Tema 6.- Polaridad. Tangentes. Estudio geométrico de cónicas y cuádricas

En este tema pretendemos estudiar propiedades de $\mathcal{V}(Q)$, especialmente en los casos real y complejo, con n =2,3. Para ello, necesitamos introducir el concepto de polaridad, que nos permitirá estudiar secciones lineales de $\mathcal{V}(Q)$, es decir $\mathcal{V}(Q) \cap L$ con L una variedad lineal proyectiva. Hablando en términos médicos, haremos un "TAC" a $\mathcal{V}(Q)$, cuando estudiemos $\mathcal{V}(Q) \cap L$ siendo L un plano, o haremos una "punción" a $\mathcal{V}(Q)$, cuando estudiemos $\mathcal{V}(Q) \cap L$ siendo L una recta.

6.1 Polaridad.

Sea Q una hipercuádrica en $\mathbb{P}_n(k)$, con ecuación $XAX^t = 0$ en cierto sistema de referencia $\mathcal{R}$.
Definición 6.1.1.– Diremos que dos puntos P y P' son *conjugados* respecto de Q, que notaremos $P \sim_Q P'$, cuando se verifique:

$$(*) \qquad (a_0, \dots, a_n)A \begin{pmatrix} a'_0 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = 0,$$

donde $P = (a_0 : \dots : a_n)_{\mathcal{R}}$ y $P' = (a'_0 : \dots : a'_n)_{\mathcal{R}}$.

Nota 6.1.2.– Es preciso observar que la definición anterior no depende del sistema de referencia. En efecto, si $\mathcal{R}'$ es otro sistema de referencia, de modo que $\lambda X = YM$ representa las ecuaciones del cambio de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, según la nota 1.2.8, unas ecuaciones de Q respecto de $\mathcal{R}'$ son $YBY^t = 0$, con $B = MAM^t$. Por tanto, si $P = (b_0 : \dots : b_n)_{\mathcal{R}'}$ y $P' = (b'_0 : \dots : b'_n)_{\mathcal{R}'}$, se tiene que $\lambda(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)M$ y $\mu(a'_0, \dots, a'_n) = (b'_0, \dots, b'_n)M$. Por tanto

$$(a_0, \dots, a_n)A \begin{pmatrix} a'_0 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = 0 \iff (b_0, \dots, b_n)B \begin{pmatrix} b'_0 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = 0.$$

Por esta razón, para simplificar, la condición $(*)$ de conjugación la expresaremos por $PAP'^t = 0$, siendo conscientes de que estamos abusando del lenguaje, confundiendo con un mismo nombre un punto y sus coordenadas respecto de un sistema de referencia fijo.

Nota 6.1.3.– La relación de conjugación respecto de Q es simétrica, pero no es ni transitiva ni reflexiva, en general. De hecho, los puntos autoconjugados respecto de Q son, precisamente, los de $\mathcal{V}(Q)$.

Definición 6.1.4.– Llamaremos *polar* de un punto respecto de Q al conjunto $\{P' \in \mathbb{P}_n(k) | P \sim_Q P'\}$, y lo representaremos por $\mathrm{pol}_Q(P)$.

Nota 6.1.5.– $\mathrm{pol}_Q(P)$ es una variedad lineal proyectiva de ecuación $PAX^t = 0$. Si $PA = 0$, entonces $\mathrm{pol}_Q(P) = \mathbb{P}_n(k)$, diremos que P es un *punto singular* de Q, y al conjunto de todos ellos lo llamaremos *lugar singular* de Q: $\mathrm{Sing}(Q)$. Si P no es singular, entonces $PAX^t = 0$ es la ecuación de un hiperplano. En cualquier caso, dim $\mathrm{pol}_Q(P) \geq n - 1$. Por otra parte $\mathrm{Sing}(Q)$ es una variedad lineal proyectiva dada por las ecuaciones $XA = 0$, luego es de dimensión $n-$rango(Q). Así, las hipercuádricas no degeneradas se caracterizan por no tener puntos singulares.

Generalizamos ahora el concepto de polar de una variedad lineal proyectiva cualquiera.
Definición 6.1.6.– Si $L \subset \mathbb{P}_n$ es una variedad lineal proyectiva, llamaremos *polar* de L respecto de Q al conjunto de puntos conjugados con todos los de L, es decir

$$\mathrm{pol}_Q(L) = \{P \in \mathbb{P}_n | L \subset \mathrm{pol}_Q(P)\}.$$

Enumeramos en la proposición siguiente una larga lista de propiedades elementales.
Proposición 6.1.7.– Los siguientes resultados se refieren a variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}_n$.

1. Si $L_1 \subset L_2$ entonces $\mathrm{pol}_Q(L_1) \supset \mathrm{pol}_Q(L_2)$.
2. $\mathrm{pol}_Q(L) \supset \mathrm{Sing}(Q) = \mathrm{pol}_Q(\mathbb{P}_n)$.
3. $\mathrm{pol}_Q(\sum_{i \in I} L_i) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{pol}_Q(L_i)$.
4. $\mathrm{pol}_Q(L) = \bigcap_{P \in L} \mathrm{pol}_Q(P)$ y por tanto, $\mathrm{pol}_Q(L)$ es una variedad lineal proyectiva.
5. $\mathrm{pol}_Q(\bigcap_{i \in I} L_i) \supset \sum_{i \in I} \mathrm{pol}_Q(L_i)$.
6. $\mathrm{pol}_Q(\mathrm{pol}_Q(L)) \supset L$.

7. $\dim \mathrm{pol}_Q(L) \geq n - \dim L - 1$.

DEMOSTRACIÓN: 1. Es consecuencia de la definición.

2. Aplicar 1. a $L \subset \mathbb{P}_n$.
3. Es consecuencia de la equivalencia $\mathrm{pol}_Q(P) \supset L_i$ para todo i si y sólo si $\mathrm{pol}_Q(P) \supset \sum L_i$.
4. Aplicar 3. a $L = \sum_{P \in L} P$.
5. Es consecuencia de 1. aplicado a $\cap L_i \subset L_i$ para todo i.
6. Primero $\mathrm{pol}_Q(\mathrm{pol}_Q(P)) \supset P$ por definición. Después aplicar 3. y 5. a $L = \sum_{P \in L} P$.

7. Tomar una base $\{P_0, \ldots, P_r\}$ de L, con $\dim L = r$. Por 3. $\mathrm{pol}_Q(L) = \mathrm{pol}_Q(P_0) \cap \ldots \cap \mathrm{pol}_Q(P_r)$, y cada $\mathrm{pol}_Q(P_i)$ es un hiperplano o $\mathbb{P}_n$. La intersección de un número menor o igual que $r+1$ hiperplanos es de dimensión mayor o igual que $n-(r+1)$. □

Proposición 6.1.8.– Si Q es no degenerada, las propiedades 5, 6 y 7 anteriores son igualdades.

DEMOSTRACIÓN: 7. Sean $\{P_0, \ldots, P_r\}$ una base de L. Si $XAX^t = 0$ es una ecuación de Q, $|A| \neq 0$, y por tanto, $\{P_0A, \ldots, P_rA\}$ son vectores linealmente independientes. Luego

$$\dim \mathrm{pol}_Q(P_0) \cap \ldots \cap \mathrm{pol}_Q(P_r) = n - \mathrm{rango}\{P_0A, \ldots, P_rA\} = n - r - 1.$$

6. Aplicar lo anterior para calcular la dimensión de $\mathrm{pol}_Q(\mathrm{pol}_Q(L))$ que es $\dim L$.

5. Se tiene por 6. que $L_i' = \mathrm{pol}_Q(L_i)$ si y sólo si $L_i = \mathrm{pol}_Q(L_i')$. Luego

$$\mathrm{pol}_Q(\cap L_i) = \mathrm{pol}_Q(\cap \mathrm{pol}_Q(L_i')) \stackrel{3.}{=} \mathrm{pol}_Q(\mathrm{pol}_Q(\sum L_i')) \stackrel{6.}{=} \sum \mathrm{pol}_Q(L_i)$$

□

Ejercicio 1.– Dar contraejemplos de las igualdades anteriores, en los casos en que Q sea degenerada.

PARA AMPLIAR:

Nota 6.1.9.– Si Q es una hipercuádrica no degenerada de $\mathbb{P}_n$, la polaridad induce una aplicación $\Phi_Q : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n^*$, que asocia a cada punto P su hiperplano polar. De hecho Φ_Q es una homografía de matriz A, en sistemas de referencia adecuado. El caso más interesante es cuando $n = 1$, porque componiendo Φ_Q con la dualidad, se obtiene una aplicación $*\Phi_Q : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ que denotaremos inv_Q, porque es una involución u homografía involutiva. En efecto, Φ_Q asocia a cada punto P el hiperplano $PAX^t = 0$, cuyo dual es él mismo, pero en dimensión 1, esto es el punto

$$PA \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así la matriz de inv_Q es

$$A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo cuadrado es $-|A|I$, si A es simétrica, por lo que $\mathrm{inv}_Q^2 = \mathrm{id}$. Por otra parte $\mathrm{inv}_Q(P)$ es el único punto de $\mathbb{P}_1$ conjugado con P respecto de Q.

6.2 Tangentes.

Definición 6.2.1.– Una variedad lineal proyectiva L se dice *tangente* a Q si $L \cap \mathrm{pol}_Q(L) \neq \emptyset$, es decir, si existen puntos P tales que $P \in L \subset \mathrm{pol}_Q(P)$; dichos puntos se dicen *puntos de tangencia* de L a Q.

Ejemplo 6.2.2.–

1. Sea $Q : 2x_0x_1 - x_2^2 = 0$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. La recta $x_1 = 0$ es tangente a Q en $(1:0:0)$. La recta $x_2 = 0$ no es tangente a Q.

2. Sea $Q : x_0^2 - x_1^2 = 0$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. La recta $x_0 = 0$ es tangente a Q en $(0:0:1)$. La recta $x_2 = 0$ no es tangente a Q. La recta $x_0 + x_1 = 0$ es tangente a Q en todos sus puntos.

3. Sea $Q : 2x_0x_1 - x_2^2 = 0$ en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. La recta $x_2 = x_3 = 0$ no es tangente a Q. La recta $x_1 = x_3 = 0$ es tangente a Q en $(1:0:0:0)$. La recta $x_0 = x_2 = 0$ es tangente a Q en todos sus puntos.

Veamos ahora algunos resultados elementales sobre hiperplanos tangentes.

Proposición 6.2.3.– Sea Q un hipercuádrica, $L \subset \mathbb{P}_n$ una variedad lineal proyectiva y $H \subset \mathbb{P}_n$ un hiperplano.

1. Si $L \cap \mathrm{Sing}(Q) \neq \emptyset$ entonces L es tangente a Q.

2. Si Q es degenerada, H es tangente a Q si y sólo si $H \cap \mathrm{Sing}(Q) \neq \emptyset$.

3. Si Q es no degenerada, H es tangente a Q si y sólo si existe un punto $P \in \mathcal{V}(Q)$ tal que $H = \mathrm{pol}_Q(P)$.

4. Si Q es no degenerada, de ecuación $XAX^t = 0$, y H tiene ecuación $UX^t = 0$, entonces H es tangente a Q si y sólo si $\star(H) \in \mathcal{V}(Q^*)$ con Q^* una hipercuádrica (*dual*) de $\mathbb{P}_n^*$ de ecuación $UA^{-1}U^t = 0$.

Demostración: 1. Es consecuencia de 2. en la proposición 6.1.7

2. Recíprocamente, sea $P \in H \cap \mathrm{pol}_Q(H)$. Si $P \in \mathrm{Sing}(Q)$ ya está. Si $P \notin \mathrm{Sing}(Q)$ entonces $\mathrm{pol}_Q(P)$ es un hiperplano y, como $P \in \mathrm{pol}_Q(H)$, $\mathrm{pol}_Q(P) \supset H$, luego $\mathrm{pol}_Q(P) = H$. Por el punto 2. de la proposición 6.1.7, $H \supset \mathrm{Sing}(Q)$.

3. Análogo a lo anterior.

4. Sea $H : UX^t = 0$ tangente a Q. Por 3. existe un $P \in \mathcal{V}(Q)$ tal que $H : PAX^t = 0$. Por tanto $\lambda P = UA^{-1}$. Sustituyendo en la ecuación $PAP^t = 0$ se tiene la condición enunciada. □

Nota 6.2.4.– Sea Q una hipercuádrica de $\mathbb{P}_n$, $\mathcal{R}$ un sistema de referencia fijo en $\mathbb{P}_n$, de modo que la ecuación de Q es $XAX^t = 0$. Sea L una variedad lineal proyectiva de dimensión $r \geq 0$. Si se fija otro sistema de referencia $\mathcal{R}_L$ en L, se producen unas ecuaciones paramétricas en L: $\lambda(x_0, \ldots, x_n) = (y_0, \ldots, y_r)M$ con M una matriz $(r+1)\times(n+1)$ de rango máximo (cf. nota 1.2.8). Nótese que $(y_0 : \cdots : y_r)$ son las coordenadas respecto de $\mathcal{R}_L$ del punto $(x_0 : \cdots : x_n) \in L$ respecto de $\mathcal{R}$.

Definición 6.2.5.– Llamamos $Q_{|L}$ a la hipercuádrica de L, cuya ecuación respecto de $\mathcal{R}_L$ es

$$(y_0, \ldots, y_r)MAM^t \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = 0,$$

resultado de sustituir las paramétricas de L en la ecuación de Q. Nótese que $B = MAM^t$ es una matriz simétrica de orden $r+1$.

Ejemplo 6.2.6.– El caso $L : x_0 = 0$ es muy simple, si tomamos un sistema de referencia $\mathcal{R}_L$ "cómodo" (cf. ejemplo 1.2.9, en donde $(0 : x_1 : \cdots : x_n) = (x_1 : \cdots : x_n)_{\mathcal{R}_L}$). En ese caso B es la submatriz de A que resulta de eliminar su fila y columna cero.

Veamos ahora algunas propiedades triviales, pero fundamentales de $Q_{|L}$.

Proposición 6.2.7.– Sean Q una hipercuádrica y L una variedad lineal proyectiva no vacía.

1. Sean $P, P' \in L$, entonces $P \sim_{Q_{|L}} P'$ si y sólo si $P \sim_Q P'$.

2. Si $P \in L$, $\mathrm{pol}_{Q_{|L}}(P) = \mathrm{pol}_Q(P) \cap L$.

3. Si $L' \subset L$, $\mathrm{pol}_{Q_{|L}}(L') = \mathrm{pol}_Q(L') \cap L$.

4. $\mathcal{V}(Q_{|L}) = \mathcal{V}(Q) \cap L$.

5. $\mathcal{V}(Q) \supset L$ si y sólo si $\mathrm{pol}_Q(L) \supset L$.

6. $\mathrm{rango}(Q_{|L}) = r - \dim L \cap \mathrm{pol}_Q(L)$. Por tanto L es tangente a Q si y sólo si $Q_{|L}$ es degenerada.

Demostración: Todas son triviales salvo, quizás, las dos últimas. $\mathcal{V}(Q) \supset L \iff \mathcal{V}(Q_{|L}) = L \iff \mathrm{rango}(Q_{|L}) = 0 \iff L = \mathrm{pol}_{Q_{|L}}(L) = L \cap \mathrm{pol}_Q(L) \iff L \subset \mathrm{pol}_Q(L)$. La última se obtiene al observar que $\mathrm{Sing}(Q_{|L}) = \mathrm{pol}_{Q_{|L}}(L) = \mathrm{pol}_Q(L) \cap L$, y además por la nota 6.1.5 $\mathrm{rango}(Q_{|L}) = r - \dim \mathrm{Sing}(Q_{|L})$. □

Como consecuencia elemental podemos analizar la intersección de una hipercuádrica-lugar real o compleja con una recta.

Corolario 6.2.8.– Sea Q una hipercuádrica compleja y L una recta. Se tiene que $\mathcal{V}(Q) \cap L$ son dos puntos, 1 punto o la propia L. El primer caso se produce sólo en el caso no tangente.

Demostración: Es consecuencia del punto 4 de la proposición anterior y del ejemplo 5.1.11 □

Corolario 6.2.9.– Sea Q una hipercuádrica real y L una recta. Se tiene que $\mathcal{V}(Q) \cap L$ son dos puntos, el vacío, 1 punto o la propia L. Los dos primeros casos se producen sólo en el caso no tangente.

Demostración: Es consecuencia del punto 4 de la proposición anterior y del ejemplo 5.1.12 □

En el caso real y no degenerado podemos precisar más que la proposición anterior sobre la intersección de una hipercuádrica-lugar y un hiperplano tangente. De hecho, por la proposición anterior el caso no tangente ya está claro: $Q_{|H}$ es no degenerada, es decir el rango baja en una unidad.

Proposición 6.2.10.– Sea Q una hipercuádrica real o compleja no degenerada y H un hiperplano tangente.

1. Se tiene que $\mathrm{rango}(Q_{|H}) = n-1$.
2. En el caso real, además $\mathrm{sp}(Q_{|H}) = \mathrm{sp}(Q)$.

Demostración: Se trata de encontrar un sistema de referencia adecuado. Sea $P_0 = \mathrm{pol}_Q(H)$, como H es tangente a Q, por el punto 3. de la proposición 6.2.3 $P_0 \in \mathcal{V}(Q)\cap H$. Sean $P_1 \notin H$ cualquiera. y $\{P_2, \ldots, P_n\}$ una base cualquiera de $H_1 \cap H$, con $H_1 = \mathrm{pol}_Q(P_1)$. Como $P_1 \notin H$, entonces $P_0 \notin H_1$; de aquí se deduce que $\{P_0, P_2, \ldots, P_n\}$ es una base de H. Por tanto $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ son linealmente independientes, y añadiendo un punto unidad conveniente se construye un sistema de referencia $\mathcal{R}$. Imponiendo que la polar de $P_0 = (1:0:\cdots:0)_{\mathcal{R}}$ es $H : x_1 = 0$, y que $\{P_2, \ldots, P_n\}$ son conjugados con P_1, se tiene que una matriz (simétrica) A de las ecuaciones de Q respecto de $\mathcal{R}$ es

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A' & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right).$$

Así A es diagonal por cajas, de modo que su rango es la suma de los rangos de sus cajas diagonales, es decir $\mathrm{rango}(A) = n+1 = 2+\mathrm{rango}(A')$, con lo que se tiene que $\mathrm{rango}(A') = n-1$. También se tiene que los autovalores de A son los de A' y los de la caja 2×2, que son uno positivo y otro negativo (su producto es -1). Por tanto, $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(A')$.

Finalmente, usando un argumento análogo al del ejemplo 6.2.6, una matriz de $Q_{|H}$, con $H : x_1 = 0$, en cierto sistema de referencia es

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

obtenida al quitar en A la fila y columna 1. Queda comprobar que $\mathrm{rango}(B) = \mathrm{rango}(A')$ y $\mathrm{sp}(B) = \mathrm{sp}(A')$. □

Obtenemos una aplicación inmediata de este resultado.

Corolario 6.2.11.– Sea Q una hipercuádrica no degenerada real o compleja de $\mathbb{P}_n$ con $n \geq 2$. Su lugar no contiene hiperplanos.

Demostración: Por reducción al absurdo, si $\mathcal{V}(Q) \supset H$, con H un hiperplano, entonces $\mathcal{V}(Q_{|H}) = H$, por lo que la ecuación de $Q_{|H}$ no puede ser otra que $0 = 0$. El rango de $Q_{|H}$, por la proposición anterior y por el apartado 6 de la proposición 6.2.7 sólo puede ser n o $n-1$, que nunca puede ser cero. □

A diferencia de las no degeneradas, los lugares de las hipercuádricas degeneradas siempre contienen rectas.

Proposición 6.2.12.– Si Q es una hipercuádrica degenerada, entonces $\mathcal{V}(Q)$ es un cono de vértice $\mathrm{Sing}(Q)$, *i.e.* la recta que pasa por cada punto de $\mathcal{V}(Q)$ y por cada punto de $\mathrm{Sing}(Q)$ está contenida en $\mathcal{V}(Q)$.

Demostración: Sea $XAX^t = 0$ una ecuación de Q. Si $P \in \mathcal{V}(Q)$, $PAP^t = 0$, y si $P_0 \in \mathrm{Sing}(Q)$, $P_0A = 0$; por tanto si $P_1 \in PP_0$, recordando que confundimos puntos con sus coordenadas, $P_1 = \lambda P + \mu P_0$, y se verifica que $P_1AP_1^t = 0$. □

6.3 Estudio geométrico de las cónicas.

Proposición 6.3.1.– Los lugares de las cónicas reales o complejas no degeneradas no contienen rectas.

Demostración: Es una consecuencia inmediata del corolario 6.2.11. □

6.3.1 Descripción de los lugares de las cónicas complejas:

Como sabemos se clasifican por su rango. Sea Q una cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

1. Si rango$(Q) = 3$, Q se dirá *cónica no degenerada compleja*, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Por la proposición anterior, su lugar no contiene rectas y por el corolario 6.2.8, una recta lo corta en un punto (si son tangentes, cf. 6.2.10 y 5.1.11) o en dos (si no lo son).
2. Si rango$(Q) = 2$, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es la unión de dos rectas distintas que se cortan en el punto $(0 : 0 : 1) = \mathrm{Sing}(Q)$. Diremos que Q es un *par de rectas complejas*.
3. Si rango$(Q) = 1$, una ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathrm{Sing}(Q)$ es una única recta, que llamaremos *recta doble compleja*.
4. Si rango$(Q) = 0$, su ecuación reducida es $0 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

6.3.2 Descripción de los lugares de las cónicas reales:

Como sabemos se clasifican por su rango y su signatura proyectiva. Sea Q una cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

1. Si rango$(Q) = \mathrm{sp}(Q) = 3$, Q se dirá *cónica no degenerada imaginaria*, ya que una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ y por tanto su lugar es vacío.
2. Si rango$(Q) = 3$, $\mathrm{sp}(Q) = 1$, Q se dirá *cónica no degenerada real*, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. Por la proposición anterior, su lugar no contiene rectas y por el corolario 6.2.9, una recta lo corta en un punto (si son tangentes, cf. 6.2.10 y 5.1.12) o en dos o el vacío (si no lo son).
3. Si rango$(Q) = \mathrm{sp}(Q) = 2$, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = (0 : 0 : 1) = \mathrm{Sing}(Q)$. Diremos que Q es un *par de rectas imaginarias*.
4. Si rango$(Q) = 2$, $\mathrm{sp}(Q) = 0$, una ecuación reducida es $x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es la unión de dos rectas distintas que se cortan en el punto $(0 : 0 : 1) = \mathrm{Sing}(Q)$. Diremos que Q es un *par de rectas reales*.
5. Si rango$(Q) = \mathrm{sp}(Q) = 1$, su ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathrm{Sing}(Q)$ es una única recta, que llamaremos *recta doble real*.
6. Si rango$(Q) = 0$, su ecuación reducida es $0 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

6.4 Estudio geométrico de las cuádricas

Proposición 6.4.1.– Los lugares de las cuádricas reales o complejas de rango 4 o 3 no contienen planos.

DEMOSTRACIÓN: El caso no degenerado es una consecuencia inmediata del corolario 6.2.11. Si Q tiene rango 3 podemos suponer que una ecuación es $f = XAX^t = 0$ y no tiene la variable x_3. Si $\mathcal{V}(Q) \supset \pi$, con π un plano, entonces $Q_{|H}$ con $H : x_3 = 0$, es una cónica de rango 3 en H cuyo lugar contiene a la recta $H \cap \pi$, que contradice 6.3.1. □

En la siguiente descripción veremos que, en cambio, todas las cuádricas complejas son *regladas*, es decir, sus lugares contienen rectas.

6.4.1 Descripción de los lugares de las cuádricas complejas:

Sea Q una cuádrica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

1. Si rango$(Q) = 4$, la llamaremos *cuádrica no degenerada compleja*. Una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Su lugar contiene, por ejemplo, las rectas de la familia

$$\left\{ \begin{array}{r} \lambda(x_0 + ix_1) = -\mu(x_2 + ix_3) \\ \mu(x_0 - ix_1) = \lambda(x_2 - ix_3) \end{array} \right. ,$$

para cada valor $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Una situación análoga se verá, más adelante, en las cuádricas reales de puntos hiperbólicos, en donde se estudiarán, en detalle, propiedades de estas rectas contenidas en la cuádrica-lugar.
2. Si rango$(Q) = 3$, la llamaremos *cono complejo*. Una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Su lugar no contiene planos (cf. 6.4.1), pero sí rectas que pasan por el punto $\mathrm{Sing}(Q)$ (cf. 6.2.12).
3. Si rango$(Q) = 2$, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es la unión de dos planos distintos que se cortan en la recta $x_0 = x_1 = 0$ que es $\mathrm{Sing}(Q)$. Diremos que Q es un *par de planos complejos*.
4. Si rango$(Q) = 1$, una ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathrm{Sing}(Q)$ es un único plano, que llamaremos *plano doble complejo*.
5. Si rango$(Q) = 0$, su ecuación reducida es $0 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

6.4.2 Descripción de los lugares de las cuádricas reales:

Como sabemos se clasifican por su rango y su signatura proyectiva. Sea Q una cuádrica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

1. Si $\operatorname{rango}(Q) = \operatorname{sp}(Q) = 4$, Q se dirá *cuádrica no degenerada imaginaria*, ya que una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ y por tanto su lugar es vacío.

2. $\operatorname{rango}(Q) = 4$ y $\operatorname{sp}(Q) = 2$, Q se dirá *cuádrica de puntos elípticos*, como justificaremos enseguida. Sus planos tangentes, por 6.2.10, cortan a $\mathcal{V}(Q)$ en el lugar de una cónica de rango 2 y signatura 2, es decir, en un punto. Los planos no tangentes, por 6.2.7, cortan a $\mathcal{V}(Q)$ en el lugar de una cónica no degenerada, que por lo visto antes, o es una cónica real no degenerada, o es el vacío. Lo anterior nos describe completamente, cómo es la sección plana del lugar de una cuádrica de puntos elípticos. Una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, y podemos exhibir ejemplos en donde se dan todos los casos anteriores, por ejemplo, $x_2 + x_3 = 0$, es un plano tangente, $x_3 = 0$ no corta a $\mathcal{V}(Q)$, y $x_0 = 0$ lo corta en una cónica real no degenerada.

   El lugar $\mathcal{V}(Q)$, desde luego, no contiene planos, por 6.4.1, pero tampoco contiene rectas. En efecto, supongamos que $\mathcal{V}(Q) \supset L$, con L una recta, y tomemos un plano cualquiera H que contenga a L. Consideremos la cónica $Q_{|H}$, cuyo lugar es $\mathcal{V}(Q_{|H}) = \mathcal{V}(Q) \cap H \supset L \cap H \supset L$, que contradice la descripción de las secciones planas del párrafo anterior.

   De esto se deduce que, por el corolario 6.2.9, el corte de una recta con el lugar de una cuádrica de puntos elípticos son dos puntos, el vacío o un punto; el último caso corresponde a una recta tangente.

3. $\operatorname{rango}(Q) = 4$ y $\operatorname{sp}(Q) = 0$, Q se dirá *cuádrica de puntos hiperbólicos*, como justificaremos enseguida. Sus planos tangentes, por 6.2.10, cortan a $\mathcal{V}(Q)$ en el lugar de una cónica de rango 2 y signatura 0, es decir, en un par de rectas reales. Esto significa que esta cuádrica es reglada. Vamos a dar una relación de propiedades sobre las rectas de esta cuádrica.

   Proposición 6.4.2.– Sea Q una cuádrica de puntos hiperbólicos de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Se verifica:

   (a) Existen dos familias de rectas $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ contenidas en $\mathcal{V}(Q)$.
   (b) Por cada punto de $\mathcal{V}(Q)$ pasan dos rectas contenidas en $\mathcal{V}(Q)$, una de cada familia.
   (c) Dos rectas de la misma familia se cruzan, y de distinta familia se cortan.
   (d) $\mathcal{V}(Q) = \bigsqcup_{r \in \mathcal{F}_i} r$, para cada $i = 1, 2$.
   (e) No hay más rectas en $\mathcal{V}(Q)$ que las de las dos familias anteriores.

   Demostración: Aunque hay demostraciones de carácter geométrico, lo más simple es observar que existe un sistema de referencia en el que Q tiene como ecuación: $x_0x_1 - x_2x_3 = 0$. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ las familias de rectas siguientes:
   $$\mathcal{F}_1 \left\{ \begin{array}{l} \lambda x_0 = \mu x_2 \\ \mu x_1 = \lambda x_3 \end{array} \right. \qquad \mathcal{F}_2 \left\{ \begin{array}{l} \lambda x_0 = \mu x_3 \\ \mu x_1 = \lambda x_2 \end{array} \right.$$
   para cada $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Es evidente que todas las rectas de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ están en $\mathcal{V}(Q)$. Si $P = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \in \mathcal{V}(Q)$ las rectas
   $$\left\{ \begin{array}{l} a_2x_0 = a_0x_2 \\ a_0x_1 = a_2x_3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_3x_0 = a_0x_3 \\ a_0x_1 = a_3x_2 \end{array} \right. ,$$
   pasan por P y son de las familias anteriores, salvo que $(a_0, a_2) = (0, 0)$ o $(a_0, a_3) = (0, 0)$. En este último caso, considerar las rectas
   $$\left\{ \begin{array}{l} a_1x_0 = a_3x_2 \\ a_3x_1 = a_1x_3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1x_0 = a_2x_3 \\ a_2x_1 = a_1x_2 \end{array} \right. .$$

   Se puede comprobar fácilmente (usando sus ecuaciones) que dos rectas de la misma familia se cruzan y dos rectas de distinta familia se cortan, en efecto, si $(\lambda : \mu) \neq (\lambda' : \mu') \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$:
   $$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -\lambda \\ \lambda' & 0 & -\mu' & 0 \\ 0 & \mu' & 0 & -\lambda' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}^2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -\lambda \\ \lambda' & 0 & 0 & -\mu' \\ 0 & \mu' & -\lambda' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   Sólo queda probar la última afirmación. Sea $t \subset \mathcal{V}(Q)$, y tomamos un $P \in t$ cualquiera. Por el segundo apartado, sea $P = r \cap s$ con $r \in \mathcal{F}_1$ y $s \in \mathcal{F}_2$. Entonces el plano tangente a Q en P es $H := \operatorname{pol}_Q(P) \supset \operatorname{pol}_Q(t) \cup \operatorname{pol}_Q(r) \cup \operatorname{pol}_Q(s)$. Por la proposición 6.2.7, $H \supset r \cup s \cup t$ y, por tanto, $H \cap \mathcal{V}(Q) \supset r \cup s \cup t$. Por ser Q una cuádrica de puntos hiperbólicos, debe ser $t = r$ o $t = s$. $\square$

4. Si $\mathrm{rango}(Q) = \mathrm{sp}(Q) = 3$, Q se dirá *cono imaginario*, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Por tanto $\mathcal{V}(Q) = \mathrm{Sing}(Q)$ es un único punto.

5. Si $\mathrm{rango}(Q) = 3$, $\mathrm{sp}(Q) = 1$, Q se dirá *cono real*, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. Por 6.2.12, su lugar se obtiene proyectando desde el punto singular (*vértice*) una cónica real no degenerada.

6. Si $\mathrm{rango}(Q) = \mathrm{sp}(Q) = 2$, una ecuación reducida es $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathrm{Sing}(Q)$ es una recta. Diremos que Q es un *par de planos imaginarios*.

7. Si $\mathrm{rango}(Q) = 2$, $\mathrm{sp}(Q) = 0$, una ecuación reducida es $x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es la unión de dos planos distintos que se cortan en la recta $\{x_0 = x_1 = 0\} = \mathrm{Sing}(Q)$. Diremos que Q es un *par de planos reales*.

8. Si $\mathrm{rango}(Q) = \mathrm{sp}(Q) = 1$, su ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathrm{Sing}(Q)$ es un único plano, que llamaremos *plano doble real*.

9. Si $\mathrm{rango}(Q) = 0$, su ecuación reducida es $0 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.