end{aligned}$$

La técnica de hallar los puntos de intersección de dos curvas (cálculo de la resultante, de los puntos que anulan a ésta y los puntos correspondientes que anulan al sistema), junto con el hecho de que F y G tienen todos sus coeficientes en $\mathbb{C}$ nos dicen que

$$C_{\mathbf{x}} \cap D_{\mathbf{x}} = \{P_1, \dots, P_r\}, \quad P_i = (\alpha_{i0} : \alpha_{i1} : \alpha_{i2}), i = 1, \dots, r.$$

Esto implica que, aunque hayamos cambiado el cuerpo base, el sistema de referencia en el que están escritas las ecuaciones $F = 0$ y $G = 0$ de $C_{\mathbf{x}}$ y $D_{\mathbf{x}}$ está en posición general con respecto a estas curvas.

Vamos a considerar en $\mathbb{P}^n_K$ el cambio de sistema de referencia dado por la matriz de variables

$$X = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

que tiene como ecuaciones

$$(y_0, y_1, y_2) = \varrho(z_0, z_1, z_2) \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \varrho(z_0, z_1, z_2) X.$$

Pongamos

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} x'_{00} & x'_{01} & x'_{02} \\ x'_{10} & x'_{11} & x'_{12} \\ x'_{20} & x'_{21} & x'_{22} \end{pmatrix},$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

donde cada elemento x'_{ij} es, como se sabe, el adjunto del elemento que ocupa el mismo lugar en la traspuesta de X dividido por

$$\begin{aligned}\det(X) &= x_{00}x_{11}x_{22} - x_{00}x_{12}x_{21} - x_{10}x_{01}x_{22}\\ &\quad + x_{10}x_{02}x_{21} + x_{20}x_{01}x_{12} - x_{20}x_{02}x_{11};\end{aligned}$$

entonces es

$$(z_0, z_1, z_2) = \delta \cdot (y_0, y_1, y_2)X^{-1}.$$

Llamando $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$ al nuevo sistema de referencia, sus puntos constitutivos son

$$Q_{\mathbf{x},0} = (x'_{00} : x'_{01} : x'_{02}), \quad Q_{\mathbf{x},1} = (x'_{10} : x'_{11} : x'_{12}), \quad Q_{\mathbf{x},2} = (x'_{20} : x'_{21} : x'_{22}),$$

y

$$Q_{\mathbf{x},u} = (x'_{00} + x'_{10} + x'_{20} : x'_{01} + x'_{11} + x'_{21} : x'_{02} + x'_{12} + x'_{22}).$$

El sistema de referencia $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$ está en posición general con respecto a $C_{\mathbf{x}}$ y $D_{\mathbf{x}}$. En efecto, si no lo estuviera, tampoco lo estaría $\mathcal{R}$, que se obtiene a partir de $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$ sustituyendo x_{ij} por a_{ij}, $\forall i, j = 1, 2, 3$, y sabemos que esto no ocurre.

La ecuaciones de $C_{\mathbf{x}}$ y $D_{\mathbf{x}}$, respecto de $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$, son, respectivamente, $F_{\mathbf{x}}(z_0, z_1, z_2) = 0$ y $G_{\mathbf{x}}(z_0, z_1, z_2) = 0$, donde

$$\begin{aligned}F_{\mathbf{x}}[(y_0, y_1, y_2)X^{-1}] &= F(y_0, y_1, y_2)\\ G_{\mathbf{x}}[(y_0, y_1, y_2)X^{-1}] &= G(y_0, y_1, y_2).\end{aligned}$$

Los puntos de $C_{\mathbf{x}} \cap D_{\mathbf{x}}$, en el sistema de referencia $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$, tienen coordenadas

$$\begin{aligned}P_1 &= (\alpha_{10}x'_{00} + \alpha_{11}x'_{10} + \alpha_{12}x'_{20} : \alpha_{10}x'_{01} + \alpha_{11}x'_{11} + \alpha_{12}x'_{21} :\\ &\quad\ \alpha_{10}x'_{02} + \alpha_{12}x'_{11} + \alpha_{12}x'_{22})\\ &\ \vdots\\ P_r &= (\alpha_{r0}x'_{00} + \alpha_{r1}x'_{10} + \alpha_{r2}x'_{20} : \alpha_{r0}x'_{01} + \alpha_{r1}x'_{11} + \alpha_{r2}x'_{21} :\\ &\quad\ \alpha_{r0}x'_{02} + \alpha_{r2}x'_{11} + \alpha_{r2}x'_{22}).\end{aligned}$$

Sea $R_{\mathbf{x}}(z_0, z_1)$ la resultante de $F_{\mathbf{x}}$ y $G_{\mathbf{x}}$ con respecto a z_2; entonces

$$R_{\mathbf{x}} = c\prod_{i=1}^{r}[(\alpha_{i0}x'_{00} + \alpha_{i1}x'_{10} + \alpha_{i2}x'_{20})z_1 - (\alpha_{i0}x'_{01} + \alpha_{i1}x'_{11} + \alpha_{i2}x'_{21})z_0]^{u_i}$$

donde $c \in K$ y $\sum_{i=1}^{r} u_i = mn$. El elemento $c \in K$ puede tener denominador, pero es evidente que este denominador debe ser una potencia de $\det(X)$. Cambiando x'_{ij} por a'_{ij} (lo que tiene sentido pues, al ser $\det(M) \neq 0$, no se anula el denominador de c) y z_i por y'_i, $i = 1, 2$, se debe obtner la resultante R'. Por tanto, $t_i = u_i$, $i = 1, \dots, r$ y de manera análoga se ve que $s_i = u_i$. Esto prueba la proposición. □

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

De esto se deduce el teorema de Bézout en toda su generalidad:

Teorema 2.2.7.– *Dos curvas proyectivas planas C y D de grados respectivos m y n se cortan en mn puntos, contados propiamente.*

Nota 2.2.8.– Sean $C:F=0$ y $D:G=0$ dos curvas planas de grados respectivos m y n, donde suponemos que F y G están escritas en un sistema de referencia que está en posición general respecto de C y D. En la proposición 2.2.3 se dice cómo construir un tal sistema de referencia. Se debe notar que esta construcción incide solamente en la posición del punto $(0:0:1)$, siendo libre la elección de los restantes puntos del sistema. Vamos a elegir el $(0:1:0)$ de la forma siguiente: como $C \cap D$ es un conjunto finito, el conjunto de rectas que unen $(0:0:1)$ con cada punto de $C \cap D$ es finito, luego podemos tomar como recta $y_0 = 0$ una cualquiera ditinta de todas ellas, y el punto $(0:1:0)$ en ella. Esto quiere decir que, si consideramos el plano afín $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus (y_0 = 0)$ con la inmersión clásica $(\alpha_1, \alpha_2) \to (1, \alpha_1, \alpha_2)$, entonces todos los puntos de $C \cap D$ están dentro del plano afín. Pongamos $f = F(1, x_1, x_2)$, $g = G(1, x_1, x_2)$, donde (x_1, x_2) son las coordenadas del punto genérico del plano afín. La resultante R de $F(y_0, y_1, y_2)$ y $G(y_0, y_1, y_2)$ respecto de y_2 no puede ser divisible por y_0, luego, salvo producto por constante, es de la forma

$$R = \prod_{i=1}^{r} (y_1 - \alpha_i y_0)^{r_i}, \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

donde r_i es la multiplicidad de intersección de C y D en el punto $(1:\alpha_i, \beta_i)$, siendo β_i la única raíz común de las dos ecuaciones

$$0 = F(1, \alpha_i, y_2) = G(1, \alpha_i, y_2).$$

Esto, junto con el hecho de que la resultante es combinación lineal de F y G, demuestra dos cosas:

1. que la resultante de f y g con respecto a x_2 es

$$R(1, x_1) = \prod_{i=1}^{r} (x_1 - \alpha_i)^{r_i}, \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

2. que los puntos de $C \cap D$ son los puntos afines de la forma (α_i, β_i), donde β_i es la única raíz del sistema

$$0 = f(\alpha_i, x_2) = g(\alpha_i, x_2).$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

En otras palabras, se puede elegir un sistema de referencia en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de tal manera que el cálculo de los puntos de $C \cap D$, con sus multiplicidades, se pueda efectuar el el plano afín. Esto simplifica los cálculos de una cierta forma, al suprimir una variables de los sistemas de ecuaciones a resolver.

2.3. Haces de cónicas

Una forma no nula $F \in \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$ de grado 2 es irreducible o se descompone, salvo un factor de proporcionalidad, bien en un producto de dos formas lineales distintas (en este caso entendemos no proporcionales), bien en el cuadrado de una forma lineal. Llamamos *cónica* al conjunto de los puntos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ que anulan a F. En el primer caso, la cónica se llama *irreducible*. En el segundo, es una unión de dos rectas: los puntos que anulan a cada una de las dos formas lineales. En el tercer caso, la cónica consta solamente de una recta: los puntos que anulan a la forma lineal que está elevada al cuadrado. En los dos primeros casos, la cónica es una curva plana; en el tercero no lo es porque su ecuación tiene factores múltiples. Sin embargo, lo admitiremos, diciendo que la cónica es una recta doble.

Vamos a estudiar las posibles intersecciones de dos cónicas C y D sin componentes comunes. Para ello elegimos un sistema de referencia que esté en posición general respecto de ambas, y tomamos ecuaciones respectivas $F = 0$ y $G = 0$, donde

$$\begin{aligned} F &= y_2^2 + a_1(y_0, y_1) y_2 + a_2(y_0, y_1) \\ G &= y_2^2 + b_1(y_0, y_1) y_2 + b_2(y_0, y_1)\,, \end{aligned}$$

donde $a_i\,, b_i$ son formas de grado i en las variables que se indican, $i = 1, 2$. La resultante R de F y G con respecto a y_2 es una forma de grado 4 en y_0, y_1, luego la anulan cuatro puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, de los cuales algunos pueden coincidir. Vamos a estudiar los posibles casos de intersección.

Notas 2.3.1.–

2.3.1.1. Supongamos que los puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anulan a la resultante sean cuatro distintos. Como el sistema de referencia está en posición general, cada punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anula a R da lugar a un único de $C \cap D$, luego $C \cap D$ está formada por cuatro puntos distintos, cada uno de ellos con multiplicidad 1. Para ver que este caso se da efectivamente, ponemos un ejemplo. Sean

$$\begin{aligned} F &= -5\,{y_0}^2 + 7\,{y_1}^2 + {y_2}^2 + 2\,y_0 y_1 + 4\,y_0 y_2 \\ G &= -9\,{y_0}^2 + 13\,{y_1}^2 - 2\,y_1 y_2 + {y_2}^2 + 4\,y_0 y_1 + 8\,y_0 y_2 \end{aligned}$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

La resultante R con respecto a y_2 es

$$R = 32\, y_1\, (y_0 - y_1)\, (y_0 - 2\, y_1)\, (y_0 + y_1)$$

cuya anulación da los siguientes cuatro puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$(1:0)\,,(1:1)\,,(2:1)\,,(1:-1)$$

y éstos a que

$$C \cap D = \{(1:0:1)\,,(1:1:-2)\,,(2:1:1)\,,(1:-1:0)\}$$

Las seis rectas que pasan por los cuatro puntos de $C \cap D$ se obtienen como el conjunto de los puntos que satisfacen las siguientes formas lineales igualadas a cero:

$$\begin{array}{rl} y_0 + y_1 + y_2 & y_0 - y_1 - y_2 \\ y_0 - 3\, y_1 - y_2 & -y_0 - y_1 + 3\, y_2 \\ 3\, y_0 - 5\, y_1 - y_2 & -y_0 - y_1 + y_2\,; \end{array}$$

como ninguna pasa por $(0:0:1)$, ni tampoco C y D, efectivamente el sistema de referencia está en posición general y el ejemplo está bien planteado.

2.3.1.2. Supongamos que los puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anulan a la resultante sean tres distintos, uno de ellos con multiplicidad 2. Como el sistema de referencia está en posición general, cada punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anula a R da lugar a un único de $C \cap D$, luego $C \cap D$ está formada por tres puntos distintos, uno de ellos con multiplicidad 2 y los otros dos con multiplicidad 1. Para ver que este caso se da efectivamente, ponemos un ejemplo. Sean

$$\begin{array}{rcl} F & = & -{y_0}^2 + 2\, y_2 y_0 - 2\, y_1 y_2 + {y_2}^2 + {y_1}^2 \\ G & = & -2\, {y_0}^2 + 5\, y_2 y_0 - y_1 y_0 - 4\, y_1 y_2 + {y_2}^2 + 3\, {y_1}^2 \end{array}$$

La resultante R con respecto a y_2 es

$$R = -2\, y_0\, (y_0 - y_1)\, (y_0 - 2\, y_1)^2$$

cuya anulación da los siguientes cuatro puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$(0:1)\,,(1:1)\,,(2:1)\,,(2:1)$$

y éstos a que

$$C \cap D = \{(0:1:1)\,,(1:1:0)\,,(2:1:1)\,,(2:1:1)\}\,.$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Las tres rectas que pasan por los tres puntos distintos de $C \cap D$ se obtienen como el conjunto de los puntos que satisfacen las siguientes formas lineales igualadas a cero:

$$y_1 - y_2\,, \quad y_0 - y_1 - y_2\,, \quad -y_0 + y_1 - y_2\,;$$

como ninguna pasa por $(0:0:1)$, ni tampoco C y D, efectivamente el sistema de referencia está en posición general y el ejemplo está bien planteado.

2.3.1.3. Supongamos que los puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anulan a la resultante sean dos distintos, cada uno de ellos con multiplicidad 2. Como el sistema de referencia está en posición general, cada punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anula a R da lugar a un único de $C \cap D$, luego $C \cap D$ está formada por dos puntos distintos con multiplicidad 2. Para ver que este caso se da efectivamente, ponemos un ejemplo. Sean

$$\begin{aligned} F &= 3\,{y_0}^2 - 4\,y_2 y_0 + {y_2}^2 - y_1 y_0 - y_1 y_2 \\ G &= 5\,{y_0}^2 - 6\,y_2 y_0 + {y_2}^2 - 2\,y_1 y_0 - 2\,y_1 y_2 \end{aligned}$$

La resultante R con respecto a y_2 es

$$R = 4\,{y_0}^2 {y_1}^2$$

cuya anulación da los siguientes cuatro puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$(0:1)\,,(0:1)\,,(1:0)\,,(1:0)$$

y éstos a que

$$C \cap D = \{(0:1:0)\,,(0:1:0)\,,(1:0:1)\,,(1:0:1)\}\,.$$

La recta que pasa por los dos puntos distintos de $C \cap D$ tiene como ecuación $y_0 - y_2 = 0$. Como no pasa por $(0:0:1)$, ni tampoco C y D, efectivamente el sistema de referencia está en posición general y el ejemplo está bien planteado.

2.3.1.4. Supongamos que los puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anulan a la resultante sean dos distintos, uno de ellos con multiplicidad 3 y el otro con multiplicidad 1. Como el sistema de referencia está en posición general, cada punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anula a R da lugar a un único de $C \cap D$, luego $C \cap D$ está formada por dos puntos distintos con multiplicidades respectivas 3 y 1. Para ver que este caso se da efectivamente, ponemos un ejemplo. Sean

$$\begin{aligned} F &= {y_2}^2 - 2\,y_1 y_2 - 4\,y_2 y_0 + 2\,y_1 y_0 + 3\,{y_0}^2 - {y_1}^2 \\ G &= {y_2}^2 - 3\,y_1 y_2 - 6\,y_2 y_0 + 3\,y_1 y_0 + 5\,{y_0}^2 - 2\,{y_1}^2 \end{aligned}$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

La resultante R con respecto a y_2 es

$$R = 2\,{y_1}^3\,(y_0 + y_1)$$

cuya anulación da los siguientes cuatro puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$(1:0)\,,(1:0)\,,(1:0)\,,(1:-1)$$

y éstos a que

$$C \cap D = \{(1:0:1)\,,(1:0:1)\,,(1:0:1)\,,(1:-1:0)\}\,.$$

La recta que pasa por los dos puntos distintos de $C \cap D$ tiene como ecuación $y_2 - y_1 - y_0 = 0$. Como no pasa por $(0:0:1)$, ni tampoco C y D, efectivamente el sistema de referencia está en posición general y el ejemplo está bien planteado.

2.3.1.5. Supongamos que haya una solo punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anule a la resultante con multiplicidad 4. Como el sistema de referencia está en posición general, cada punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que anula a R da lugar a un único de $C \cap D$, luego $C \cap D$ está formada por un solo punto con multiplicidad 4. Para ver que este caso se da efectivamente, ponemos un ejemplo. Sean

$$\begin{aligned} F &= 3\,{y_0}^2 - 4\,y_2 y_0 + {y_2}^2 - {y_1}^2 \\ G &= 5\,{y_0}^2 - 6\,y_2 y_0 + {y_2}^2 - 2\,{y_1}^2 \end{aligned}$$

La resultante R con respecto a y_2 es $R = {y_1}^4$ cuya anulación da los siguientes cuatro puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$(1:0)\,,(1:0)\,,(1:0)\,,(1:0)$$

y éstos a que

$$C \cap D = \{(1:0:1)\,,(1:0:1)\,,(1:0:1)\,,(1:0:1)\}\,.$$

Como es evidente que el sistema de referencia está en posición general, el ejemplo está bien planteado.

Notas 2.3.2.– Recordemos que, dadas dos cónicas $C{:}F = 0$, $D{:}G = 0$, sin componentes comunes, se llama *haz de cónicas* determinado por ambas al conjunto de las cónicas de ecuaciones $\lambda F + \mu G = 0$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *siempre que entre ellas haya una cónica irreducible*. Naturalmente, dos cónicas del haz $\lambda_1 F + \mu_1 G = 0$ y $\lambda_2 F + \mu_2 G = 0$ son iguales si y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Siempre supondremos que el sistema de referencia está en posición general respecto de las dos cónicas originales. Esto no significa en absoluto que esté en posición general respecto de cualquier par de cónicas del haz. De hecho, hay una única cónica del haz que pasa por $(0:0:1)$, que es la correspondiente a $\lambda = -G(0,0,1)$, $\mu = F(0,0,1)$.

2.3.2.1. Si $F' \neq 0$ es una forma de grado 2, se puede escribir en forma matricial de la manera siguiente: si

$$F' = a'_{00}y_0^2 + 2a'_{01}y_0y_1 + 2a'_{02}y_0y_2 + a'_{11}y_1^2 + 2a'_{12}y_1y_2 + a'_{22}y_2^2\,,$$

entonces

$$F' = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{02} & a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

denotemos por A' a la expresión anterior. Por álgebra lineal elemental sabemos que hay tres tipos proyectivos de cónicas (dos cónicas están en el mismo tipo si y sólo si una de ellas es igual a la otra cambiada de coordenadas), a saber:

1. Cónicas de rango 3. Como el rango de la matriz A' de la cónica $F' = 0$ es un invariante en los cambios de sistema de referencia por eso se puede hablar del rango de una cónica, queriendo decir el rango de una cualquiera de sus matrices con respecto a un sistema de referencia arbitrario. Las cónicas de rango 3 son irreducibles.

2. Cónicas de rango 2: constan de una unión de dos rectas distintas.

3. Cónicas de rango 1: son una recta doble.

2.3.2.2. Escribimos las ecuaciones de las cónicas dadas en forma matricial de la manera siguiente: si

$$\begin{aligned} F &= a_{00}y_0^2 + 2a_{01}y_0y_1 + 2a_{02}y_0y_2 + a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 \\ G &= b_{00}y_0^2 + 2b_{01}y_0y_1 + 2b_{02}y_0y_2 + b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & b_{11} & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Desiganemos por A y B a las matrices cuadradas de F y G, respectivamente; una cónica cualquiera del haz se escribe

$$\lambda F + \mu G = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} (\lambda A + \mu B) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{00} + \mu b_{00} & \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{02} + \mu b_{02} \\ \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{02} + \mu b_{02} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{pmatrix}.$$

El determinante de $\lambda A + \mu B$ es una forma $H(\lambda, \mu)$ de grado 3 en λ, μ. Naturalmente, $H \neq 0$ porque, por hipótesis, hay al menos un valor $\lambda = \lambda_0\, \mu = \mu_0$ que da una cónica irreducible, luego de rango 3. La ecuación $H = 0$ produce tres puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (de coordenadas (λ, μ)), luego tres cónicas de rangos 2 ó 1, donde algunas pueden coincidir: se las llama las *cónicas degeneradas del haz*.

2.3.2.3. Todo haz de cónicas está unívocamente determinado por dos cónicas distintas cualesquiera de él. En efecto, si $(\lambda_0, \mu_0), (\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ son tales que

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

y si

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \lambda F_0 + \mu F_1 &= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \\ \lambda F + \mu G &= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que prueba nuestro aserto. De lo anterior se deduce también que toda cónica del haz pasa por $C \cap D$ y que, para todo par de cónicas distintas C', D' del haz, $C' \cap D' = C \cap D$. Lo que es ya un poco más difícil es la demostración del teorema que damos a continuación.

Teorema 2.3.3.– *Sean C' D' dos cónicas cualesquiera del haz determinado por C y D. Entonces $C' \cap D'$ consta de los mismos puntos, con las mismas multiplicidades, que $C \cap D$, siempre que el sistema de referencia esté en posición general respecto de C' y D'.*

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Demostración: Escribamos

$$\begin{array}{rcl} F &=& y_2^2 + a_1(y_0,y_1)y_2 + a_2(y_0,y_1) \\ G &=& y_2^2 + b_1(y_0,y_1)y_2 + b_2(y_0,y_1)\,; \end{array}$$

la resultante de F y G con restecto a y_2 es

$$R = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Tomemos dos cónicas del haz, de ecuaciones

$$0 = F_1 = \lambda_1 F + \mu_1 G\,, \quad 0 = F_2 = \lambda_2 F + \mu_2 G\,,$$

de tal manera que el sistema de referencia esté en posición general respecto de ellas y

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Por las propiedades de los determinantes (multilinealidad) se verifica que la resultante de F_1 y F_2 con respecto a y_2 es

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}^2 R\,,$$

luego ambas resultantes, al ser una múltiplo constante de la otra, determinan los mismos puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ con las mismas multiplicidades. Como la intersección de las últimas dos cónicas es igual a $C \cap D$, tenemos el resultado. □

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Capítulo 3

Tangencia

3.1. Polares

Consideremos el anillo $\mathbb{C}[y_0, y_1, \ldots, y_n] = \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, ($\mathbf{y} = (y_0, y_1 \ldots, y_n)$), una nueva colección de variables $\mathbf{z} = (z_0, z_1 \ldots, z_n)$ y el anillo $BP = \mathbb{C}[y_0, y_1, \ldots, y_n, z_0, z_1, \ldots, z_n]$. Una forma bihomogénea de BP de bigrado (p, q) es un polinomio tal que todos sus términos tienen grado p en las y_i y grado q en la z_j. Por ejemplo, si $n = 2$, $y_0 z_0^2 + y_1 z_1^2 + y_2 z_2^2$ es bihomogéneo de bigrado $(1, 2)$, mientras que $y_0 z_0 + y_1 z_1^2 + y_2 z_2^3$ no es bihomogéneo, aunque sí homogéneo en las y_i de grado 1.

Notas 3.1.1.– Consideremos el operador diferencial

$$D = \sum_{j=0}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

3.1.1.1. Si consideramos a D como una función $D\colon BP \to BP$, definimos la potencia i-ésima D^i de D, $i > 0$, como la función que se obtiene al componer D consigo mismo i veces. Utilizando las propiedades de las derivaciones, escribiendo un operador diferencial como una suma formal de derivadas parciales, y por la regla de Leibnitz de la potencia de un polinomio, tenemos que

$$\begin{aligned} D^i &= \sum_{j_0+\cdots+j_n=i} \frac{i!}{j_0! \cdots j_n!} z_0^{j_0} \cdots z_n^{j_n} \frac{\partial^i}{\partial y_0^{j_0} \cdots \partial y_n^{j_n}} \\ &= i! \sum_{j_0+\cdots+j_n=i} \frac{1}{j_0! \cdots j_n!} z_0^{j_0} \cdots z_n^{j_n} \frac{\partial^i}{\partial y_0^{j_0} \cdots \partial y_n^{j_n}} \end{aligned}$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

3.1.1.2. Dado un polinomio $F \in BP$, homogéneo en y de grado m, se llama *polar* i-ésima, $i > 0$, de F a

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) = \frac{1}{i!}D^i(F) = \sum_{j_0+\cdots+j_n=i} \frac{1}{j_0!\cdots j_n!} z_0^{j_0}\cdots z_n^{j_n} \frac{\partial^i F}{\partial y_0^{j_0}\cdots \partial y_n^{j_n}}\,.$$

Extendemos la definición a $i = 0$ poniendo

$$\Pi^{(0)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F(\mathbf{z},\mathbf{y})) = F(\mathbf{y},\mathbf{y})\,.$$

De la propia definición se deduce que

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}\left[\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\right] &= \frac{1}{1!}D\left[\frac{1}{(i-1)!}D^{(i-1)}(F)\right]\\ &= \frac{1}{(i-1)!}D^{(i)}(F) = i\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\end{aligned}$$

luego

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) = \frac{1}{i}\Pi^{(1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}\left[\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\right].$$

3.1.1.3. Nótese que $\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) = 0$, para todo $i > m$, luego trataremos solamente con las polares i-ésimas para todo $i = 0, 1, \ldots, m$. Nótese también que, si $F \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, entonces $\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)$ es bihomogénea en $(\mathbf{z},\mathbf{y})$ de bigrado $(i, m-i)$. Por ejemplo, si $n = 2$ y $F = {y_0}^3{y_2}^2 - {y_1}^5$, la lista de polares es

$$\begin{aligned}
\Pi^{(0)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) &= {y_0}^3{y_2}^2 - {y_1}^5\\
\Pi^{(1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) &= 3\,{y_0}^2{y_2}^2z_0 - 5\,{y_1}^4z_1 + 2\,{y_0}^3y_2z_2\\
\Pi^{(2)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) &= 3\,y_0{y_2}^2{z_0}^2 + 6\,{y_0}^2y_2z_0z_2 - 10\,{y_1}^3{z_1}^2 + {y_0}^3{z_2}^2\\
\Pi^{(3)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) &= {y_2}^2{z_0}^3 + 6\,y_0y_2{z_0}^2z_2 + 3\,{y_0}^2z_0{z_2}^2 - 10\,{y_1}^2{z_1}^3\\
\Pi^{(4)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) &= 2\,y_2{z_0}^3z_2 + 3\,y_0{z_0}^2{z_2}^2 - 5\,y_1{z_1}^4\\
\Pi^{(5)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) &= {z_0}^3{z_2}^2 - {z_1}^5
\end{aligned}$$

3.1.1.4. Si $Q \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ y $F \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, se llama *polar* de Q respecto de F a la forma en $\mathbf{z}$

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},Q)}(F) = \sum_{j_0+\cdots+j_n=i} \frac{1}{j_0!\cdots j_n!} z_0^{j_0}\cdots z_n^{j_n} \frac{\partial^i F}{\partial y_0^{j_0}\cdots \partial y_n^{j_n}}(Q)\,,$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

que es de grado i. En el ejemplo de 3.1.1.2, si $Q = (1:0:0)$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
\Pi^{(0)}_{(Q,\mathbf{y})}(F) & = & 0 \\
\Pi^{(1)}_{(Q,\mathbf{y})}(F) & = & 0 \\
\Pi^{(2)}_{(Q,\mathbf{y})}(F) & = & {y_2}^2 \\
\Pi^{(3)}_{(Q,\mathbf{y})}(F) & = & 3\, z_0 {z_2}^2 \\
\Pi^{(4)}_{(Q,\mathbf{y})}(F) & = & 3\, {z_0}^2 {z_2}^2 \\
\Pi^{(5)}_{(Q,\mathbf{y})}(F) & = & {z_0}^3 {z_2}^2 - {z_1}^5
\end{array}$$

3.1.1.5. Normalmente, el concepto de polares o de polares de un punto se aplicará a formas de $F \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$; con ello, se obtendrá un contenido geométrico de la polar. Una forma $F \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$, con o sin factores múltiples, define un ciclo en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ como conjunto de puntos que la anulan. Del estudio de las polares de F, vamos a obtener propiedades geométricas del ciclo.

Vamos a estudiar algunas propiedades de las polares.

Notas 3.1.2.– Seguimos con las notaciones de las notas 3.1.1.

3.1.2.1. Si $i > 0$ se verifica que

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{y},\mathbf{y})}(F) = \frac{m-i+1}{i}\,\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{y},\mathbf{y})},$$

donde por $\Pi^{(i)}_{(\mathbf{y},\mathbf{y})}(F)$ se entiende la sustitución de $\mathbf{z}$ por $\mathbf{y}$ en $\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)$. En efecto, podemos escribir

$$\begin{array}{l}
i!\,\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F) = D^i(F) = D\,D^{i-1}(F) \\
\displaystyle\sum_{j_0+\cdots+j_n=i} \frac{(i-1)!}{j_0!\cdots j_n!} z_0^{j_0}\cdots z_n^{j_n} D\left(\frac{\partial^{i-1}F}{\partial y_0^{j_0}\cdots\partial y_n^{j_n}}\right) = \\
\displaystyle(i-1)! \sum_{j_0+\cdots+j_n=i-1} \frac{1}{j_0!\cdots j_n!} z_0^{j_0}\cdots z_n^{j_n} \sum_{k=0}^{n} z_k \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial^{i-1}F}{\partial y_0^{j_0}\cdots\partial y_n^{j_n}}\,.
\end{array}$$

Al hacer $\mathbf{z} = \mathbf{y}$, el teorema de Euler nos dice que

$$\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial^{i-1}F}{\partial y_0^{j_0}\cdots\partial y_n^{j_n}} = (m-i+1)\frac{\partial^{i-1}F}{\partial y_0^{j_0}\cdots\partial y_n^{j_n}},$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

luego

$$\begin{aligned} i\,\Pi^{(i)}_{(\mathbf{y},\mathbf{y})}(F) &= (m-i+1)\sum_{j_0+\cdots+j_n=i-1}\frac{1}{j_0!\cdots j_n!}y_0^{j_0}\cdots y_n^{j_n}\frac{\partial^{i-1}F}{\partial y_0^{j_0}\cdots\partial y_n^{j_n}} \\ &= (m-i+1)\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{y},\mathbf{y})}(F)\,, \end{aligned}$$

de donde

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{y},\mathbf{y})}(F) = \frac{m-i+1}{i}\,\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{y},\mathbf{y})}(F)$$

3.1.2.2. Como consecuencia de 3.1.2.1 obtenemos que, si un punto $Q \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ pertenece al ciclo (o hipersuperficie) $C : F = 0$, entonces pertenece a todas sus polares respecto de F. En efecto, supongamos que $F(Q) = 0$. La primera polar de $Q = (q_0 : q_1 : \ldots : q_n)$ respecto de F es

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{m} z_j \frac{\partial F}{\partial y_j}(Q)\,,$$

luego, por el teorema de Euler,

$$L(Q) = \sum_{j=0}^{m} q_j \frac{\partial F}{\partial y_j}(Q) = m\,F(Q) = 0\,,$$

luego Q anula a la primera polar. Supongamos que $i > 1$ y que Q anula a la polar $(i-1)$-ésima, o sea que $\Pi^{(i-1)}_{(Q,Q)}(F) = 0$. Así,

$$\Pi^{(i)}_{(Q,Q)}(F) = \frac{m-i+1}{i}\,\Pi^{(i-1)}_{(Q,Q)}(F) = 0\,.$$

Esto prueba el aserto.

En las notas siguientes relacionamos las polares con la fórmula de Taylor para sacar, primero, consecuencias relativas a las propias polares, y luego hechos geométricos claves sobre una hipersuperficie $C : F = 0$.

Notas 3.1.3.– Seguimos con las notaciones que venimos usando en este sección.

3.1.3.1. Sea, como siempre, $0 \neq F \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ una forma de grado $m > 0$. Operando con variables $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ como siempre, la fórmula de Taylor para funciones de varias variables nos dice que

$$F(\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i}\mu^i\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\,;$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

esta fórmula tiene varias consecuencias algebraicas que conviene detallar.

3.1.3.2. Es evidente que

$$F(\lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z}) = F(\mu \mathbf{z} + \lambda \mathbf{y})\,.$$

Sin embargo, en la fórmula de Taylor, ambas expresiones no son intercambiables, en principio, porque en la primera se deriva respecto de $\mathbf{y}$ y en la segunda respecto de $\mathbf{z}$. Lo que sí está claro es que ambas expresiones son formas de grado m en las dos variables $(\lambda\,,\mu)$, luego deben tener los mismos coeficientes de los mismos monomios en $\lambda\,,\mu$. En otras palabras, se debe verificar que

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})} = \Pi^{(m-i)}_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}\,, \quad \forall i = 0,1,\ldots,m\,.$$

Esto significa, evidentemente, que dentro de una única serie de polares, digamos $\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}$, es

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})} = \Pi^{(m-i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}\,, \quad \forall i = 0,1,\ldots,m\,,$$

aunque esta igualdad no es cierta a menos que se intercambien en uno solo de sus miembros las $\mathbf{y}$ con las $\mathbf{z}$. En 3.1.1.3 vemos que ilustrada esta propiedad.

3.1.3.3. Finalmente, sea $\mathbf{w} = (w_0, w_1\ldots, w_n)$ otra serie de variables; se verifica que

$$\Pi^{(i_1)}_{\mathbf{w},\mathbf{y}}\Pi^{(i_2)}_{\mathbf{z},\mathbf{y}}(F) = \Pi^{(i_2)}_{\mathbf{z},\mathbf{y}}\Pi^{(i_1)}_{\mathbf{w},\mathbf{y}}(F)\,.$$

En efecto, que

$$\Pi^{(1)}_{\mathbf{w},\mathbf{y}}\Pi^{(1)}_{\mathbf{z},\mathbf{y}}(F) = \Pi^{(1)}_{\mathbf{z},\mathbf{y}}\Pi^{(1)}_{\mathbf{w},\mathbf{y}}(F)$$

es consecuencia trivial de que conmutan los dos operadores diferenciales

$$\sum_{j=0}^{m} z_j \frac{\partial}{\partial y_j}\,, \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{m} w_j \frac{\partial}{\partial y_j}\,.$$

El caso general se deduce trivialmente de éste y de que, por 3.1.1.2, es

$$\Pi^{(i)}_{\mathbf{z},\mathbf{y}}(F) = \frac{1}{i!}\left(\Pi^{(1)}_{\mathbf{z},\mathbf{y}}\right)(F)\,,$$

donde, por potencia, entendemos siempre composición.

3.1.3.4. En general, se puede aligerar el lenguaje hablando del *operador polar i-ésima*, que es el operador diferencial

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})} = \frac{1}{i!}D^i(F) = \sum_{j_0+\cdots+j_n=i} \frac{1}{j_0!\cdots j_n!} z_0^{j_0}\cdots z_n^{j_n} \frac{\partial^i}{\partial y_0^{j_0}\cdots\partial y_n^{j_n}}\,.$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Entrando ya en polares de puntos, tenemos el siguiente

Teorema 3.1.4.– TEOREMA DE RECIPROCIDAD DE LAS POLARES: *Sea* $0 \neq F \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ *una forma de grado* $m > 0$ *y sean* $Q, Q' \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *dos puntos. Si la polar* i*-ésima de* Q *respecto de* F *pasa por* Q'*, la polar* $(m-i)$*-ésima de* Q' *respecto de* F *pasa por* Q

Demostración: Como, cuando se van a hallar valores de un polinomio en un punto concreto da igual el nombre de las variables, podemos suponer que $F \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ ó $F \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ con la misma expresión intercambiado cada y_j con z_j. El hecho de que la polar i-ésima de Q pase por Q' se expresa diciendo que se obtiene 0 al sustituir $\mathbf{y}$ por Q y $\mathbf{z}$ por Q' en $\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}$, lo que se puede escribir simbólicamente: $0 = \Pi^{(i)}_{(Q',Q)}$. Por 3.1.3.2 es $\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})} = \Pi^{(m-i)}_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}$, luego, con las mismas sustituciones $0 = \Pi^{(mi)}_{(Q,Q')}$. □

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

3.2. Intersección de hipersuperficie y recta

Vamos a plantearnos el siguiente problema: se da una hipersuperficie $C : F = 0$, que no pasa por $P_n = (0 : \ldots : 0 : 1)$, donde F es una forma de grado m sin componentes múltiples y un punto $Q = (q_0 : q_1 : \ldots : q_n) \in C$. Se considera una recta arbitraria ϱ que pase por Q y no por P_n (luego el sistema de referencia está en posición general respecto de C y ϱ). Se trata de estudiar la multiplicidad de intersección de C y ϱ en Q, donde vamos a definir sobre la marcha este concepto en toda su generalidad, viendo que coincide con el ya definido para $n = 2$. El instrumento será la fórmula de Taylor, en la que usaremos ampliamente el concepto de polar i-ésima.

Notas 3.2.1.– El lugar fundamental de nuestros estudios lo van a ocupar las derivadas parciales

$$\frac{\partial^i F}{\partial y_0^{j_0} \cdots \partial y_{n-1}^{j_{n-1}} \partial y_n^{j_n}}(Q), \quad j_0 + \cdots + j_{n-1} + j_n = i$$

de orden arbitrario i de F, evaluadas en Q, para $i = 1, \ldots, m$. Es evidente que hay algunas no nulas porque al menos algunas de las de orden m lo son, ya que son constantes no nulas, porque F es una forma de grado m. Para evitar complicar el lenguaje, consideraremos que hay una única derivada parcial de orden cero, que es F.

3.2.1.1. Si $s \geq 0$ es un índice tal que todas las derivadas parciales de orden s se anulan en Q, entonces todas las derivadas parciales de orden $i < s$ (si las hay) se anulan en Q. En efecto, el teorema de Euler expresa las derivadas de orden $p - 1$ como combinación lineal, con coeficientes las variables por un número racional, de las derivadas de orden p, de donde la conclusión.

Para estudiar la intersección de C con la recta ϱ que pasa por Q, emplearemos la fórmula de Taylor y las polares. Si $Q' \neq Q$ es un punto, las ecuaciones paramétricas de $\varrho = QQ'$ son

$$y_i = \lambda q_i + \mu q_i',, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

donde $Q = (q_0 : \ldots, : q_n)$ y $Q' = (q_0' : \ldots, : q_n')$. Abreviadamente escribiremos estas paramétricas en la forma $\mathbf{y} = \lambda Q + \mu Q'$. En estas circunstancias, la ecuación en λ, μ dada por $0 = F(\lambda Q + \mu Q')$, describe la intersección $QQ' \cap C$, en el sentido siguiente:

1. Si $F(\lambda Q + \mu Q')$ es idénticamente nula, entonces $QQ' \subset C$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

2. Si $F(\lambda Q + \mu Q') \neq 0$, es una forma de grado m en (λ, μ), determina m puntos $(\lambda_i, \mu_i) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $i = 1, \dots, m$ que son exactamente aquéllos que la anulan (de los que algunos pueden coincidir). Llevados a $\lambda Q + \mu Q'$ nos producen los m puntos de intersección de QQ' con C (repetimos que algunos pueden coincidir).

Así pues, el estudio de $QQ' \cap C$ se traduce en la resolución de la ecuación $F(\lambda Q + \mu Q') = 0$. La expresión de $F(\lambda Q + \mu Q')$ se obtiene de la fórmula de Taylor para varias variables que, teniendo en cuenta que $F(Q) = 0$, se escribe abreviadamente en este caso

$$F(\lambda Q + \mu Q') = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{m-i} \mu^i \Pi^{(i)}_{Q',Q}(F)\,,$$

donde $\Pi^{(i)}_{\mathbf{z},\mathbf{y}}(F)$ es la polar i-ésima de F en las dos series de variables $\mathbf{z}\,,\mathbf{y}$ (véase 3.1.1.2).

3.2.1.2. Sea s el mínimo entero i tal que $\Pi^{(i)}_{\mathbf{z},Q}(F) \neq 0$; entonces a s se le llama la *multiplicidad del punto Q en la hipersuperficie C*. Si $s = 1$ se dirá que Q *es simple* y si $s > 1$ se dirá que Q *es un punto singular* o *un punto s-uple* de C. En los apartados siguientes damos contenido geométrico a estas palabras. Conservamos en lo que sigue la definición del entero s.

3.2.1.3. El conjunto de los puntos que anulan a cada polar de Q es un ciclo, porque las polares pueden tener factores múltiples. En cualquier caso, como conjunto, es una hipersuperficie, definida por la igualación a cero del producto de los factores irreducibles con exponente 1. Nótese que hemos cambiado las variables $\mathbf{y}$ por $\mathbf{z}$, pero esto no afecta a nuestros razonamientos. Recordemos que Q anula a cualquier polar $\Pi^{(i)}_{\mathbf{z},Q}(F)$ por 3.1.2.2.

3.2.1.4. Como $\Pi^{(s)}_{\mathbf{z},Q}(F) \neq 0$ existe todo un abierto U de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de puntos que no la anulan, pudiéndose suponer siempre que $QP_n \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus U$. Sea $Q' \in U$ y sea $Q'' = \lambda_0 Q + \mu_0 Q' \in QQ' \setminus \{Q\}$, entonces $\mu_0 \neq 0$. Podemos escribir las ecuaciones paramétricas de $QQ' = QQ''$ en la forma

$$\mathbf{y} = \lambda Q + \mu Q'' = (\lambda + \mu\lambda_0)Q + \mu\mu_0 Q'$$

con notación abreviada obvia. La fórmula de Taylor nos dice entonces que

$$F(\lambda Q + \mu Q'') = \sum_{i=s}^{m} (\lambda + \mu\lambda_0)^{m-i} (\mu\mu_0)^i \Pi^{(i)}_{Q',Q}(F)\,.$$

Como $\Pi^{(s)}_{Q',Q}(F) \neq 0$, la ecuación $0 = F(\lambda Q + \mu Q'')$ tiene a $\mu\mu_0 = 0$ como raíz múltiple de orden s, o sea, a $\mu = 0$ como raíz múltiple de orden s. Esto significa

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

que la recta QQ' corta a C Q en exactamente s puntos confundidos, y que este hecho no depende del punto Q' que tomemos dentro de esa recta fijada.

3.2.1.5. Supongamos ahora lo contrario, que Q'' anula a $\Pi^{(s)}_{\mathbf{z},Q}(F)$; por 3.2.1.4, no puede haber ningún punto $Q' \in QQ''$ que no anule a $\Pi^{(s)}_{\mathbf{z},Q}(F)$. Esto significa que el ciclo $\Pi^{(s)}_{\mathbf{z},Q}(F) = 0$ (o la hipersuperficie correspondiente) es una unión de rectas que pasan por P, por eso se le llama un *cono*. De hecho, se le llama *el cono tangente* a C en Q por la razón que explicamos a continuación.

Dada una recta ϱ, sólo pueden ser posibles uno de estos tres casos:

1. $\varrho \subset C$. Esto significa que, si $\varrho = QQ'$, $Q' \neq Q$, entonces Q' pertenece a todos los ciclos polares de Q respecto de F.

2. $\varrho \not\subset C$ y ϱ no pertenece al cono tangente a C en P; entonces ϱ corta a C en Q en exactamente s puntos confundidos.

3. $\varrho \not\subset C$ y ϱ pertenece al cono tangente a C en P. Sea $Q \neq Q' \in \varrho$; entonces $F(\lambda Q + \mu Q') = 0$ tiene a $\mu = 0$ como raíz múltiple de multiplicidad $s' > s$. Este s' no depende del punto Q' que tomemos sobre ϱ, como demostramos en el apartado siguiente 3.2.1.6. Así pues, podemos decir que ϱ corta a C en Q en exactamente s' confundidos.

Entonces, si $\varrho \not\subset C$, llamamos *multiplicidad de intersección de ϱ y C* en Q al número de puntos confundidos en Q en que ϱ corta a C en Q. Así, las rectas no contenidas en el cono tangente a C en Q dan multiplicidad de intersección con C en Q la mínima posible, y las contenidas en el cono tangente la dan mayor. Esto justifica el llamar a s la multiplicidad de Q en C. Más adelante veremos que, en el caso de curvas planas, esta noción dada aquí de multiplicidad de intersección de recta e hipersuperficie coincide con la obtenida a través de la resultante.

3.2.1.6. Sea $Q'' = \lambda_0 Q + \mu_0 Q' \neq Q$, es $\mu_0 \neq 0$; sabemos que, para las indeterminadas (λ, μ), el exponente más bajo de μ que aparece en $F(\lambda Q + \mu Q')$ es s'. Entonces, para nuevas variables (α, β),

$$F(\alpha Q + \beta Q'') = F((\alpha + \beta\lambda_0)Q + \beta\mu_0 Q') = \sum_{i=s'}^{m} (\alpha + \beta\lambda_0)^{m-i}(\beta\mu_0)^i \Pi^{(i)}_{Q',Q}(F) \,.$$

La mera observación de esta expresión indica que $\beta^{s'}$ aparece como potencia en ella y es la mínima (aparece en el monomio $\mu_0^{s'} \alpha^{m-s'} \beta^{s'}$ y sólo en él).

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Teorema 3.2.2.– *Sea $C : F = 0$ una hipersuperficie de grado m y $Q \in C$ un punto. Entonces Q es singular si y sólo si*

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y_0}(Q) = \frac{\partial F}{\partial y_1}(Q) = \cdots \frac{\partial F}{\partial y_n}(Q)\,.$$

Si Q es simple, el cono tangente a C en Q es el hiperplano

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y_0}(Q)y_0 + \frac{\partial F}{\partial y_1}(Q)y_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}(Q)y_n\,,$$

que se llama el hiperplano tangente a C en Q. Los puntos Q que pertenecen a dos componentes irreducibles distintas de C son singulares en C. Un punto Q que pertenece a una sola componente irreducible C_1 de C en Q es singular (resp. simple) en C si y sólo si lo es en C_1. En consecuencia, si C no tiene puntos singulares, es irreducible. Si C es un ciclo, no hipersuperficie, todo punto que pertenece a una componente múltiple es singular.

Demostración: La demostración es extrordinariamente sencilla: se trata de poner en palabras geométricas los cálculos algebraicos de las notas 3.2.1. Un punto $Q \in C$ es singular si y sólo si tiene multipliciddad mayor que 1, o sea si y sólo si es idénticamente nula su primera polar. Como ésta es (usando variables $\mathbf{y}$)

$$\frac{\partial F}{\partial y_0}(Q)y_0 + \frac{\partial F}{\partial y_1}(Q)y_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}y_n\,,$$

para que sea idénticamente nula tiene que ocurrir que

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(Q) = 0\,, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Si Q es simple, su multiplicidad es 1, luego su primera polar es distinta de cero e, igualada a cero, es la ecuación del cono tangente. Así éste es

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y_0}(Q)y_0 + \frac{\partial F}{\partial y_1}(Q)y_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}(Q)y_n\,,$$

que, claramente, representa un hiperplano porque no todos los coeficientes son cero.

Sea $F = F_1 \cdots F_r$ la descomposición factorial de F, donde los F_i son irreducibles y supongamos que $r > 1$ y que, por ejemplo, Q anula a F_1 y a F_2. Escribamos $F = F_1F_2G$, donde G es el producto de los restantes factores irreducibles, o 1 si no hay más. Para todo $j = 0, 1, \ldots, n$ es

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(Q) = \frac{\partial F_1}{\partial y_j}(Q)(F_2G)(Q) + F_1(Q)\frac{\partial (F_2G)}{\partial y_j}(Q) = 0$$

luego Q es singular en C. Supongamos que Q anula a F_1 y sólo a ella y escribamos, esta vez, $F = F_1 G$ donde $G(Q) \neq 0$. Si Q es singular en C debe ser, para todo $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y_j}(Q) = \frac{\partial F_1}{\partial y_j}(Q)G(Q) + F_1(Q)\frac{\partial G}{\partial y_j}(Q) = \frac{\partial F_1}{\partial y_j}(Q)G(Q)\,.$$

Como $G(Q) \neq 0$, esto ocurre si y sólo si $(\partial F_1/\partial y_j)(Q) = 0$, para todo $j = 0, 1, \ldots, n$, luego si y sólo si Q es singular en $C_1 : F_1 = 0$.

Para demostrar que una hipersuperficie con puntos singulares es irreducible basta ver que dos hipersuperficies siempre se cortan. Sea $C : F = 0$, $D : G = 0$ dos hipersuperficies; si tienen una componente irreducible común es claro que se cortan. Supongamos que no, y supongamos elegido el punto $P_n = (0 : \ldots : 1) \notin C \cup D$; si p y q son los grados de F y G respectivamente, podemos escribir

$$\begin{aligned} F &= y_n^p + a_1(y_0, \ldots, y_{n-1}) y_n^{p-1} + \cdots + a_p(y_0, \ldots, y_{n-1}) \\ G &= y_n^q + b_1(y_0, \ldots, y_{n-1}) y_n^{q-1} + \cdots + b_q(y_0, \ldots, y_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Como C y D no tienen componentes en común, la resultante $R(y_0, \ldots, y_{n-1})$ de F y G respecto de y_n no es nula y es una forma de grado pq. Siempre hay puntos de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ que la anulan: un número finito si $n = 2$ e infinitos si $n > 2$. Para cada uno de esos puntos, $(\alpha_0 : \ldots : \alpha_{n-1})$ hay un único punto $(\alpha_0 : \ldots : \alpha_{n-1} :) \in C \cap D$, luego $C \cap D \neq \emptyset$.

Finalmente, supongamos que F_1 es irreducible y $F_1^2 | F$; entonces $F = F_1^2 G$. Sea $Q \in C$ tal que $F_1(Q) = 0$; para todo $j = 0, 1, \ldots, n$, es

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(Q) = 2F_1(Q)\frac{\partial F_1}{\partial y_j}(Q)G(Q) + F_1^2(Q)\frac{\partial G}{\partial y_j}(Q) = 0$$

luego Q es singular en C. □

Teorema 3.2.3.– *Sea $n = 2$ y $C : F = 0$ una curva plana (¡no ciclo!). Entonces C tiene sólo un número finito de puntos singulares (que puede ser ninguno). El hiperplano tangente en los puntos simples se llama simplemente la tangente.*

Demostración: Se puede suponer que C es irreducible. En efecto, si demostramos, bajo esta hipótesis, que hay sólo un número finito de puntos singulares, lo tendremos en general porque:

1. Hay sólo un número finito de componentes irreducibles, luego hay sólo un número finito de puntos de intersección entre ellas, que son singulares.

2. Fuera de esos puntos, los que pertenecen sólo a una componente irreducible son singulares en C si y sólo si lo son en la componente, y hemos afirmado que vamos a demostrar que una curva irreducible tiene sólo un número finito de puntos singulares.

Supongamos, pues, que F es irreducible. Podemos elegir un sistema de referencia proyectivo en el cual el punto $(0:0:1) \notin C$; entonces podemos escribir

$$F = y_2^m + a_1(y_0, y_1)y_2^{m-1} + \cdots + a_m(y_0, y_1)$$

donde las $a_i(y_0, y_1)$ son formas de grado i en las variables que se indican. Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = my_2^{m-1} + (m-1)a_1(y_0, y_1)y_2^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(y_0, y_1)\,.$$

Si $m = 1$, entonces $\partial F/\partial y_2 = 1 \neq 0$, con lo que C no puede tener puntos singulares. Es decir, *una recta no tiene puntos singulares*. Supongamos, de ahora en adelante, que $m > 1$.

Sea R el discriminante de F con respecto a y_2, es decir, la resultante de F y $\partial F/\partial y_2$; entonces $R \neq 0$ porque, en caso contrario, F y $\partial F/\partial y_2$ deberían tener un factor común, que tiene que ser F por irreducibilidad. Pero eso es imposible porque F es de grado m y $\partial F/\partial y_2$ es de grado $m - 1$.

Ahora bien, R es una forma de grado $m(m-1)$ en y_0, y_1, luego hay exactamente $m(m-1)$ puntos

$$(\alpha_{10}:\alpha_{11}), \ldots, (\alpha_{m(m-1),0}:\alpha_{m(m-1),1})$$

de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ que la anulan (algunos pueden coincidir). Para cada $i = 1, \ldots, m(m-1)$, el sistema

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & y_2^m + a_1(\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1})y_2^{m-1} + \cdots + a_m(\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}) \\ 0 & = & my_2^{m-1} + (m-1)a_1(\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1})y_2^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}) \end{array}$$

tiene una única solución común (el sistema de referencia está en posición general respecto de ambas). En resumen, el sistema $0 = F = \partial F/\partial y_2$ tiene un número finito de soluciones distintas. Como el conjunto de puntos singulares de C es un subconjunto de éste, se deduce el enunciado. $\square$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

Ejemplo 3.2.4.– Una cúbica elíptica escrita en forma de Weirstraß no tiene puntos singulares. Sea

$$F = y_0 y_2^2 + (y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_2 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0)$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ y distintos. Vamos a probar que $C : F = 0$ no tiene puntos singulares. Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial y_0} &= y[2]^2 + \alpha_1(y_1 - \alpha_2 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) + \\ &\quad \alpha_2(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) + \alpha_3(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_2 y_0) \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial y_1} &= -(y_1 - \alpha_2 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) - (y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) \\ &\quad -(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_2 y_0) \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial y_2} &= 2 y_0 y_2 \end{aligned}$$

La anulación de la tercera ecuación nos conduce a que $y_0 = 0$ ó $y_2 = 0$. Para $y_0 = 0$ tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = -3 y_1^2,$$

luego $y_1 = 0$. Para $0 = y_0 = y_1$, la anulación de la primera derivada nos da $y_2^2 = 0$, luego $y_2 = 0$ y así el sistema no da solución. Para $y_2 = 0$, las ecuaciones primera y segunda nos dan

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1(y_1 - \alpha_2 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) + \alpha_2(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) \\ &\quad + \alpha_3(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_2 y_0) \\ 0 &= -(y_1 - \alpha_2 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) - (y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) \\ &\quad -(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_2 y_0). \end{aligned}$$

Restando a la primera ecuación α_1 por la segunda, nos queda

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_2 - \alpha_1)(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_3 y_0) \\ &\quad + (\alpha_3 - \alpha_1)(y_1 - \alpha_1 y_0)(y_1 - \alpha_2 y_0) \end{aligned}$$

o sea

$$0 = (y_1 - \alpha_1 y_0)[(-2\,\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_2)\, y_1 + (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 - 2\,\alpha_2\alpha_3)\, y_0]$$

Esta ecuación da lugar a dos puntos $(1 : \alpha_1 : 0)$ y

$$(2\,\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 : \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 - 2\,\alpha_2\alpha_3 : 0)$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Sustituyendo el primer punto en $\partial F/\partial y_1$ tenemos $-(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)$, que es distinto de cero. Sustituyendo el segundo punto en $\partial F/\partial y_1$ obtenemos

$$3\,(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)$$

que también es distinto de cero. Así pues el sistema es incompatible, y no hay puntos singulares.

Ejemplo 3.2.5.– Sea $0 \neq F \in \mathbb{C}[y_0,y_1,y_2]$ una forma de grado m cuyas componentes puedan ser múltiples, $C = V(F)$ el lugar de los puntos que anulan a F. Supongamos que existe un punto $Q \in C$ de multiplicidad m; entonces C es unión de m rectas que pasan por Q, de las que algunas pueden coincidir. En particular, si F no tiene factores múltiples, entonces C es unión de m rectas distintas que pasan por Q.

Es evidente que basta con probar el segundo enunciado, aquél en que F no tiene factores múltiples. Sea $Q = (q_0:q_1:q_2) \in C$ y Sea $Q \neq Q' = (q'_0:q'_1:q'_2) \in C$; escribamos las ecuaciones paramétricas de la recta QQ' en la forma

$$y_0 = \lambda q_0 + \mu q'_0,\quad y_1 = \lambda q_1 + \mu q'_1,\quad y_2 = \lambda q_2 + \mu q'_2\,.$$

Por las notas 3.2.1, la multiplicidad de intersección con C en Q de la recta QQ' debe ser mayor o igual que la multiplicidad de Q, que es m, luego

$$\begin{aligned}&F(\lambda q_0+\mu q'_0,\lambda q_1+\mu q'_1,\lambda q_2+\mu q'_2) =\\ &\mu^m \sum_{i_0+i_1+i_2=m} \frac{1}{i_0!i_1!i_2!}\frac{\partial^m F}{\partial y_0^{i_0}\partial y_1^{i_1}\partial y_2^{i_2}}(q'_0)^{i_0}(q'_1)^{i_1}(q'_2)^{i_2} =\\ &\mu^m F(q'_0,q'_1,q'_2) = 0\,,\end{aligned}$$

lo que significa que toda la recta QQ' está contenida en C. Esto implica que F es divisible por la forma lineal que, igualada a cero, suministra una ecuación implícita de QQ'. Si $C = QQ'$, entonces nuestra demostración ha terminado. Si no, volvemos a tomar otro punto $Q \neq Q'_1 \in C \setminus QQ'$, procediendo igual, y así sucesivamente. Esto prueba nuestro aserto.

Para terminar esta sección vamos a demostrar que la multiplicidad de intersección de recta y curva plana en un punto, definida como en 3.2.1.5, coincide con la definida a través de la resultante, en la definición 2.2.5. Esto se hace en las notas 3.2.6.

Nota 3.2.6.– Sea C una curva plana definida por una ecuación $F = 0$, donde F es una forma de grado m sin factores múltiples de tal forma que $P_2 = (0:0:1) \notin C$. Sea $Q = (q_0:q_1:q_2) \in C$ y sea $\varrho : \ell = 0$ una recta que pase por Q y no por P_2,

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

donde ℓ es una forma lineal; suponemos que ϱ no es una componente rectilínea de C. Entonces el sistema de referencia está en posición general respecto de ambas. Sea $0 \neq R \in \mathbb{C}[y_0, y_1]$ la resultante de F y ℓ; se puede escribir

$$R = (q_0 y_1 - q_1 y_0)^s \varphi(y_0, y_1)\,,$$

donde $s \in \mathbb{Z}_+$ y φ es una forma de grado $m - s$ (la resultante tiene grado $m \cdot 1 = m$) no divisible por $(q_0 y_1 - q_1 y_0)$. Por otra parte, R pertenece al ideal engendrado por F y ℓ, luego

$$R = g(y_0, y_1, y_2) F(y_0, y_1, y_2) + h(y_0, y_1, y_2)\ell\,.$$

La homogeneidad y los grados implican que g debe ser una constante y h una forma de grado $m - 1$.

Sean

$$y_0 = \lambda q_0 + \mu q_0'\,, \quad y_1 = \lambda q_1 + \mu q_1'\,, \quad y_2 = \lambda q_2 + \mu q_2'$$

las ecuaciones paramétricas de ϱ, donde $Q' = (q_0' : q_1' : q_2')$ es un punto arbitrario del plano no alineado con Q y P_2; tenemos que

$$R(\lambda q_0 + \mu q_0', \lambda q_1 + \mu q_1', \lambda q_2 + \mu q_2') = gF(\lambda q_0 + \mu q_0', \lambda q_1 + \mu q_1', \lambda q_2 + \mu q_2')\,.$$

Así,

$$\begin{aligned} &F(\lambda q_0 + \mu q_0', \lambda q_0 + \mu q_1', \lambda q_2 + \mu q_2') = \\ &(1/g)[q_0(\lambda q_1 + \mu q_1') - q_1(\lambda q_0 + \mu q_0')]^s \varphi(\lambda q_0 + \mu q_0', \lambda q_1 + \mu q_1') = \\ &(1/g)\mu^s \det \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ q_0' & q_1' \end{pmatrix}^s \varphi(\lambda q_0 + \mu q_0', \lambda q_1 + \mu q_1')\,. \end{aligned}$$

Aquí,

$$\det \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ q_0' & q_1' \end{pmatrix} \neq 0$$

porque Q y Q' no están alineados con $(0:0:1)$. Por otra parte, la fórmula de Taylor permite escribir

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda q_0 + \mu q_0', \lambda q_1 + \mu q_1') = \\ &\lambda^{m-s}\varphi(q_0, q_1) + \\ &\sum_{i=1}^{m-s} \lambda^{m-s-i}\mu^i \sum_{i_0+i_1=i} \frac{1}{i_0! i_1!} \frac{\partial^i \varphi}{\partial y_0^{i_0} \partial y_1^{i_1}}(q_0, q_1)(q_0')^{i_0}(q_1')^{i_1}\,. \end{aligned}$$

Pero $\varphi(q_0, q_1) \neq 0$ porque $\varphi(y_0, y_1)$ no es divisible por $(q_0 y_1 - q_1 y_0)$. Por tanto, $\mu = 0$ es una raíz de

$$F(\lambda q_0 + \mu q_0', \lambda q_0 + \mu q_1', \lambda q_2 + \mu q_2') = 0$$

de orden exactamente s. Esto prueba nuestro aserto.

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

3.3. Geometría de la tangencia

Vamos a comenzar esta sección tratando un problema insoslayable: cómo se comportan los distintos conceptos introducidos frente a los cambios de coordenadas.

Notas 3.3.1.– Sea $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{y}' A$ un cambio de coordenadas en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, donde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.3.1.1. Sea $0 \neq F(\mathbf{y})$ una forma de grado $m > 0$, cuya igualación a cero es la ecuación de un ciclo en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Aplicando el cambio de coordenadas anterior, el ciclo tiene en las nuevas coordenadas la ecuación $F'(\mathbf{y}') = 0$, donde $F'(\mathbf{y}') = F(\mathbf{y}'A)$. La regla de la cadena permite, entonces, escribir

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F'}{\partial y'_0}(\mathbf{y}') & = & \dfrac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_0}{\partial y'_0} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_1}{\partial y'_0} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_n}{\partial y'_0} \\ \dfrac{\partial F'}{\partial y'_1}(\mathbf{y}') & = & \dfrac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_0}{\partial y'_1} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_1}{\partial y'_1} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_n}{\partial y'_1} \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial F'}{\partial y'_n}(\mathbf{y}') & = & \dfrac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_0}{\partial y'_n} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_1}{\partial y'_n} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A)\dfrac{\partial y_n}{\partial y'_n}, \end{array}$$

o sea

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F'}{\partial y'_0}(\mathbf{y}') & = & \alpha a_{00}\dfrac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A) + \alpha a_{01}\dfrac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A) + \cdots + \alpha a_{0n}\dfrac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A) \\ \dfrac{\partial F'}{\partial y'_1}(\mathbf{y}') & = & \alpha a_{10}\dfrac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A) + \alpha a_{11}\dfrac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A) + \cdots + \alpha a_{1n}\dfrac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A) \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial F'}{\partial y'_n}(\mathbf{y}') & = & \alpha a_{n0}\dfrac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A) + \alpha a_{n1}\dfrac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A) + \cdots + \alpha a_{nn}\dfrac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A), \end{array}$$

que se escribe

$$\left(\frac{\partial F'}{\partial y'_0}(\mathbf{y}'), \frac{\partial F'}{\partial y'_1}(\mathbf{y}'), \ldots, \frac{\partial F'}{\partial y'_n}(\mathbf{y}')\right) =$$
$$\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A), \frac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A), \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A)\right) A^t$$

Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

o, abreviadamente,
$$\frac{\partial F'}{\partial \mathbf{y}'}(\mathbf{y}') = \alpha \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}'A)A^t\,,$$
donde A^t es la traspuesta de A. Estos razonamientos significan que, si Q es un punto, si $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ es un vector de coordenadas primitivas de Q y si $\mathbf{q}' = (q'_0, q'_1, \ldots, q'_n)$ es un vector de Q en las nuevas coordenadas, entonces existe un $\alpha' \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbf{q} = \alpha'\mathbf{q}'A$. Por tanto,
$$\frac{\partial F'}{\partial \mathbf{y}'}(\mathbf{q}') = \alpha(\alpha')^{m-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{q}'A)A^t\,,$$
luego, vectorialmente,
$$\frac{\partial F'}{\partial \mathbf{y}'}(\mathbf{q}') = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}\,.$$
En otras palabras, *el concepto de punto simple o singular del ciclo $F = 0$ no depende de las coordenadas*.

3.3.1.2. Afinemos un poco más nuestros razonamientos para ver cómo se comportan las polares bajo el cambio de coordenadas. El comportamiento de la primera polar se deduce fácilmente de 3.3.1.1. En efecto,
$$\begin{aligned}
\Pi^{(1)}_{(\mathbf{z}',\mathbf{y}')}(F') &= \left(\frac{\partial F'}{\partial y'_0}(\mathbf{y}'), \frac{\partial F'}{\partial y'_1}(\mathbf{y}'), \ldots, \frac{\partial F'}{\partial y'_n}(\mathbf{y}')\right)\begin{pmatrix} z'_0 \\ z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial y_0}(\mathbf{y}'A), \frac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}'A), \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_n}(\mathbf{y}'A)\right) A^t \begin{pmatrix} z'_0 \\ z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \\
&= \Pi^{(1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}'A,\,\mathbf{z}=\mathbf{z}'A}\,,
\end{aligned}$$
que es la fórmula coherente con el cambio de coordenadas. Hemos suprimido las constantes multiplicativas por simplicidad.

Supongamos que $i > 1$ es un índice, y supongamos que
$$\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{z}',\mathbf{y}')}(F') = \Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}'A,\,\mathbf{z}=\mathbf{z}'A}\,;$$
entonces
$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z}',\mathbf{y}')}(F') = \frac{1}{i}\Pi^{(1)}_{(\mathbf{z}',\mathbf{y}')}\left[\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{z}',\mathbf{y}')}(F')\right] = \frac{1}{i}\Pi^{(1)}_{(\mathbf{z}',\mathbf{y}')}\left[\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}'A,\,\mathbf{z}=\mathbf{z}'A}\right]$$

Reina Mercedes s.n. - 41012 Sevilla - Tlfno: +34 954 55 6946 - Fax: +34 954 55 6938 - http://www.us.es/da - secalg@algebra.us.es

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Álgebra

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{i}\Pi^{(1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}\left[\Pi^{(i-1)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{y}'A\,,\,\mathbf{z}=\mathbf{z}'A} \\
&= \Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},\mathbf{y})}(F)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}'A\,,\,\mathbf{z}=\mathbf{z}'A}\,,
\end{aligned}
$$

lo que nos da la fórmula general del cambio de coordenadas en las polares.

Ahora bien, sea $Q \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ y sea Q' su transformado mediante el cambio, de tal manera que $Q = Q'A$. Las fórmulas anteriores nos dicen que, para todo $i = 1, \ldots, m$, es

$$\Pi^{(i)}_{(\mathbf{z},Q)}(F) = 0 \iff \Pi^{(i)}_{(\mathbf{z}',Q')}(F') = 0$$

luego la multiplicidad de un punto es invariante por cambio de coordenadas.

Supongamos ahora que $Q \neq \tilde{Q} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es otro punto y $\tilde{Q}'$ es su transformado mediante el cambio, de tal manera que $\tilde{Q} = \tilde{Q}'A$. Los cálculos anteriores implican asimismo que

$$\Pi^{(i)}_{(\tilde{Q},Q)}(F) = 0 \iff \Pi^{(i)}_{(\tilde{Q}',Q')}(F') = 0$$

luego la multiplicidad de intersección en Q de la recta $Q\tilde{Q}$ con el ciclo $F = 0$ es invariante por cambio de coordenadas.