Tema 5.- Hipercuádricas. Clasificación proyectiva.

Comenzamos con el objeto básico de este curso. Hemos estudiado hasta ahora variedades lineales proyectivas, que están definidas por ecuaciones homogéneas de primer grado. Dando un paso adelante, vamos a estudiar hipercuádricas que van a venir dadas por ecuaciones homogéneas de segundo grado. Veamos algunos preliminares. Supondremos siempre que k es un cuerpo de característica distinta de 2, aun cuando la mayoría de los resultados se referirán a $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$.

Definición 5.0.1.– Un polinomio f de $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ se dice homogéneo de grado d si es de la forma

$$f = \sum_{c_0+c_1+\ldots+c_n=d} c_{c_0c_1\ldots c_n} x_0^{c_0} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n},$$

con $c_{c_0c_1\ldots c_n} \in k$.

La propiedad fundamental que verifican los polinomios homogéneos es la siguiente, debida a Euler:

Lema 5.0.2.– Si $f(x_0, \ldots, x_n)$ es un polinomio homogéneo de grado d y $\lambda \in k$, entonces

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$$

Demostración: Basta ver que cada monomio de f verifica la propiedad enunciada. □

5.1 Hipercuádricas.

Definición 5.1.1.– Una *hipercuádrica* Q del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(k)$ es una ecuación $f = 0$ definida por un polinomio homogéneo de segundo grado, salvo escalar. Es decir, la ecuación $\lambda f = 0$ define la misma hipercuádrica Q, para cualquier $\lambda \in k$ no nulo.

En los casos $n = 2, 3$, utilizaremos para las hipercuádricas los nombres clásicos de *cónicas* y *cuádricas*, respectivamente. Con la siguiente definición distinguiremos la ecuación de sus soluciones.

Definición 5.1.2.– La *hipercuádrica-lugar* asociada a Q, será el conjunto de sus soluciones en $\mathbb{P}_n(k)$, es decir

$$\mathcal{V}(Q) = \{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}_n | f(a_0, \ldots, a_n) = 0\}.$$

Nótese que la definición anterior es consistente, gracias al lema de Euler, porque un punto proyectivo está definido salvo escalar.

Nota 5.1.3.– Por otra parte si dos hipercuádricas Q, Q' son distintas, no se tiene necesariamente que $\mathcal{V}(Q) \neq \mathcal{V}(Q')$. Basta por ejemplo considerar en $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ la hipercuádrica Q_λ definida por la ecuación $\lambda x_0^2 + x_1^2 = 0$, donde λ es un número real estrictamente positivo. Es claro que si $\lambda \neq \lambda'$ entonces $Q_\lambda \neq Q_{\lambda'}$ y sin embargo $\mathcal{V}(Q_\lambda) = \emptyset$ para todo número real λ, estrictamente positivo. Nótese que si en el ejemplo anterior consideramos $\mathbb{C}$ como cuerpo base (en lugar de $\mathbb{R}$) entonces $\mathcal{V}(Q_\lambda) \neq \mathcal{V}(Q_{\lambda'})$ siempre que λ y λ' sean dos números complejos distintos de cero y distintos entre sí. De hecho se tiene un resultado mucho más general.

Teorema 5.1.4.– Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y Q, Q' dos hipercuádricas en $\mathbb{P}_n(k)$. Entonces $Q = Q'$ si y sólo si $\mathcal{V}(Q) = \mathcal{V}(Q')$.

No daremos en este curso la prueba de este teorema. Se trata de un caso particular del *Nullstellensatz de Hilbert*, resultado central en Geometría Algebraica. Una prueba de este último resultado puede encontrarse en el libro de W. Fulton, *"Curvas Algebraicas"*, Ed. Reverté (1973). No obstante, se puede dar una demostración de aquel teorema, simplemente con los conocimientos de este tema, pero sería muy laboriosa su presentación aquí.

Nota 5.1.5.– La clave del estudio de las hipercuádricas está en la posibilidad de traducir el carácter cuadrático de sus ecuaciones a las formas bilineales simétricas. Sea Q una hipercuádrica de $\mathbb{P}_n(k)$ definida por una ecuación $f = 0$ donde f es un polinomio homogéneo de grado dos en las variables $(x_0, \ldots, x_n)$ y con coeficientes en k. Separamos los monomios "puros" (cuadrado de una variable) de los "mixtos" (producto de dos variables distintas):

$$f = f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} c_{ii} x_i^2 + \sum_{0 \le i < j \le n} c_{ij} x_i x_j \in k[x_0, \ldots, x_n],$$

si notamos por A a la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} c_{00} & \frac{c_{01}}{2} & \cdots & \frac{c_{0n}}{2} \\ \frac{c_{01}}{2} & c_{11} & \cdots & \frac{c_{1n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c_{0n}}{2} & \frac{c_{1n}}{2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

se tiene fácilmente que
$$f(x_0,\dots,x_n)=(x_0,\dots,x_n)A(x_0,\dots,x_n)^t.$$
De este modo se asocia a cada polinomio homogéneo de segundo grado f una única matriz simétrica A de orden $n+1$, cuya diagonal está formada por los coeficientes de los monomios puros de f, y los elementos extradiagonales de A, por los coeficientes de los monomios mixtos correspondientes de f, divididos por 2 (¡aquí es fundamental la hipótesis sobre la característica de k!), y que verifica la anterior ecuación. En la anterior descripción de A, y en lo sucesivo, es útil numerar las filas y columnas de A de 0 a n, así como denotar por X al vector $(x_0,\dots,x_n)$ de modo que la ecuación de Q se escribe $XAX^t=0$. Por tanto la hipercuádrica Q tiene asociada la clase-matriz $[A]$, con A matriz simétrica de orden $n+1$.

Nota 5.1.6.– Es importante estudiar cómo afecta un cambio de sistema de referencia a una ecuación de una hipercuádrica. Recordemos que si $P=(x_0:\cdots:x_n)$, entonces estas componentes son también las coordenadas de P respecto del sistema de referencia canónico $\mathcal{S}$ en $\mathbb{P}_n(k)$, por tanto, si Q es una hipercuádrica de ecuación $XAX^t=0$, diremos que éstas son las ecuaciones de Q respecto de $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{R}$ es otro sistema de referencia, las ecuaciones del cambio son de la forma $\lambda X=YM$ con $Y=(y_0,\dots,y_n)$ y $|M|\neq 0$. Por tanto, diremos que Q tiene, respecto de $\mathcal{R}$, una ecuación $Y(MAM^t)Y^t=0$.
En resumen, si $[A]$ es la clase-matriz de Q respecto de $\mathcal{S}$, entonces $[MAM^t]$ es la clase-matriz de Q respecto de $\mathcal{R}$. Esto nos va a permitir la clasificación de las hipercuádricas en el espacio proyectivo, utilizando todas las herramientas estudiadas en Álgebra Lineal sobre congruencias de matrices (dos matrices cuadradas A y B se decían *congruentes*, cuando existía una matriz M, $|M|\neq 0$, tal que $B=MAM^t$).

Definición 5.1.7.– Dos hipercuádricas Q y Q', de ecuaciones $XAX^t=0$ y $XBX^t=0$, se dicen (proyectivamente) *equivalentes*, y se notará $Q\sim Q'$, si se diferencian en un cambio de sistema de referencia, es decir, si existe una matriz M, con $|M|\neq 0$, tal que $[B]=[MAM^t]$, o bien, A y B son congruentes salvo escalar.

Se trata de resolver dos problemas, íntimamente relacionados:
Problema 1.– Dada una hipercuádrica Q encontrar un sistema de referencia en el que Q tenga una ecuación "lo más simple posible".
Problema 2.– Dadas dos hipercuádricas Q y Q' deducir si son o no equivalentes.
Para la respuesta a ambas cuestiones será fundamental el cuerpo base k. Como nos apoyaremos en resultados de Álgebra Lineal relativos a congruencias de matrices reales y complejas, la solución a los problemas citados se circunscribe a $k=\mathbb{R}$ o $k=\mathbb{C}$.

Resultados previos de Álgebra Lineal

1. Sea A una matriz simétrica con elementos en k. Existe una matriz inversible M tal que la matriz MAM^t es diagonal.

2. Sea A una matriz simétrica compleja. Existe una matriz M compleja, inversible, tal que
$$MAM^t=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$
Más aún, si M y M' son dos matrices complejas inversibles tales que $D=MAM^t$ y $D'=M'A(M')^t$ son diagonales, entonces el número de elementos no nulos en las diagonales de D y D' coincide y por tanto este número no depende más que de A (de hecho este número es el rango de A). Se deduce fácilmente de lo anterior que dos matrices simétricas complejas son congruentes si y sólo si tienen el mismo rango.

3. Sea A una matriz simétrica real. Existe una matriz M real inversible tal que

$$MAM^t = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, si M y M' son dos matrices reales inversibles tales que $D = MAM^t$ y $D' = M'A(M')^t$ son diagonales, entonces el número de elementos positivos en las diagonales de D y D' coincide y por tanto este número no depende más que de A, se llama *signatura lineal* de A, y lo notaremos por $\mathrm{sl}(A)$. Se deduce fácilmente de lo anterior que dos matrices simétricas reales son congruentes si y sólo si tienen el mismo rango y la misma signatura lineal.

A partir de estos resultados se pueden resolver fácilmente los problemas enunciados.

Teorema 5.1.8.– (Clasificación de hipercuádricas complejas)

1. Sea Q una hipercuádrica compleja. El rango de cualquier matriz de cualquier ecuación de Q no varía, y se denominará *rango* de Q.
2. Si Q tiene rango $r+1$, existe un sistema de referencia en $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ en el que $x_0^2 + \ldots + x_r^2 = 0$ es una ecuación (*reducida*) de Q.
3. Sean Q y Q' dos hipercuádricas complejas. $Q \sim Q'$ si y sólo si Q y Q' tienen el mismo rango.

Demostración: Es consecuencia trivial de los resultados previos de Álgebra Lineal y del hecho de que el rango de una matriz cualquiera no varía al multiplicarse por un escalar no nulo. □

Teorema 5.1.9.– (Clasificación de hipercuádricas reales)

1. Sea Q una hipercuádrica real. El rango de cualquier matriz A de cualquier ecuación $XAX^t = 0$ de Q no varía, y se denominará *rango* de Q. El número $|\mathrm{sl}(A) - \mathrm{sl}(-A)|$ sólo depende de Q y se denominará *signatura proyectiva* de Q, y la notaremos $\mathrm{sp}(Q)$.
2. Existe un sistema de referencia en $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tal que una ecuación (*reducida*) de Q es $x_0^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_r^2 = 0$, donde $r+1$ es el rango de Q y la diferencia entre coeficientes positivos y negativos, en valor absoluto ($|2p-r+1|$), es la signatura proyectiva de Q.
3. Sean Q y Q' dos hipercuádricas reales. $Q \sim Q'$ si y sólo si Q y Q' tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva.

Demostración: 1. La signatura lineal es invariante por congruencias. Por otra parte $\mathrm{sl}(\lambda A)$ es igual a $\mathrm{sl}(A)$ si $\lambda > 0$, o a $\mathrm{sl}(-A)$ si $\lambda < 0$. En cualquier caso $|\mathrm{sl}(\lambda A) - \mathrm{sl}(-\lambda A)| = |\mathrm{sl}(A) - \mathrm{sl}(-A)|$. Por tanto la signatura proyectiva sólo depende de Q.

2. Es consecuencia trivial del resultado previo de Álgebra Lineal.

3. Si $Q \sim Q'$, unas matrices de sus ecuaciones son congruentes salvo escalar, luego tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva. Recíprocamente, sean $XAX^t = 0$, $XBX^t = 0$ unas ecuaciones de Q y Q' respectivamente, con rango(A)=rango(B) y $|\mathrm{sl}(A) - \mathrm{sl}(-A)| = |\mathrm{sl}(B) - \mathrm{sl}(-B)|$. Como rango$(A) = \mathrm{sl}(A) + \mathrm{sl}(-A)$, si $\mathrm{sl}(A) - \mathrm{sl}(-A) = \mathrm{sl}(B) - \mathrm{sl}(-B)$, se tiene que $\mathrm{sl}(A)$=$\mathrm{sl}(B)$, y por el tercer resultado previo, A y B son congruentes, luego $Q \sim Q'$. Si $\mathrm{sl}(A) - \mathrm{sl}(-A) = -\mathrm{sl}(B) + \mathrm{sl}(-B)$, se tiene que A y $-B$ son congruentes, luego también $Q \sim Q'$. □

Definición 5.1.10.– Llamaremos hipercuádricas *no degeneradas* de $\mathbb{P}_n(k)$ a aquellas que tienen rango máximo $n+1$, y las llamaremos *degeneradas* en caso contrario.

Ejemplo 5.1.11.– Hipercuádricas de la recta proyectiva compleja. Como hemos visto, hay tres tipos de hipercuádricas:

1. rango(Q)=2 (no degeneradas). Su ecuación reducida es $x_0^2+x_1^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ son dos puntos distintos de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

2. rango(Q)=1. Su ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es un punto de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
3. rango(Q)=0. Su ecuación es 0=0 y $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Ejemplo 5.1.12.– Hipercuádricas de la recta proyectiva real. Por el teorema de clasificación hay 4 tipos de hipercuádricas.

1. rango(Q)=2, sp(Q)=2. Su ecuación reducida es $x_0^2+x_1^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q) = \emptyset$. Se llama hipercuádrica no degenerada imaginaria.
2. rango(Q)=2, sp(Q)=0. Su ecuación reducida es $x_0^2 - x_1^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ son dos puntos. Se llama hipercuádrica no degenerada real.
3. rango(Q)=sp(Q)=1. Su ecuación reducida es $x_0^2 = 0$. Así $\mathcal{V}(Q)$ es un punto.
4. rango(Q)=0. Su ecuación es 0=0 y $\mathcal{V}(Q) = \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

El estudio de cónicas y cuádricas lo dejaremos para el tema siguiente, puesto que necesitaremos el concepto de polaridad. Para terminar presentamos un método rápido de cálculo de la signatura proyectiva de una hipercuádrica real. Para ello necesitamos recordar algunos resultados, el primero de ellos del curso previo de Álgebra Lineal.

Lema 5.1.13.– Toda matriz simétrica real A es semejante a una matriz diagonal D, con matriz de paso ortogonal, *i.e.* existe una matriz M, $M^t = M^{-1}$, tal que $MAM^t = D$.

Lema 5.1.14.– Si $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio con todas sus raíces reales y distintas de cero, entonces el número de raíces positivas (contadas con su multiplicidad), coincide con el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes.

Demostración: (Cf. P.Abellanas. "*Elementos de Matemáticas*", cap. VII,§1,nº 5) □

Nota 5.1.15.– Se sabe también que, con las hipótesis de este lema 5.1.14, los coeficientes nulos de $f(x)$ están siempre entre un coeficiente positivo y otro negativo, por lo que es indiferente el signo asignado al 0. Es una consecuencia de este lema que el número de raíces negativas de $f(x)$ (contadas con su multiplicidad), es el de raíces positivas de $g(x) = f(-x)$, y por tanto, coincide con el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes de $g(x)$, que no es sino el número de permanencias de signo de $f(x)$.

Teorema 5.1.16.– Sea Q una hipercuádrica real de ecuación $XAX^t = 0$. Se verifica que sp(Q) coincide con la diferencia, en valor absoluto, entre el número de cambios de signo y de permanencias de la sucesión de coeficientes del polinomio $q(\lambda)$, obtenido dividiendo el polinomio característico de A, $p(\lambda) = |\lambda I - A|$, por la máxima potencia de λ por la que sea divisible.

Demostración: Por el lema 5.1.13, sl(A) es el número de autovalores positivos de A (contados con su multiplicidad), y sl($-A$) es el número de autovalores negativos de A. Por el lema 5.1.14 sl(A) es el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes de $q(\lambda)$, y sl($-A$) es el número de cambios de signo de la sucesión de coeficientes de $q(-\lambda)$, o bien el número de permanencias de signo de la sucesión de coeficientes de $q(\lambda)$. La fórmula $\mathrm{sp}(Q) = |\mathrm{sl}(A) - \mathrm{sl}(-A)|$ termina la demostración. □