Tema 8.- Hipercuádricas afines. Clasificación. Interpretación proyectiva de propiedades afines.

8.1 Hipercuádricas afines

Sea k un cuerpo de característica distinta de dos.
Definición 8.1.1.– Una *hipercuádrica afín* en k^n es una ecuación de segundo grado en n variables, salvo escalar

A cada polinomio

$$f = f(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i+j\leq 2} \alpha_{ij} y_i y_j$$

se le asocia una matriz simétrica A_f con coeficientes en k tal que

$$f(y_1, \ldots, y_n) = (1, y_1, \ldots, y_n) A_f (1, y_1, \ldots, y_n)^t$$

(se ha utilizado aquí que el cuerpo es de característica distinta de dos). Por tanto una hipercuádrica afín de k^n es, salvo escalar, una ecuación $YAY^t = 0$, con $Y = (1, y_1, \ldots, y_n)$ y A una matriz simétrica de orden $n+1$.
Definición 8.1.2.– Si Q es una hipercuádrica afín en k^n se llama *hipercuádrica lugar* asociada a Q al conjunto

$$\mathcal{V}_a(Q) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n \,|\, f(a_1, \ldots, a_n) = 0\},$$

donde $f = 0$ es una ecuación de Q.

Nota 8.1.3.– Obviamente la definición anterior es consistente, es decir, el conjunto $\mathcal{V}_a(Q)$ no depende del representante f elegido.

Nota 8.1.4.– Recordamos que un sistema de referencia afín en k^n está dado por $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$, donde O es un punto de k^n y $\mathcal{B}$ es una base del espacio vectorial k^n. El ejemplo más elemental es el del sistema de referencia canónico, dado por $O = (0, \ldots, 0)$ y por la base canónica de k^n, en donde el punto $(a_1, \ldots, a_n)$ de k^n tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ respecto del sistema de referencia canónico. Por otra parte, si $\mathcal{R}' = \{O'; \mathcal{B}'\}$ es otro sistema de referencia afín en k^n, las ecuaciones del cambio de sistema de referencia afín son de la forma:

$$(1, y_1, \ldots, y_n) = (1, y'_1, \ldots, y'_n) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & m_{01} & \ldots & m_{0n} \\ \hline 0 & m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n0} & \ldots & m_{nn} \end{array} \right),$$

o bien, $Y = Y'M$, con la notación obvia.
Por tanto, dada una hipercuádrica afín Q de ecuación $YAY^t = 0$, respecto de un sistema de referencia afín $\mathcal{R}$, en otro sistema de referencia afín $\mathcal{R}'$, una ecuación de Q es: $0 = (Y'M)A(Y'M)^t = Y'BY'^t$ con $B = MAM^t$ también simétrica, siendo M una matriz de cambio de sistema de referencia afín. Nótese que esta matriz M es una matriz de orden $n+1$ inversible 'especial' por su primera columna.

Definición 8.1.5.– Sean Q y Q' dos hipercuádricas afines en k^n. Se dice que Q es *afínmente equivalente* a Q' (y se representa $Q \sim_a Q'$) si existe un cambio de sistema de referencia afín de k^n que transforma una ecuación de Q en una ecuación de Q'. Es decir, si $YAY^t = 0$, $YBY^t = 0$, son ecuaciones de Q y Q' respectivamente, entonces A y B son congruentes con una matriz de paso 'especial'.

Se trata de encontrar invariantes de las hipercuádricas afines que las clasifiquen, por analogía a lo hecho en el caso proyectivo.

Se considera el espacio afín k^n sumergido en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$ de la manera habitual :

$$k^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n(k)$$

donde se identifica el punto $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ con $(1 : a_1 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_n(k)$. Denotaremos por H al hiperplano del infinito $x_0 = 0$.
Definición 8.1.6.– Sea Q una hipercuádrica afín en k^n definida por una ecuación $YAY^t = 0$. Se llama *clausura proyectiva* de Q (y se denota por $\overline{Q}$) a la hipercuádrica proyectiva definida en $\mathbb{P}_n(k)$ por la ecuación $XAX^t = 0$, con $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Nótese que la ecuación de $\overline{Q}$ se obtiene homogeneizando la ecuación de Q, igual que sucedía con las ecuaciones de las variedades lineales afines, al hallar sus clausuras proyectivas.
Definición 8.1.7.– Se llama *hipercuádrica del infinito* asociada a Q (y se denota por Q_∞) a la hipercuádrica proyectiva $\overline{Q}_{|H}$ definida en el hiperplano del infinito por $\overline{Q}$.

Por tanto, la ecuación de Q_∞ es

$$(0, x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

donde A_0 es la submatriz de A obtenida eliminando la primera fila y columna (cf. ejemplo 6.2.6).
Lema 8.1.8.– Con las notaciones anteriores se tiene:

$$\mathcal{V}_a(Q) \coprod \mathcal{V}(Q_\infty) = \mathcal{V}(\overline{Q})$$

Demostración: Basta observar que $k^n \coprod H = \mathbb{P}_n$, $\mathcal{V}(\overline{Q}) \cap k^n = \mathcal{V}_a(Q)$ y $\mathcal{V}(\overline{Q}) \cap H = \mathcal{V}(Q_\infty)$ □

8.2 Clasificación afín de hipercuádricas

El siguiente teorema expresa de una manera muy sencilla la clasificación afín de las hipercuádricas afines en términos de la clasificación de las dos hipercuádricas proyectivas asociadas.
Teorema 8.2.1.– Sea $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sean Q y Q' dos hipercuádricas afines en k^n. Son equivalentes:

1. Q es afínmente equivalente a Q'.
2. $\overline{Q}$ es proyectivamente equivalente a $\overline{Q'}$ y Q_∞ es proyectivamente equivalente a Q'_∞.

Demostración: 1. $\Longrightarrow$ 2.
Esta implicación es muy sencilla, y vale para un cuerpo cualquiera. Sean Q y Q' dadas por unas ecuaciones respectivas $YAY^t = 0$, $YBY^t = 0$; entonces A y B son congruentes con una matriz de paso M 'especial': $B = MAM^t$, por tanto $\overline{Q}$ y $\overline{Q'}$ son proyectivamente equivalentes. Para comparar las partes del infinito, escribamos la igualdad anterior expresando las matrices anteriores por cajas:

$$\left(\begin{array}{c|c} b_{00} & * \\ \hline * & B_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & M_0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & * \\ \hline * & A_0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & M_0^t \end{array}\right).$$

Por tanto también se tiene $B_0 = M_0 A_0 M_0^t$, con $|M_0| = |M| \neq 0$, con lo que Q_∞ y Q'_∞ son proyectivamente equivalentes.
2. $\Longrightarrow$ 1.
A diferencia de la anterior esta implicación es difícil, obteniéndose como una consecuencia del Teorema de Extensión de Formas Bilineales Simétricas de Witt (cf. P. Abellanas. *Geometría Básica.* Cap. III, §4,9,pp.316-322). Por su dificultad y extensión no lo vamos a explicar aquí. □

Como en el caso $k = \mathbb{C}$ las hipercuádricas proyectivas se clasifican según su rango, las hipercuádricas afines complejas se clasifican por los rangos de su clausura proyectiva y de su restricción al infinito. En términos matriciales, si A es una matriz de una ecuación de una hipercuádrica afín, los rangos de A y A_0, la clasifican.
En el caso real, la situación es análoga, salvo que hay dos invariantes que clasifican hipercuádricas: rango y signatura proyectiva. Vamos a describir los distintos tipos de cónicas y cuádricas afines reales, dando sus nombres y sus ecuaciones canónicas o reducidas, en función de estos cuatro invariantes.

8.2.1 Cónicas afines reales

<table>
<tr><td></td><td colspan="7">$\overline{Q}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Q_∞</td><td></td><td></td><td colspan="2">rang($\overline{Q}$) : 3</td><td colspan="2">rang($\overline{Q}$) : 2</td><td>rang($\overline{Q}$) : 1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>sp($\overline{Q}$) : 3</td><td>sp($\overline{Q}$) : 1</td><td>sp($\overline{Q}$) : 2</td><td>sp($\overline{Q}$) : 0</td><td>sp($\overline{Q}$) = 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>2</td><td>Elipse imaginaria</td><td>Elipse real</td><td>Par rectas afines imaginarias secantes</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td>Hipérbola</td><td></td><td>Par rectas afines reales secantes</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td>Parábola</td><td>Par rectas afines imaginarias paralelas</td><td>Par rectas afines reales paralelas</td><td>recta afín doble</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>recta afín</td><td>$\emptyset$</td></tr>
</table>

Para construir la tabla se utilizan varios argumentos: el lema 8.1.8 y la posición relativa de una cónica real no degenerada y una recta, que dimos al describir a aquella (cf. 6.3.2).

Las ecuaciones reducidas son:

elipse imaginaria: $1 + y_1^2 + y_2^2 = 0$

elipse real: $-1 + y_1^2 + y_2^2 = 0$

hipérbola: $1 + y_1^2 - y_2^2 = 0$

parábola: $2y_1 + y_2^2 = 0$

par de rectas afines imaginarias secantes: $y_1^2 + y_2^2 = 0$

par de rectas afines reales secantes: $y_1^2 - y_2^2 = 0$

par de rectas afines imaginarias paralelas: $1 + y_1^2 = 0$

par de rectas afines reales paralelas: $1 - y_1^2 = 0$

recta afín doble: $y_1^2 = 0$

recta afín: $y_1 = 0$

8.2.2 Cuádricas afines reales

			$\overline{Q}$							
			rang($\overline{Q}$) : 4			rang($\overline{Q}$) : 3		rang($\overline{Q}$) : 2		rang($\overline{Q}$) : 1
			sp(Q) : 4	sp(Q) : 2	sp(Q) : 0	sp(Q) : 3	sp(Q) : 1	sp(Q) : 2	sp(Q) : 0	sp(Q) : 1
Q_∞	3	3	Elipsoide imag.	Elipsoide real		cono af. imag.				
	3	1		hiperboloide elíptico	hiperboloide hiperbólico		cono af. real			
	2	2		Paraboloide elíptico		cilindro imag.	cilindro elíptico	par planos af. imag. secantes		
	2	0			Paraboloide hiperbólico		cilindro hiperb.		par planos af. reales secantes	
	1	1					cilindro parab.	Par planos af. imag. paralelos	Par planos af. reales paralelos	plano af. doble
	0	0							plano afín	$\emptyset$

Para construir la tabla se utilizan varios argumentos: el lema 8.1.8 y la posición relativa de las cuádricas reales no degeneradas y un plano, que dimos al describir a aquellas (cf. 6.4.2).

Las ecuaciones reducidas son:

elipsoide imaginario: $1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$

elipsoide real: $-1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$

hiperboloide elíptico: $1 + y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$

hiperboloide hiperbólico: $1 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0$

paraboloide elíptico: $2y_1 + y_2^2 + y_3^2 = 0$

paraboloide hiperbólico: $2y_1 + y_2^2 - y_3^2 = 0$

cono afín imaginario: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$

cono afín real: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$

cilindro imaginario: $1 + y_1^2 + y_2^2 = 0$

cilindro elíptico: $-1 + y_1^2 + y_2^2 = 0$

cilindro hiperbólico: $1 + y_1^2 - y_2^2 = 0$

cilindro parabólico: $2y_1 + y_2^2 = 0$

par de planos afines imaginarios secantes: $y_1^2 + y_2^2 = 0$

par de planos afines reales secantes: $y_1^2 - y_2^2 = 0$

par de planos afines imaginarios paralelos: $1 + y_1^2 = 0$

par de planos afines reales paralelos: $1 - y_1^2 = 0$

plano afín doble: $y_1^2 = 0$

plano afín: $y_1 = 0$

8.3 Elementos afines de las hipercuádricas.

Definición 8.3.1.– Sea Q una hipercuádrica afín. Se llama variedad de *centros* de Q al conjunto $\mathbb{R}^n \cap \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(H)$.

Nota 8.3.2.– La variedad de centros de una hipercuádrica afín es una variedad lineal afín. La variedad de centros de una elipse (real o imaginaria) o de una hipérbola es un solo punto. La variedad de centros de una parábola es vacía. La variedad de centros de un elipsoide (real o imaginario), de un hiperboloide (elíptico o hiperbólico) y de un cono es un solo punto. La variedad de centros de un cilindro elíptico y de un cilindro hiperbólico es una recta. La variedad de centros de un paraboloide (elíptico o hiperbólico) y de un cilindro parabólico es vacía.

El nombre de centro se asigna porque es centro de simetría de la hipercuádrica afín.

Lema 8.3.3.– Sea Q una hipercuádrica proyectiva de $\mathbb{P}_n(k)$ y L una recta proyectiva, no tangente a Q. La aplicación $f : L \to L$ que lleva cada punto $P \in \mathbb{P}_n(k)$ en $L \cap \mathrm{pol}_Q(P)$ está bien definida, y es una homografía involutiva (o *involución*), es decir $f^2 = \mathrm{id}$.

Demostración: Como L no es tangente a Q, $Q_{|L}$ es no degenerada, y $L \cap \mathrm{pol}_Q(P) = \mathrm{pol}_{Q_{|L}}(P)$ es un punto de L. Sea $XAX^t = 0$ una ecuación de $Q_{|L}$, y $P = (a_0 : a_1)$; entonces $f(P)$ es el punto $(a_0, a_1)AX^t = 0$, es decir, de coordenadas

$$(a_0, a_1)A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto f es una homografía. Por definición f es involutiva, ya que $f(P)$ es el punto conjugado con P respecto de $Q_{|L}$. De otra manera, se puede ver que

$$\left[A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 = -|A| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Corolario 8.3.4.– Si O es un centro de una hipercuádrica afín (real o compleja) Q y L es una recta afín que pasa por O y corta a $\mathcal{V}_a(Q)$ en dos puntos distintos P_1 y P_2, entonces O es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$.

Demostración: Aplicamos el lema 8.3.3 a $\overline{Q}$ y a $\overline{L}$, ya que $\mathcal{V}(\overline{Q}) \cap \overline{L}$ son dos puntos distintos, y por tanto, $\overline{Q}_{|\overline{L}}$ es no degenerada. Entonces $f(P_1) = P_1$ y $f(P_2) = P_2$, por ser autoconjugados respecto de $\overline{Q}_{|\overline{L}}$, y $f(O) = L_\infty$, por definición de centro. Por el teorema 4.2.2, $|P_1P_2OL_\infty| = |P_1P_2L_\infty O|$, y por la proposición 4.3.2 $|P_1P_2OL_\infty| = -1$; con la proposición 4.3.3 se acaba la demostración. □

Definición 8.3.5.– Se llama *hiperplano diametral* (*diámetro*, en dimensión 2) de una hipercuádrica afín Q al hiperplano afín correspondiente a la polar (respecto de $\overline{Q}$) de un punto del infinito, es decir $\mathbb{R}^n \cap \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P)$, para cada $P \in H$.

Nota 8.3.6.– En el caso no degenerado, y con centro único, los hiperplanos diametrales son los hiperplanos que pasan por el centro. En el caso de la parábola, los diámetros son el haz de rectas paralelas de dirección el punto de tangencia de la parábola.

Ejercicio 1.– Los planos diametrales de un paraboloide elíptico son los que lo cortan en una parábola.

Definición 8.3.7.– Sea Q una hipercuádrica afín. Se llama *hiperplano asintótico* (*asíntota*, en dimensión 2) de Q a todo hiperplano afín de la forma $\mathbb{R}^n \cap \mathrm{pol}_{\overline{Q}}(P)$ donde $P \in \mathcal{V}(\overline{Q}) \cap H = \mathcal{V}(Q_\infty)$ (estos puntos se llaman *direcciones asintóticas*).

Nota 8.3.8.– Las elipses no tienen asíntotas porque $\mathcal{V}(Q_\infty) = \emptyset$. Las parábolas no tienen asíntotas porque $\mathcal{V}(Q_\infty) \in H$. Las hipérbolas tienen dos asíntotas, porque hay dos direcciones asintóticas.

Ejercicio 2.–

1. Los planos asintóticos de un paraboloide hiperbólico son los que lo cortan en una única recta.
2. Los planos asintóticos de un hiperboloide hiperbólico son los que lo cortan en dos rectas paralelas.

Lema 8.3.9.– Sea Q una hipercuádrica real no degenerada de $\mathbb{P}_3(k)$, $P \notin \mathcal{V}(Q)$, L su hiperplano polar. Supongamos que $L \cap \mathcal{V}(Q) \neq \emptyset$ y $P' \in L \cap \mathcal{V}(Q)$. Se tiene:

1. La recta PP' es tangente a Q en P'.
2. El conjunto de rectas que pasan por P y cortan a $\mathcal{V}(Q)$ en un punto de L es una cuádrica degenerada que tiene a P como punto singular, llamada *cono tangente* a Q en P.

DEMOSTRACIÓN: 1. Basta ver que P' es conjugado con todos los de PP'.

2. Elijamos un sistema de referencia en el que $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ y $L : x_0 = 0$. Entonces Q tiene como ecuación $XAX^t = 0$, con

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right),$$

y el lugar geométrico de los puntos PP' es de ecuación

$$X \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right) X^t = 0,$$

que es un cono de vértice P. □

Definición 8.3.10.– Se llama *cono asintótico* de una cuádrica afín con centro único, al cono tangente desde este centro.