Capítulo 4

Espacios vectoriales

4.1. Estructuras algebraicas.

En temas anteriores hemos definido matrices y vectores, estudiando algunas de sus propiedades. También hemos trabajado con cuerpos de escalares, suponiendo que se trataba de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, pero sin dar más detalles. Ahora vamos a estudiar con rigor estos conceptos. Definiremos algunas de las principales estructuras que se utilizan en álgebra, como son: grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales. A continuación nos centraremos en una de las estructuras que se estudian en esta asignatura: los espacios vectoriales.

Las **estructuras algebraicas** son conjuntos donde hay definidas ciertas operaciones, que satisfacen unas determinadas propiedades. Las operaciones pueden ser de varios tipos. Por ejemplo, una **operación binaria interna**, definida en un conjunto X, es una función que a dos elementos de X (dados en orden), le hace corresponder otro elemento de X. Es decir, una función

$$p : X \times X \to X.$$

Por ejemplo, p podría ser la suma, la diferencia o la multiplicación de números reales. Observemos que, en ocasiones (la diferencia de números reales, por ejemplo) el orden en que se den los dos elementos implicados influye en el resultado.

Cuando se trabaja con una operación interna, se suele utilizar un símbolo, por ejemplo $*$, de manera que el resultado de aplicar la operación a dos elementos, a y b, se escribe $a*b$. Un ejemplo típico es el símbolo $+$ para la suma de números. En ocasiones, ni siquiera se utiliza símbolo alguno, como en el caso del producto de números, donde ab representa el producto de a y b.

La primera estructura algebraica que estudiaremos, una de las más básicas y utilizadas, es la de **grupo**:

Grupo

Sea G un conjunto no vacío, y sea $*$ una operación interna definida en G. Se dice que $(G, *)$ es un **grupo**, si se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in G.$
2. **Elemento neutro:** $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \quad \forall a \in G.$
3. **Elemento opuesto:** $\forall a \in G, \quad \exists a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e.$

Normalmente, la operación interna $*$ será la *suma* o el *producto* de elementos. En la notación *aditiva*, el elemento neutro se denota 0, y el elemento opuesto a a se denota $-a$. En la notación *multiplicativa*, el elemento neutro se denota 1, y el elemento opuesto a a, que en este caso se llama el *inverso* de a, se suele denotar a^{-1}, o bien $\frac{1}{a}$.

Sea $(G, *)$ un grupo. Se dice que G es **conmutativo** o **abeliano** si, además de las propiedades de grupo, verifica la siguiente:

4. **Propiedad conmutativa:** $a * b = b * a, \quad \forall a, b \in G.$

Ejemplo 4.1.1. Algunos ejemplos de grupos son los siguientes:

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos aditivos.

- $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ y $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$, donde $\cdot$ se refiere al producto, son grupos abelianos multiplicativos.

- El conjunto de matrices $m \times n$ con entradas en un cuerpo K (ahora veremos la definición de cuerpo), junto con la suma de matrices, es un grupo abeliano aditivo.

- El conjunto de matrices cuadradas $n \times n$ **no singulares** con entradas en un cuerpo K, junto con la multiplicación de matrices, forma un grupo que se llama **Grupo lineal** de orden n sobre K, y se denota $\mathrm{Gl}(n, K)$. Este grupo **no es abeliano**.

- El conjunto de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas en un cuerpo K, y **con determinante igual a 1**, junto con la multiplicación de matrices, forma un grupo que se llama **Grupo especial lineal** de orden n sobre K, y se denota $\mathrm{Sl}(n, K)$. Tampoco es abeliano.

- Los vectores de n coordenadas, con la suma de vectores, forman un grupo abeliano.

En ocasiones, se define más de una operación interna sobre un conjunto. Existen estructuras que dependen de dos o más operaciones. Por ejemplo, la más sencilla es la estructura de *anillo*. Usaremos las notaciones tradicionales, $+$ y $\cdot$, para las dos operaciones internas, pero debemos recordar que pueden ser operaciones cualesquiera verificando las condiciones de la definición:

Anillo

Sea A un conjunto no vacío, y sean $+, \cdot$ dos operaciones internas, que llamaremos *suma* y *producto*, definidas en A. Se dice que $(A, +, \cdot)$ es un **anillo**, si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2. **Propiedad asociativa del producto:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in A.$
3. **Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:**

$$\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, & \forall a, b, c \in A, \\ \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, & \forall a, b, c \in A. \end{cases}$$

Si se verifica alguna propiedad más, tenemos tipos especiales de anillos:

Dado un anillo $(A, +, \cdot)$, se dice que es **unitario**, o que tiene **elemento unidad**, si cumple la siguiente propiedad:

- **Elemento neutro para el producto:** $\exists u \in A$ tal que $a \cdot u = u \cdot a = a$ $\forall a \in A$.

Dado un anillo $(A, +, \cdot)$, se dice que es **conmutativo** si cumple la siguiente propiedad:

- **Propiedad conmutativa del producto:** $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in A.$

Ejemplo 4.1.2. Algunos ejemplos de anillo son los siguientes:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad (\mathbb{Q}, +, \cdot), \quad (\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son anillos conmutativos.
- Si $\mathbb{Z}[x]$ es el conjunto de los polinomios en la variable x, con coeficientes en $\mathbb{Z}$, y definimos naturalmente la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$ de dos polinomios, entonces $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.
- De igual modo, $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot), \quad (\mathbb{R}[x], +, \cdot),$ y $(\mathbb{C}[x], +, \cdot)$ son anillos conmutativos.
- El conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en un cuerpo K, con la suma y el producto de matrices, es un anillo **no conmutativo**.

En resumen, si $(A, +, \cdot)$ es un anillo, entonces $(A, +)$ es un grupo, y $(A, \cdot)$ es *casi* un grupo: sólo le falta el elemento inverso, y puede que el elemento unidad.

Hay elementos, como el 0 en el caso de los números, que no pueden tener inverso multiplicativo. Pero si cualquier otro elemento puede invertirse, es decir, si $(A\backslash\{0\}, \cdot)$ fuera un grupo, y aún más, un grupo abeliano, entonces estaríamos ante un *cuerpo*.

Cuerpo

Sea K un conjunto no vacío, y sean $+, \cdot$ dos operaciones internas, que llamaremos *suma* y *producto*, definidas en K. Se dice que $(K, +, \cdot)$ es un **cuerpo**, si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(K, +)$ es un grupo abeliano.
2. $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde 0 es el elemento neutro de la suma.
3. **Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in K,$$

Dicho de otra forma, un cuerpo es un anillo conmutativo, con elemento unidad, donde todo elemento no nulo tiene inverso.

Observemos que la propiedad distributiva sólo tiene una condición. Esto es porque el producto es conmutativo, luego la otra condición es consecuencia de la primera.

Ejemplo 4.1.3. Algunos ejemplos de cuerpo son los siguientes:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $\quad (\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son cuerpos.

- Los grupos de matrices invertibles, $\mathrm{Gl}(n, k)$, o de determinante 1, $\mathrm{Sl}(n, k)$, **no son cuerpos**, ya que el producto de matrices no es conmutativo.

Los cuerpos tienen multitud de propiedades, que no se estudiarán en esta asignatura. Nosotros los usaremos para definir estructuras más complejas, que generalicen las propiedades de los vectores, que hemos visto en los temas anteriores.

Para ello debemos definir las *operaciones externas*. Consideremos un conjunto X, y otro conjunto K que llamaremos *conjunto de escalares*. Llamaremos **operación binaria externa** sobre X, a una función que tome un elemento de K y un elemento de X, y dé como resultado un elemento de X. Es decir, una función:

$$p : K \times X \to X.$$

Normalmente, a una operación externa de este tipo la denotaremos $\cdot$ y la llamaremos *multiplicación por escalar*; y al resultado de aplicarla a un escalar $\alpha \in K$ y a un elemento $x \in X$, lo denotaremos $\alpha \cdot x$, o simplemente αx, y lo llamaremos producto de α por x.

Por tanto, si tenemos un conjunto X y otro conjunto de escalares K, podemos tener operaciones internas en cada uno de esos conjuntos, y operaciones externas entre ellos. Usando estas dos posibilidades, se definen los *espacios vectoriales*.

Espacio vectorial

Sean V y K conjuntos no vacíos. Sea $+$ una operación interna sobre V, y sea $\cdot$ una operación externa sobre V con conjunto de escalares K, que llamaremos *producto por escalar*. Diremos que V, con estas operaciones, es un **espacio vectorial** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(V, +)$ es un grupo abeliano.
2. K es un cuerpo.
3. El producto por escalar verifica las siguientes propiedades:

   a) $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}, \quad \forall\alpha, \beta \in K,\ \forall\mathbf{v} \in V.$

   b) $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}, \quad \forall\alpha \in K,\ \forall\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$

   c) $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}, \quad \forall\alpha, \beta \in K,\ \forall\mathbf{v} \in V.$

   d) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\quad \forall\mathbf{v} \in V$, donde 1 es el elemento neutro de la multiplicación de K.

A los elementos de un espacio vectorial los llamaremos **vectores**, y los escribiremos **en negrita**. En un espacio vectorial hay, por tanto, cuatro operaciones: la suma de vectores, la suma y producto de escalares, y el producto de vectores por escalares.

Ejemplo 4.1.4. Algunos ejemplos de espacios vectoriales son los siguientes:

- Los vectores que vimos en los temas anteriores, forman un espacio vectorial. El espacio vectorial de los vectores de n coordenadas sobre un cuerpo K, se denota K^n. La suma se realiza coordenada a coordenada, y el producto por escalar también. Ejemplos de este tipo son $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

- Las matrices $m \times n$ con entradas en un cuerpo K, con la suma de matrices y el producto por escalar, forman un espacio vectorial. Observemos que el producto de matrices no se utiliza aquí: En general, no tiene por qué existir una multiplicación de vectores en un espacio vectorial.

- El **espacio vectorial trivial** es el conjunto $V = \{0\}$, con respecto a cualquier cuerpo K. Cualquier operación donde intervenga algún vector da como resultado el único elemento: 0.

- Los conjuntos de polinomios $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ son espacios vectoriales con cuerpo de escalares, respectivamente, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

- Los conjuntos $\mathbb{Q}[x]_{\leq n}$, $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ y $\mathbb{C}[x]_{\leq n}$, formados por polinomios de grado menor o igual a n, son espacios vectoriales con cuerpo de escalares, respectivamente, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Ejercicio 4.1.1. Probar que el conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo es un espacio vectorial. ¿Ocurre lo mismo con las soluciones de un sistema lineal no homogéneo? Justifique la respuesta.

Terminamos esta sección con algunas consecuencias sencillas de la definición de espacio vectorial:

Proposición 4.1.1. *Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se tienen las siguientes propiedades, para todo $\alpha, \beta \in K$ y todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$:*

1. $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$, *donde* $\mathbf{0}$ *es el elemento neutro de la suma en* V.
2. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, *donde* 0 *es el elemento neutro de la suma en* K.
3. *Si* $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *entonces, o bien* $\alpha = 0$ *o bien* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
4. *Si* $\alpha \mathbf{v} = \beta \mathbf{v}$ *y* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\alpha = \beta$.
5. *Si* $\alpha \mathbf{v} = \alpha \mathbf{w}$ *y* $\alpha \neq 0$, *entonces* $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
6. $(-\alpha)\mathbf{v} = \alpha(-\mathbf{v}) = -\alpha \mathbf{v}$.

4.2. Dependencia lineal.

La noción de dependencia o independencia lineal ya la hemos estudiado, en temas anteriores, para vectores de K^n. La definición es exactamente la misma para elementos de un espacio vectorial cualquiera. Repetimos aquí las definiciones y resultados principales:

Combinación lineal

Sea V un espacio vectorial sobre K. Dados r vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$, llamamos **combinación lineal** de estos vectores a cualquier expresión de la forma:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r \in V,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$.

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un vector $\mathbf{v}$ **depende linealmente** de un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ si $\mathbf{v}$ se puede escribir como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$.

Dependencia e independencia lineal

Sea V un espacio vectorial sobre K. Diremos que un sistema (o conjunto) de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subset V$ es **linealmente dependiente**, si existen r escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$, *no todos nulos*, tales que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

En caso contrario, es decir, si la única forma de escribir el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de estos vectores es tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$, diremos que el sistema S es **linealmente independiente** o **libre**.

Espacio vectorial K^n

Si el espacio vectorial es K^n podemos usar los cálculos matriciales de los temas anteriores para saber si un sistema de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subset K^n$ es linealmente dependiente.

Para ello tomamos la matriz

$$A_S = (\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_r)$$

cuyas columnas son los vectores de S.

Sea E cualquier forma escalonada por filas de A_S. Si alguna columna de E no tiene pivote, sabemos que la columna correspondiente en A_S es también combinación lineal de las anteriores, luego S es *linealmente dependiente*.

Si todas las columnas de E tienen pivote entonces S es *linealmente independiente*.

Es decir, S es linealmente independiente si y sólo si $\operatorname{rango}(A_S) = r$.

Ejemplo 1.- En $\mathbb{R}^3$ el conjunto $S = \{\mathbf{u}_1 = (1,1,2), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1), \mathbf{u}_3 = (2,-1,2)\}$ es *linealmente independiente*, pues

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, el conjunto $T = \{\mathbf{u}_1 = (1,1,2), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1), \mathbf{u}_3 = (2,-1,1)\}$ es *linealmente dependiente*, pues

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 4.2.1. *Sea V un espacio vectorial. Un sistema de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subset V$ es linealmente dependiente si y sólo si uno de ellos es combinación lineal de los demás.*

PRUEBA: Supongamos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente dependiente. Entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, no todos nulos, tales que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$. Sabemos que existe al menos un $\alpha_i \neq 0$. Tendremos entonces:

$$\alpha_i\mathbf{v}_i = -\alpha_1\mathbf{v}_1 - \cdots - \alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} - \alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} \cdots - \alpha_r\mathbf{v}_r,$$

y al ser $\alpha_i \neq 0$, podremos despejar

$$\mathbf{v}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\mathbf{v}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\mathbf{v}_{i+1} \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_i}\mathbf{v}_r,$$

que es una expresión de $\mathbf{v}_i$ como combinación lineal de los demás, por tanto $\mathbf{v}_i$ depende linealmente de los demás.

Supongamos ahora que un vector $\mathbf{v}_i$ depende linealmente de los demás. Esto quiere decir que existe una combinación lineal

$$\mathbf{v}_i = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \beta_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} \cdots + \beta_r\mathbf{v}_r.$$

De esta igualdad se obtiene

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i + \beta_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} \cdots + \beta_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0},$$

que es una expresión del vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ donde no todos los coeficientes son nulos (el coeficiente de $\mathbf{v}_i$ es -1). Por tanto, el sistema $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente dependiente. □

Lema 4.2.2. *Si un vector* $\mathbf{u}$ *depende linealmente de los vectores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$*, y cada uno de estos depende linealmente de los vectores* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q$*, entonces* $\mathbf{u}$ *depende linealmente de* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q$*.*

PRUEBA: Por hipótesis, podemos escribir $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots \alpha_p \mathbf{v}_p$ y además $\mathbf{v}_i = \beta_{i,1}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{i,q}\mathbf{w}_q$ para $i = 1, \ldots, p$. Sustituyendo cada $\mathbf{v}_i$ por la combinación lineal anterior, en la expresión de $\mathbf{u}$, se obtiene:

$$\mathbf{u} = \alpha_1(\beta_{1,1}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{1,q}\mathbf{w}_q) + \cdots + \alpha_p(\beta_{p,1}\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_{p,q}\mathbf{w}_q).$$

reorganizando los términos queda:

$$\mathbf{u} = (\alpha_1\beta_{1,1} + \cdots + \alpha_p\beta_{p,1})\mathbf{w}_1 + \cdots + (\alpha_1\beta_{1,q} + \cdots + \alpha_p\beta_{p,q})\mathbf{w}_q.$$

Si llamamos $\gamma_i = \alpha_1\beta_{1,i} + \cdots + \alpha_p\beta_{p,i}$ para $i = 1, \ldots, q$, la expresión anterior se lee

$$\mathbf{u} = \gamma_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_q\mathbf{w}_q,$$

lo que implica que $\mathbf{u}$ depende linealmente de $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q\}$. □

Lema 4.2.3. *Sea* $S \subset V$ *un sistema linealmente independiente. Si* $\mathbf{v}$ *es un vector que no depende linealmente de los vectores de* S*, entonces* $S \cup \{\mathbf{v}\}$ *es un sistema linealmente independiente.*

PRUEBA: Sea $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$. Por reducción al absurdo, supongamos que $S \cup \{\mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente. Esto quiere decir que se puede escribir

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots \alpha_r\mathbf{u}_r + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

donde no todos los coeficientes son nulos. Si tuviéramos $\beta = 0$, la expresión anterior sería una expresión de $\mathbf{0}$ como una combinación lineal de los elementos de S donde no todos los coeficientes serían nulos, lo cual no es posible porque S es un sistema linealmente independiente. Por tanto, $\beta \neq 0$. Podemos entonces despejar $\mathbf{v}$ en la expresión anterior, obteniendo:

$$\mathbf{v} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\mathbf{u}_1 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\beta}\mathbf{u}_r.$$

Por tanto $\mathbf{v}$ depende linealmente de S. Contradicción. □

4.3. Sistemas de generadores y bases.

En esta sección veremos cómo el concepto de dependencia lineal sirve para expresar los elementos de un espacio vectorial utilizando sólo un conjunto (posiblemente finito) de vectores.

Sistema de generadores

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un sistema de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un **sistema de generadores** de V si todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de los vectores de S.

En este caso diremos que V está generado por S, o por los vectores de S.

Espacio vectorial K^n

Si el espacio vectorial es K^n, un sistema de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un sistema generador si y sólo si cualquier forma escalonada por filas de la matriz

$$A_S = (\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_r)$$

tiene exactamente n pivotes.
Es decir, S es sistema generador si y sólo si $\operatorname{rango}(A_S) = n$.
Ejemplo 2.- En el ejemplo 1, página 74, S es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, mientras que T no lo es.

Un espacio vectorial puede tener muchos sistemas de generadores diferentes. Incluso puede haber sistemas de generadores donde "sobre" algún vector. Por ejemplo, si tenemos un sistema con cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, nos basta con tres de ellos para generar todo el espacio. Esto nos va a llevar al concepto de base. Pero antes debemos hacer una restricción, puesto que existen espacios vectoriales demasiado "grandes".

Un espacio vectorial V se dice que es de **tipo finito** si está generado por un número finito de vectores. Es decir, si existe un sistema de generadores $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$.

Para estos espacios vectoriales de tipo finito, podemos definir sin problemas la noción de *base*:

Base

Sea V un espacio vectorial de tipo finito. Diremos que un sistema de vectores $B \subset V$ es una **base** de V si cumple:

1. B es un sistema de generadores de V.
2. B es linealmente independiente.

En otras palabras, una base es un sistema de generadores de un espacio vectorial en el que no sobra ningún vector, ya que, al ser linealmente independiente, ninguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los demás.

Espacio vectorial K^n

Si el espacio vectorial es K^n, de lo visto anteriormente se deduce que un sistema de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \in K^n$ es base si tiene n vectores ($r = n$) y la forma escalonada reducida por filas de la matriz de B,

$$A_B = (\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_n)\,,$$

es la identidad I_n.

Ejemplo 3.- En el ejemplo 1, página 74, S es una base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.3.1. *Sea V un espacio vectorial de tipo finito, y sea B sistema de vectores de V. Entonces B es una base si y sólo si todo vector de V se puede expresar* ***de una única manera*** *como combinación lineal de los vectores de B.*

PRUEBA: Supongamos que $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de V. Dado un vector $\mathbf{v} \in V$, como B es sistema de generadores podremos escribir $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$. Si existiera otra forma de expresar $\mathbf{v}$, digamos $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{u}_n$, entonces tendríamos

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{u}_1 + \cdots (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{u}_n.$$

Pero como B es un sistema linealmente independiente, los coeficientes de la expresión anterior deben ser todos nulos. Es decir, $\alpha_i - \beta_i = 0$, o lo que es lo mismo, $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, la forma de expresar $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los elementos de B es única.

Recíprocamente, sea $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es un sistema tal que todo vector $\mathbf{v} \in V$ se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de B. Por un lado, B es sistema de generadores, puesto que todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de B. Por otra parte, consideremos el vector $\mathbf{0} \in V$. Sabemos que siempre se tiene la combinación lineal obvia:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_n.$$

Por la propiedad que le suponemos a B, esta es la única forma de escribir $\mathbf{0}$ como combinación lineal de los vectores de B. Por tanto, B es un sistema linealmente independiente, luego es una base. $\square$

Espacio vectorial K^n

Si el espacio vectorial es K^n, la reducción de matrices nos permite calcular cómo escribir cualquier vector $\mathbf{v}$ como combinación lineal de una base $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Haciendo transformaciones por filas obtenemos

$$(\mathbf{u}_1|\cdots|\mathbf{u}_n|\mathbf{v}) \xrightarrow{Gauss-Jordan} \left(\begin{array}{c|c} & \alpha_1 \\ I_n & \vdots \\ & \alpha_n \end{array}\right).$$

Luego $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$.

Ejemplo 4.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ podemos escribir el vector $\mathbf{u} = (1,0,2)$ como combinación lineal de la base $B = \{\mathbf{u}_1 = (1,1,2), \mathbf{u}_2 = (-1,0,-1), \mathbf{u}_3 = (2,-1,2)\}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

de donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$.

Ahora veamos que un espacio vectorial de tipo finito, que no sea trivial, siempre tiene una base. Además veremos cómo se construye, a partir de un sistema de generadores.

Teorema 4.3.2. *[de existencia de base] Sea $V \neq \{\mathbf{0}\}$ un espacio vectorial de tipo finito. Dado cualquier sistema finito de generadores $G \subset V$, existe una base B de V formada por vectores de G.*

PRUEBA: Consideremos el sistema de generadores $G = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. Si es libre, entonces es una base, y hemos acabado. Si no, hay un elemento $\mathbf{v}_i \in G$ que depende linealmente de los demás. Pero entonces $G_1 = G \backslash \{\mathbf{v}_i\}$ sigue siendo sistema de generadores. Si es libre, G_1 es una base. Si no, existirá otro vector $\mathbf{v}_j$ que depende linealmente de los demás vectores de G_1, y también lo podremos eliminar.

Continuamos este proceso mientras el sistema de generadores sea linealmente dependiente. Pero como mucho podremos eliminar $p-1$ vectores ya que, como $V \neq \{\mathbf{0}\}$, al menos debe haber un vector en cualquier sistema de generadores. Por tanto, en algún momento debemos tener algún G_i que sea libre, luego será una base contenida en G. $\square$

Espacio vectorial K^n

Sea $G = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ un sistema de generadores del espacio vectorial K^n. Cualquier forma escalonada por filas de la matriz

$$A_G = (\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_p)$$

debe tener n columnas con pivote. Pongamos que estas columnas son $\{i_1, \ldots, i_n\}$. Entonces el conjunto $B = \{\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}\}$ es una base de K^n.

Ejemplo 5.- En $\mathbb{R}^3$ consideremos el sistema

$$G = \{\mathbf{v}_1 = (1,1,2), \mathbf{v}_2 = (-1,0,1), \mathbf{v}_3 = (2,-1,1),$$

$$\mathbf{v}_4 = (0,1,1), \mathbf{v}_5 = (2,-1,2)\}.$$

Mediante transformaciones elementales por filas obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego G es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$ es una base.

4.4. Teorema de la base. Dimensión.

En esta sección definiremos un concepto esencial del álgebra lineal: la *dimensión* de un espacio vectorial. Necesitamos primero el siguiente resultado:

Teorema 4.4.1. *Sea V un espacio vectorial. Si $G = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ es un sistema de generadores de V, y $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un sistema linealmente independiente, entonces $n \leq m$.*

PRUEBA: Supongamos que $n > m$. Como G es un sistema de generadores, podemos escribir cada $\mathbf{v}_i$ como combinación lineal de los elementos de G:

$$\mathbf{v}_i = a_{1i}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{mi}\mathbf{u}_m.$$

Por otra parte, como S es linealmente independiente, la ecuación

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = 0$$

sólo puede admitir la solución trivial, $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Ahora bien, sustituyendo cada $\mathbf{v}_i$, obtenemos la ecuación equivalente:

$$x_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{m1}\mathbf{u}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{u}_m) = 0,$$

donde, sacando factor común los $\mathbf{u}_i$, se tiene:

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{u}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\mathbf{u}_m = 0.$$

Una posible solución para esta ecuación se obtendría si cada coeficiente fuera cero, es decir, si

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Este sistema homogéneo tiene, como máximo, rango m, ya que tiene m filas. Ahora bien, si $n > m$, el Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que es un sistema compatible indeterminado, es decir, existe una solución para $x_1, \ldots, x_n$ donde no todos son cero. Esto contradice que S sea un sistema libre. $\square$

Veamos entonces qué es la *dimensión* de un espacio vectorial:

Teorema 4.4.2 (Teorema de la base)**.** *Sea V un espacio vectorial de tipo finito. Todas las bases de V tienen el mismo número de elementos. A este número se le llama* ***dimensión*** *de V.*

PRUEBA: Sean B_1 y B_2 dos bases de V, de m y n vectores respectivamente. Como B_1 es sistema de generadores, y B_2 es libre, entonces $n \leq m$ por el Teorema 4.4.1. Pero como B_2 es sistema de generadores, B_1 es libre, se tiene $m \leq n$. Por tanto, $m = n$. $\square$

Dimensión

La dimensión de un espacio vectorial V, que denotamos $\dim(V)$, se define como sigue:

- Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\dim(V) = 0$.
- Si V es de tipo finito, su dimensión es el número de elementos de cualquier base de V.
- Si V no es de tipo finito, diremos que tiene dimensión infinita, y escribiremos $\dim V = \infty$.

Ejemplo 4.4.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n. Una base, llamada la **base canónica**, está formada por los vectores $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, donde

$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Ejemplo 4.4.2. El conjunto de polinomios, $\mathbb{R}[x]$, es un espacio vectorial de dimensión infinita. En efecto, supongamos que existe un sistema de generadores G de $\mathbb{R}[x]$, formado por un número finito de polinomios. Sea entonces m el mayor grado de todos los polinomios de G. Entonces, cualquier combinación lineal de los polinomios de G tiene como máximo grado m, luego no podríamos obtener los polinomios de grado mayor que m, y G no sería sistema de generadores. Por tanto, $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$.

4.5. Dimensión y sistemas de vectores. Coordenadas.

La dimensión de un espacio vectorial nos impone restricciones sobre el tamaño que pueden tener los sistemas libres, o los sistemas de generadores:

Proposición 4.5.1. *Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial V de dimensión finita. Se tiene:*

1. *Si S es un sistema de generadores, entonces $m \geq \dim V$.*
2. *Si S es linealmente independiente, entonces $m \leq \dim V$.*
3. *Si S es sistema de generadores, y $m = \dim V$, entonces S es base de V.*
4. *Si S es linealmente independiente, y $m = \dim V$, entonces S es base de V.*

Ejercicio 4.5.1. Demostrar la proposición anterior.

Una propiedad importante de las bases es la siguiente:

Teorema 4.5.2. *[Teorema de la base incompleta] Sea V un espacio vectorial de tipo finito. Todo sistema linealmente independiente puede completarse hasta obtener una base. Es decir, si $\dim V = n$, y $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es un sistema libre, con $m < n$, entonces existen $n - m$ vectores $\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ tales que el sistema $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es base de V. Además, los vectores $\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ pueden tomarse de cualquier base de V.*

PRUEBA: Sea S como en el enunciado, y sea $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V. Si cada elemento de B depende linealmente de los elementos de S, entonces S es sistema de generadores, luego sería una base. Imposible. Tendremos entonces un vector de B, supongamos que es $\mathbf{u}_1$, que no depende linealmente de S. Tomamos entonces el sistema $S \cup \{\mathbf{u}_1\}$, que será linealmente independiente.

Si $m + 1 < n$, entonces $S \cup \{\mathbf{u}_1\}$ no es base. Por tanto, debe existir otro vector en B (que no puede ser $\mathbf{u}_1$), que no dependa linealmente de $S \cup \{\mathbf{u}_1\}$. Digamos que es $\mathbf{u}_2$. Entonces $S \cup \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es linealmente independiente. Continuamos este proceso hasta obtener $S \cup \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-m}\}$, sistema linealmente independiente de n vectores, es decir, base de V. $\square$

Espacio vectorial K^n

Consideremos el espacio vectorial K^n, en el ejemplo 4.4.1 hemos definido la base canónica $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de K^n, donde

$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sistema libre de K^n, con $m \leq n$. Siempre podemos completar el sistema con vectores de la base canónica hasta tener una base de K^n. De hecho, cualquier forma escalonada por filas de la matriz

$$A = (\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_m | \mathbf{e}_1 | \cdots | \mathbf{e}_n)$$

tiene n pivotes. Los m primeros pivotes están en las m primeras columnas, pues S es un sistema libre, y el resto entre las siguientes columnas, pongamos $\{i_1, \ldots, i_{n-m}\}$. Luego el conjunto

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{e}_{i_1 - m}, \ldots, \mathbf{e}_{i_{n-m} - m}\}$$

es una base de K^n que completa a S.

Ejemplo 6.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideramos el sistema libre $S = \{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (2, -1, 2, 1)\}$. Completaremos S con vectores de la base canónica hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right).$$

Luego una base de $\mathbb{R}^4$ que completa a S es

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (2, -1, 2, 1), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)\}.$$

La principal ventaja de la existencia de bases, en los espacios vectoriales de tipo finito, es que vamos a poder estudiarlos, sea cual sea el espacio vectorial, como si fuera K^n. Esto lo vamos a conseguir mediante el uso de *coordenadas*.

Primero necesitamos hacer una precisión. Hasta ahora, cuando hablábamos de un sistema de vectores, o de una base, no nos importaba el orden en que estuvieran los vectores. Pero para definir las coordenadas de un vector, es necesario fijar un orden. Por tanto, a partir de ahora, escribiremos la bases de la siguiente forma: $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. El uso de paréntesis, en lugar de llaves, indica que los vectores están ordenados, luego podremos hablar del i-ésimo vector de una base, de forma rigurosa.

Coordenadas

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K. Dada una base $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ sabemos que, para todo vector $\mathbf{v} \in V$, existe una única combinación lineal

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n.$$

Los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ definen, por tanto, al vector $\mathbf{v}$, y los llamaremos **coordenadas** de $\mathbf{v}$ respecto a B. Escribiremos:

$$\mathbf{v}_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Cuando la base B esté clara por el contexto, escribiremos simplemente

$$\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Por tanto, no importa cómo sea V como espacio vectorial; si fijamos una base, vamos a poder representar los elementos de V como elementos del conocido espacio vectorial K^n. Pero la correspondencia entre V y K^n es todavía más fuerte: las operaciones de suma y producto por escalar son iguales en ambos espacios. Veamos esto con más detalle:

Espacio vectorial K^n

Si el espacio vectorial es K^n y $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ es una base, ya hemos visto anteriormente (página 78), que $\mathbf{v}_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ si y sólo si la forma escalonada reducida de la matriz $(\mathbf{u}_1 | \cdots | \mathbf{u}_n | \mathbf{v})$ es

$$\left(\begin{array}{c|c} & \alpha_1 \\ I_n & \vdots \\ & \alpha_n \end{array} \right).$$

Ejemplo 7.- En R^4 usamos la reducción por filas de matrices para obtener las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$ respecto de la base

$$B = \{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0, 1),$$

$$\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{u}_4 = (0, 1, 1, 1)\}.$$

Aplicando el método de elminación de Gauss-Jordan tenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{array} \right).$$

Luego

$$\mathbf{v}_B = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right).$$

Teorema 4.5.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, y sea B una base de V. Sea*

$$\mathcal{C}_B :\ V \to K^n$$

la aplicación que a cada elemento de V le hace corresponder el vector de sus coordenadas. Entonces $\mathcal{C}_B$ es una aplicación biyectiva, y además se tiene:

1. $\mathcal{C}_B(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathcal{C}_B(\mathbf{u}) + \mathcal{C}_B(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$
2. $\mathcal{C}_B(\alpha\, \mathbf{u}) = \alpha\, \mathcal{C}_B(\mathbf{u}) \qquad \forall \mathbf{u} \in V,\ \forall \alpha \in K.$

PRUEBA: La aplicación es biyectiva por el Teorema 4.3.1.

Ejercicio 4.5.2. Probar las propiedades de la suma y del producto por escalar.

□

Este resultado nos dice que los espacios vectoriales V y K^n son **isomorfos**. Por tanto, si necesitamos trabajar con un espacio vectorial de dimensión n, podemos trabajar simplemente con K^n.

4.6. Cambio de base.

Observemos que las coordenadas de un vector de V dependen de la base B que hayamos elegido. Si tuviéramos otra base B', las coordenadas del mismo vector serían diferentes. Vamos a ver entonces cómo están relacionados estos dos tipos de coordenadas.

Supongamos que tenemos un espacio vectorial V de dimensión n, y consideremos dos bases de V: $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ y $B' = (\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n)$. Como B es base, podremos escribir cada vector de B' respecto a B, es decir, tendremos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{u}_n,\\
\mathbf{u}'_2 &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{u}_n,\\
&\ \ \vdots\\
\mathbf{u}'_n &= a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n.
\end{aligned}$$

Con esta notación, se tiene lo siguiente:

Teorema 4.6.1. *Si las coordenadas de $\mathbf{v} \in V$ respecto a B y B' son, respectivamente $\mathbf{v}_B = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{v}_{B'} = (x'_1, \ldots, x'_n)$, entonces se tiene la relación:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= a_{11}\mathbf{x}'_1 + a_{12}\mathbf{x}'_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}'_n,\\
\mathbf{x}_2 &= a_{21}\mathbf{x}'_1 + a_{22}\mathbf{x}'_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{x}'_n,\\
&\ \ \vdots\\
\mathbf{x}_n &= a_{n1}\mathbf{x}'_1 + a_{n2}\mathbf{x}'_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{x}'_n.
\end{aligned}$$

PRUEBA: Por un lado, tenemos $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$. Y por otro lado, $\mathbf{v} = x'_1\mathbf{u}'_1 + \cdots + x'_n\mathbf{u}'_n$. Si sustituimos cada $\mathbf{u}'_i$ por $a_{1i}\mathbf{u}_1 + a_{2i}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{ni}\mathbf{u}_n$ en la expresión anterior, y agrupamos coeficientes, obtendremos:

$$\mathbf{v} = (a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n)\mathbf{u}_1 + \cdots + (a_{n1}x'_1 + \cdots + a_{nn}x'_n)\mathbf{u}_1.$$

Como la forma de expresar $\mathbf{v}$ como combinación lineal de B es única, los coeficientes de esta última combinación lineal han de ser iguales a $x_1, \ldots, x_n$, lo que demuestra el resultado. $\square$

Una de las principales ventajas de trabajar con K^n es que podemos usar matrices. El teorema anterior, por ejemplo, se puede ver mucho mejor de forma matricial. Sea

$$A_{B',B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la *matriz del cambio de base*. Es decir, las **columna** i de $A_{B',B}$ contiene las coordenadas del vector $\mathbf{v}'_i$ de B' respecto de la base B. Entonces la relación entre las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(x'_1, \ldots, x'_n)$, respecto a B y B', de un vector cualquiera es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Escrito de otra manera,

$$X = A_{B',B}\, X',$$

donde X y X' son los vectores columna que representan las coordenadas de un vector respecto a B y a B'. Por tanto, la matriz $A_{B',B}$ transforma las coordenadas respecto a B' en coordenadas respecto a B (mediante multiplicación a izquierda).

Teorema 4.6.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sea B una base de V. Dado un sistema B' de n vectores, sea $A_{B',B}$ la matriz $n \times n$ cuyas columnas contienen las coordenadas de los vectores de B' respecto a B. Entonces B' es una base si y sólo si $A_{B',B}$ es no singular.*

PRUEBA: B' es base de V si y sólo si sus vectores son linealmente independientes. Esto es, si y sólo si las columnas de $A_{B',B}$ son linealmente independientes, lo que ocurre si y sólo si $\text{rg}(A_{B',B}) = n$, es decir, si $A_{B',B}$ es no singular. $\square$

Otra forma de demostrar que, dadas dos bases B y B', la matriz $A_{B',B}$ es invertible, es la siguiente: consideremos la matriz $A_{B,B'}$. Esta matriz transforma coordenadas respecto de B en coordenadas respecto de B'. Por tanto, tenemos por un lado $X = A_{B',B}\, X'$, y por otro $X' = A_{B,B'}\, X$. Uniendo estas dos igualdades, se tiene:

$$X = A_{B',B}\, X' = (A_{B',B} A_{B,B'}) X.$$

Como esta igualdad se tiene para cualquier vector $X \in K^n$, deducimos que $A_{B',B} A_{B,B'} = I$. Análogamente, se obtiene $A_{B,B'} A_{B',B} = I$. Por tanto:

> Dadas dos bases B y B' de un espacio vectorial de dimensión n, la matriz de cambio de base $A_{B',B}$ es invertible, y su inversa es $A_{B,B'}$.

Usando este tipo de matrices, podremos ver la similitud existente entre los conceptos definidos para espacios vectoriales y los definidos para matrices. Pero esto lo haremos mejor en la sección siguiente, donde definiremos los subespacios vectoriales.

Espacio vectorial K^n

Consideremos dos bases B y B' del espacio vectorial K^n, respecto de la base canónica. Sean A_B y $A_{B'}$ las matrices respectivas de ambas bases. Podemos usar transformaciones elementales por filas para obtener la matriz del cambio de base. Por todo lo visto anteriormente sabemos que

$$(A_B|A_{B'}) \stackrel{Gauss-Jordan}{\longrightarrow} (I|A_{B',B}).$$

Ejemplo 8.- En $\mathbb{R}^3$ consideramos las bases

$$B = \{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (1,0,1), \mathbf{u}_3 = (0,1,1)\} \text{ y}$$

$$B' = \{\mathbf{v}_1 = (1,-1,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), \mathbf{v}_3 = (1,0,0)\}.$$

Entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1/2 \end{array}\right).$$

Luego la matriz del cambio de base es

$$A_{B',B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

4.7. Subespacios vectoriales

En los ejemplos que hemos dado en $\mathbb{R}^3$, vimos que un vector define una recta, o que dos vectores (no proporcionales) definen un plano. Son estas estructuras las que en realidad nos interesan, y en las que se centra la mayor parte del álgebra lineal. En esta sección veremos cómo estas estructuras, llamadas *variedades lineales* o *subespacios vectoriales*, también son espacios vectoriales, y estudiaremos sus propiedades. La definición precisa es la siguiente:

Subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea L un subconjunto de V. Diremos que L es un **subespacio vectorial**, o una **variedad lineal** de V si, con las mismas operaciones de suma y producto por escalar, L es un espacio vectorial sobre K.

Observemos que los elementos de L, al ser elementos de V, satisfacen todas las propiedades de un espacio vectorial. Pero hay un detalle importante: tanto la suma de vectores de L, como el producto por escalares, deben dar como resultado vectores de L. Si no, no estaríamos ante operaciones en L, y por tanto L no sería espacio vectorial. Por tanto, lo único que hay que verificar para saber si $L \subset V$ es subespacio vectorial, es lo siguiente:

Proposición 4.7.1. *Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, un subconjunto no vacío $L \subset V$ es una variedad lineal de V si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L, \qquad \mathbf{v} + \mathbf{w} \in L.$
2. $\forall \alpha \in K, \ \ \forall \mathbf{v} \in L, \qquad \alpha \mathbf{v} \in L.$

La siguiente propiedad es consecuencia directa de la definición.

Proposición 4.7.2. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $\mathbf{0}$ el elemento neutro de la suma de vectores. Se tiene:*

1. *El espacio vectorial trivial $\{\mathbf{0}\}$ es una variedad lineal de V.*
2. *Cualquier variedad lineal $L \subset V$ contiene al vector $\mathbf{0}$.*

Ejercicio 4.7.1. Demostrar la proposición anterior.

El ejemplo principal de espacio vectorial que vamos a utilizar es $\mathbb{R}^n$. Recordemos que, si tenemos un sólo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, los vectores que se pueden escribir como combinación lineal de $\mathbf{v}$ forman una recta: la que pasa por el origen y tiene la dirección de $\mathbf{v}$. Por otra parte, si tenemos dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, los vectores que se pueden escribir como combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ forman un plano: el que pasa por el origen y contiene a la recta definida por $\mathbf{v}$ y a la recta definida por $\mathbf{w}$. Al estudiar sistemas de vectores, lo que de verdad nos interesa es esa recta o ese plano, es decir, el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como combinación lineal de los vectores del sistema:

Teorema 4.7.3. *Sea V un espacio vectorial, y sea S un sistema de vectores de V. El conjunto de combinaciones lineales de los vectores de S, que llamaremos $\langle S \rangle$, es una variedad lineal de V.*

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m \mid m \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots \lambda_m \in K, \ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in S\}.$$

Ejercicio 4.7.2. Demostrar el teorema anterior.

Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \cdots \mathbf{w}_q\}$ dos sistemas de vectores de un espacio vectorial V. Diremos que S y T son **equivalentes** si $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.

Otra posible definición de equivalencia de sistemas es la que viene dada por el siguiente resultado:

Proposición 4.7.4. *Sea V un espacio vectorial. Dos sistemas de vectores $S, T \in V$ son equivalentes si y sólo si todo vector de S puede escribirse como combinación lineal de los vectores de T, y viceversa.*

Ejercicio 4.7.3. Demostrar la proposición anterior.

En el caso de $V = \mathbb{R}^3$, dos sistemas de dos vectores son equivalentes si y sólo si definen el mismo plano. De hecho, en $\mathbb{R}^3$, las variedades lineales son la siguientes: el origen (que corresponde al subespacio trivial $\{\mathbf{0}\}$), las rectas que pasan por el origen, los planos que pasan por el origen, y todo $\mathbb{R}^3$. Esto nos da una idea de las dimensiones de estas variedades lineales: en $\mathbb{R}^3$, que tiene dimensión 3, existen variedades de dimensión 0, 1, 2 o 3. Más generalmente, se tiene:

Teorema 4.7.5. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea L una variedad lineal de V. Entonces L también tiene dimensión finita, y $\dim L \leq \dim V$. Además, la igualdad sólo se da si $L = V$.*

PRUEBA: Si $L = \{\mathbf{0}\}$, el resultado es evidente. Supongamos entonces que L contiene vectores no nulos. Entonces L contiene sistemas libres. Pero cualquier sistema libre de L es también un sistema libre de V, luego tiene como máximo n vectores, donde $n = \dim V$. Sea m el número máximo de vectores que puede tener un sistema libre de L (ya sabemos que $m \leq n$), y sea B un sistema libre de m vectores de L. Como no existe otro sistema libre de L con más de m vectores, entonces todo vector de L depende linealmente de B, es decir, B es una base de L. Por tanto $\dim L = m \leq n = \dim V$.

Si tuviéramos $\dim L = \dim V$, entonces una base B de L sería un sistema libre de V con n elementos, luego sería base de V. Por tanto, $L = V$. $\square$

Rango de un sistema de vectores

Sea V un espacio vectorial, y sea S un sistema finito de vectores de V. Llamamos **rango** de S a la dimensión de la variedad lineal generada por S. Es decir:

$$\operatorname{rango}(S) = \dim(\langle S \rangle).$$

Dicho de otra forma, el rango de S es el mayor número de vectores linealmente independientes que se pueden tomar en S.

Tenemos entonces el siguiente resultado, que relaciona el rango de un sistema de vectores y el rango de una matriz:

Proposición 4.7.6. *En un espacio vectorial V de dimensión finita, sea B una base de V, S un sistema finito de vectores de V, y $A_{S,B}$ la matriz cuyas columnas (o cuyas filas) son las coordenadas de los vectores de S respecto a B. Entonces*

$$\operatorname{rango}(S) = \operatorname{rango}(A_{S,B}).$$

PRUEBA: Si $V = K^n$, ya hemos demostrado que el rango de una matriz es el máximo número de columnas (o filas) linealmente independientes que tiene. Si $V \neq K^n$, el resultado es consecuencia del isomorfismo $\mathcal{C}_B$, que a cada vector de V le asocia sus coordenadas. $\square$

Nota: Observemos que el rango de la matriz $A_{S,B}$ **no depende** de la base B, ya que es igual al rango del sistema de vectores S, que está definido sin tener que recurrir a ninguna base. Otra forma de ver esto es la siguiente: si B y B' son dos bases distintas, cuya matriz de cambio de base es $A_{B',B}$, entonces se tiene:

$$A_{S,B} = A_{B',B}\, A_{S,B'}.$$

Como sabemos que $A_{B',B}$ es no singular, entonces $\operatorname{rango}(A_{S,B}) = \operatorname{rango}(A_{S,B'})$.

4.8. Ecuaciones paramétricas e implícitas.

Volviendo a nuestro ejemplo principal, $\mathbb{R}^3$, el rango de un sistema de vectores $S \subset \mathbb{R}^3$, nos dice si $\langle S \rangle$ es un punto, una recta, un plano o todo el espacio, según sea 0, 1, 2 ó 3. Y para ver cuál es ese rango, basta calcular el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores de S.

Hasta ahora sólo hemos visto una forma de determinar una variedad lineal: mediante un sistema de generadores. Esta forma es equivalente a dar unas *ecuaciones paramétricas*.

Ecuaciones paramétricas de una variedad lineal

Sea L una variedad lineal de un espacio vectorial V de dimensión n, y sea $G = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sistema de generadores de L. Supongamos que las coordenadas de $\mathbf{v}_i$ respecto a una base B de V son: $\mathbf{v}_i = (a_{1i}, \cdots, a_{ni})$. Entonces, como todo vector $\mathbf{v} \in L$, con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ se escribe como combinación lineal de G, existirán unos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m$. Es decir:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_{11}\lambda_1 & + & \cdots & + & a_{1m}\lambda_m \\ x_2 & = & a_{21}\lambda_1 & + & \cdots & + & a_{2m}\lambda_m \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}\lambda_1 & + & \cdots & + & a_{nm}\lambda_m \end{array} \right.$$

Unas ecuaciones de este tipo, conde los escalares λ_i son parámetros indeterminados, se llaman unas **ecuaciones paramétricas** de L.

En otras palabras, unas ecuaciones paramétricas nos dicen cómo son las coordenadas de un vector cualquiera de L, dependiendo de los coeficientes que tomemos en la combinación lineal de los generadores.

Ejemplo 4.8.1. Un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen (es decir, una variedad lineal de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2), puede venir dado por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ x_2 = \lambda_1 + 5\lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{array} \right.$$

En este caso se trata del plano generado por los vectores $(2, 1, 1)$ y $(-3, 5, -1)$.

Las ecuaciones paramétricas, en el fondo, equivalen a definir una variedad lineal dando un sistema de generadores. Pero existe otra forma, más interesante, de determinar una variedad lineal: mediante unas *ecuaciones implícitas*. El resultado que necesitamos es el siguiente:

Teorema 4.8.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sea B una base de V. Consideremos un sistema lineal homogéneo:*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array} \right.$$

Sea L el conjunto de vectores cuyas coordenadas (respecto de B) son una solución de este sistema lineal. Entonces L es una variedad lineal.

PRUEBA: Si dos vectores $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{v}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ pertenecen a L, entonces satisfacen cada ecuación del sistema, es decir, $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ y además $a_{i1}x'_1 + \cdots + a_{in}x'_n = 0$. Pero entonces,

$$(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{i1}x'_1 + \cdots + a_{in}x'_n) = a_{i1}(x_1 + x'_1) + \cdots a_{in}(x_n + x'_n) = 0,$$

por tanto, el vector $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$ es solución del sistema, luego pertenece a L.

Por otra parte, dado cualquier $\alpha \in K$, se tiene

$$\alpha(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = a_{i1}(\alpha x_1) + \cdots + a_{in}(\alpha x_n) = 0,$$

luego $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in L$. Por tanto, L es una variedad lineal. $\square$

Ecuaciones implícitas de una variedad lineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sea B una base de V. Unas **ecuaciones implícitas** de una variedad lineal L es un sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array} \right.$$

tal que los vectores de L sean exactamente aquellos cuyas coordenadas (respecto a B) son una solución del sistema.

Nota 4.8.1. El teorema 4.9.3 prueba que toda variedad lineal L de un espacio vectorial V, fijada una bae del espacio, tiene unas ecuaciones implícitas.

En otras palabras, si unas ecuaciones paramétricas nos dicen *cómo son* las coordenadas de los vectores de L, unas ecuaciones implícitas nos dicen *qué relaciones deben verificar* entre ellas. Podríamos decir que en unas ecuaciones implícitas los vectores de L están más escondidos, ya que a simple vista no podríamos determinar ninguno de ellos: hay que resolver el sistema.

Observemos que el teorema anterior nos ha dado una nueva motivación para estudiar variedades lineales, ya que las soluciones de un sistema lineal homogéneo *son* variedades lineales.

4.9. Ecuaciones y dimensión.

Veamos ahora cómo, a partir de unas ecuaciones paramétricas o implícitas de una variedad lineal, podemos calcular la dimensión de la variedad.

Proposición 4.9.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n, sean*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1m}\lambda_m \\ x_2 & = & a_{21}\lambda_1 + \cdots + a_{2m}\lambda_m \\ \vdots & & \qquad\vdots \\ x_n & = & a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nm}\lambda_m \end{array}\right.$$

unas ecuaciones paramétricas de una variedad lineal L, y sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

la matriz de los coeficientes. Entonces

$$\dim L = \mathrm{rg}(A).$$

PRUEBA: Esto es una consecuencia inmediata de los teoremas que conocemos sobre la base de una variedad lineal, sabiendo que las columnas de A son generadores de L. □

Proposición 4.9.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sean*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

unas ecuaciones implícitas de una variedad lineal L, y sea A la matriz de coeficientes del sistema homogéneo. Entonces:

$$\dim L = n - \mathrm{rg}(A).$$

PRUEBA: Recordemos cómo se usa el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema lineal. Si la matriz A tiene rango r, obtendremos r variables pivote. Por simplificar, diremos que las variables pivote son $x_1, \ldots, x_r$, aunque la demostración funciona igual si son otras. Despejando las variables pivote respecto a las demás, se obtiene que la solución general del sistema es de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{1r+1}x_{r+1} + c_{1r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{1n}x_n, \\ x_2 &= c_{2r+1}x_{r+1} + c_{2r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x_r &= c_{rr+1}x_{r+1} + c_{rr+2}x_{r+2} + \cdots + c_{rn}x_n, \end{aligned}$$

donde las variables no pivote $x_{r+1}, \ldots, x_n$ pueden tomar cualquier valor. Pero si le damos a las variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$ los valores (indeterminados) $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$, se obtiene que la solución general del sistema (es decir, la variedad L) viene dada por:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & c_{1r+1}\lambda_1 & + & c_{1r+2}\lambda_2 & + & \cdots & + & c_{1n}\lambda_{n-r} \\ x_2 & = & c_{2r+1}\lambda_1 & + & c_{2r+2}\lambda_2 & + & \cdots & + & c_{2n}\lambda_{n-r} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ x_r & = & c_{rr+1}\lambda_1 & + & c_{rr+2}\lambda_2 & + & \cdots & + & c_{rn}\lambda_{n-r} \\ x_{r+1} & = & \lambda_1 & & & & & & \\ x_{r+2} & = & & & \lambda_2 & & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ x_n & = & & & & & & & \lambda_{n-r}. \end{array} \right.$$

Pero estas resultan ser unas ecuaciones paramétricas de la variedad L, donde la matriz de coeficientes tiene rango $n-r$, ya que tiene $n-r$ columnas, y sus $n-r$ últimas filas son claramente libres. Luego, por el resultado anterior, se sigue que $\dim L = n - r$. Es decir, $\dim L = n - \mathrm{rg}(A)$. $\square$

En muchas ocasiones es importante saber, dada una variedad lineal L, transformar unas ecuaciones implícitas en unas ecuaciones paramétricas, y viceversa. El primer caso es sencillo:

Observación: Si tenemos unas ecuaciones implícitas de una variedad lineal L, es decir, un sistema homogéneo que determina los elementos de L, la forma de calcular unas ecuaciones paramétricas es simplemente **resolviendo el sistema**, como hemos visto en el resultado anterior.

Observemos además que la solución obtenida despejando las variables pivote nos da una **base** de L, formada por los vectores que son coeficientes de los parámetros λ_1, λ_2, etc.

Si por el contrario tenemos unas ecuaciones paramétricas de L, es decir, un sistema de generadores, veremos dos métodos para calcular unas ecuaciones implícitas de la variedad: uno se basa en el método del orlado y otro utiliza transformaciones elementales por filas.

Método I: usando el método del orlado.

Suponemos fijada una base B del espacio vectorial V. Sea L la variedad lineal generada por un sistema S, procedemos de la siguiente manera.

1. Se considera la matriz $A_{S,B}$, cuyas columnas son las coordenadas de los elementos de S respecto de la base B.

2. Mediante el método del orlado, se identifican el máximo número posible de columnas independientes, con lo que se obtiene una base B_1 de la variedad L. Digamos que B_1 tiene r elementos, es decir, $\dim(L) = r$.

3. Se considera la matriz $A_{B_1,B} \in \mathcal{M}_{n\times r}$, cuyas columnas son una base de L, y la matriz M que resulta al añadir a esta matriz una columna de incógnitas $(x_1, \dots, x_n)$,
$$M = \left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ A_{B_1,B} & \vdots \\ & x_n \end{array}\right).$$

4. Un vector $(x_1, \dots, x_n)$ estará en L si y sólo si es combinación lineal de las columnas de $A_{B_1,B}$. Es decir, si y sólo si la matriz M tiene rango r. Imponemos entonces que la matriz M tenga rango r. Usando el método del orlado (orlando un menor no nulo de tamaño r en las r primeras filas de M), esto significa imponer que $n-r$ determinantes sean nulos. Estos $n-r$ determinantes son $n-r$ ecuaciones implícitas que definen L.

Ejemplo 4.9.1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, siempre respecto de la base canónica B, sea L la variedad lineal generada por el sistema $S = \{(1,1,2,-1),(2,0,1,1),(1,-1,-1,2)\}$. Aplicando el método del orlado averiguamos que el $\operatorname{rango}(S) = 2$ y que, de hecho, el tercer vector es combinación lineal de los otros dos:
$$A_{S,B} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Luego $B_1 = \{(1,1,2,-1),(2,0,1,1)\}$ es una base de L. Entonces un vector (x_1,x_2,x_3,x_4) está en L si y sólo si
$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 2 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \equiv x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \equiv x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Luego unas ecuaciones implícitas de L son:
$$L\colon \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Método II: usando transformaciones elementales por filas.

Suponemos fijada una base B del espacio vectorial V. Sea L la variedad lineal generada por un sistema S, procedemos de la siguiente manera.

1. Se considera la matriz $A_{S,B}$, cuyas columnas son las coordenadas de los elementos de S respecto de la base B. Sea M la matriz que resulta al añadir a esta matriz una columna de incógnitas $(x_1, \ldots, x_n)$,

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A_{S,B} & \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \end{array} \right).$$

2. Un vector $(x_1, \ldots, x_n)$ estará en L si y sólo si es combinación lineal de las columnas de $A_{S,B}$. Es decir, si y sólo si en cualquier forma escalonada por filas de la matriz M la última columna no contiene un pivote. Una escalonada por filas de M es de la forma $(E|\mathbf{c})$, donde E es una forma escalonada por filas de $A_{S,B}$. Supongamos que $\operatorname{rango}(A_{S,B}) = r$, es decir que E tiene r pivotes, entonces la escalonada por filas de M debe ser de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} E & \begin{array}{c} eq_1 \\ \vdots \\ eq_r \\ a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n-r,1}x_1 + \cdots a_{n-r,n}x_n \end{array} \end{array} \right),$$

donde $eq_1, \ldots, eq_r$ son expresiones lineales en $x_1, \ldots, x_n$.

3. Imponiendo que la última columna no tenga pivote, tenemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-r,1}x_1 + \cdots a_{n-r,n}x_n = 0 \end{array} \right.,$$

que son unas ecuaciones implícitas de L.

Ejemplo 4.9.2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, siempre respecto de la base canónica B, sea L la variedad lineal generada por el sistema $S = \{(1,1,2,-1),(2,0,1,1),(1,-1,-1,2)\}$. Mediante transformaciones lineales por filas obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & -1 & x_2 \\ 2 & 1 & -1 & x_3 \\ -1 & 1 & 2 & x_4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -2 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -(1/2)x_1 - (3/2)x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -(1/2)x_1 + (3/2)x_2 + x_4 \end{array} \right).$$

Luego unas ecuaciones implícitas de L son

$$L\colon \left\{ \begin{array}{l} -(1/2)x_1 - (3/2)x_2 + x_3 = 0 \\ -(1/2)x_1 + (3/2)x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right..$$

Estos procesos nos sirven además para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 4.9.3. *Toda variedad lineal, L, de un espacio vectorial de dimensión finita, puede ser representada por unas ecuaciones paramétricas, y por unas ecuaciones implícitas.*

PRUEBA: Toda variedad lineal en un espacio de dimensión finita tiene un sistema finito de generadores, luego admite unas ecuaciones paramétricas. El método anterior nos explica cómo conseguir unas ecuaciones implícitas a partir de éstas, luego L admite también unas ecuaciones implícitas. $\square$

4.10. Intersección y suma de variedades.

Ya hemos visto cómo se puede determinar una variedad lineal usando ecuaciones paramétricas o implícitas, y cómo calcular su dimensión. Continuaremos con algunas propiedades sencillas de las variedades lineales:

Proposición 4.10.1. *Si L_1 y L_2 son dos variedades lineales de un espacio vectorial V, entonces $L_1 \cap L_2$ es una variedad lineal.*

PRUEBA: Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L_1 \cap L_2$. Como pertenecen a L_1, entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in L_1$, al ser L_1 variedad lineal. Pero como también pertenecen a L_2, entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in L_2$. Por tanto, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in L_1 \cap L_2$.

Análogamente se demuestra que si $\alpha \in K$ y $\mathbf{v} \in L_1 \cap L_2$, entonces $\alpha\mathbf{v} \in L_1 \cap L_2$. Por tanto, $L_1 \cap L_2$ satisface las dos propiedades necesarias y suficientes para ser una variedad lineal. $\square$

Proposición 4.10.2. *Sean S y T dos sistemas de vectores de un espacio vectorial V. Se tiene:*

1. $S \subset \langle S \rangle$.
2. $S = \langle S \rangle \Leftrightarrow S$ *es una variedad lineal.*
3. $S \subset T \Rightarrow \langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.
4. $\langle S \cap T \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle T \rangle$.
5. $\langle S \rangle \cup \langle T \rangle \subset \langle S \cup T \rangle$.

PRUEBA:

1. Trivial.
2. Evidente a partir de las definiciones, ya que $\langle S \rangle$ es una variedad lineal.
3. Si $\mathbf{v} \in \langle S \rangle$, entonces es combinación lineal de los vectores de S. Pero como $S \subset T$, $\mathbf{v}$ es combinación lineal de los vectores de T, es decir, $\mathbf{v} \in \langle T \rangle$.
4. Si un vector es combinación lineal de los vectores de $S \cap T$, entonces es combinación lineal de los vectores de S, y también es combinación lineal de los vectores de T, es decir, pertenece a $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle$.

5. Como $S \subset S \cup T$, se tiene $\langle S \rangle \subset \langle S \cup T \rangle$. Del mismo modo $\langle T \rangle \subset \langle S \cup T \rangle$. Por tanto, $\langle S \rangle \cup \langle T \rangle \subset \langle S \cup T \rangle$.

$\square$

Observación: Si conocemos L_1 y L_2, y queremos conocer $L_1 \cap L_2$, sólo tenemos que tomar unas ecuaciones implícitas de L_1 y unas ecuaciones implícitas de L_2. El conjunto formado por **todas las ecuaciones** formará unas ecuaciones implícitas de $L_1 \cap L_2$. En efecto, un vector está en $L_1 \cap L_2$, es decir, está en L_1 y en L_2, si y sólo si satisface las ecuaciones que definen L_1 y además las que definen L_2.

Ejemplo 4.10.1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ la intersección de las variedades

$$L_1 \colon \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 \colon x_1 + x_4 = 0$$

es

$$L_1 \cap L_2 \colon \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

Una vez que hemos visto que la intersección de variedades lineales es una variedad lineal, y hemos estudiado algunas de sus propiedades, podríamos intentar hacer lo mismo con la unión de variedades lineales. Pero hay que tener cuidado:

Nota 4.10.1. Aunque la intersección de dos variedades lineales es una variedad lineal, la **unión** de dos variedades lineales **no es una variedad lineal**, en general. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, la unión de dos rectas que pasan por el origen no tiene por qué ser una recta, y por supuesto no es un punto, ni un plano, ni todo el espacio.

De todas formas, aunque $L_1 \cup L_2$ no sea una variedad lineal, si lo que necesitamos es una variedad que contenga a L_1 y a L_2, nos basta tomar $\langle L_1 \cup L_2 \rangle$. Tenemos entonces la siguiente definición:

Suma de variedades lineales

Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V. Se llama **suma** de L_1 y L_2 a la variedad lineal:

$$L_1 + L_2 = \langle L_1 \cup L_2 \rangle.$$

Observación: Por definición, si conocemos L_1 y L_2 y queremos hallar $L_1 + L_2$, sólo tenemos que tomar un sistema de generadores S_1 de L_1 y un sistema de generadores S_2 de L_2. La unión de estos dos conjuntos, $S_1 \cup S_2$, será un sistema de generadores de $L_1 + L_2$.

Ejemplo 4.10.2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ la suma de las variedades $L_1 = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$ y $L_2 = \langle (1, 0, 0, 1) \rangle$ es la variedad

$$L_1 + L_2 = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle.$$

4.11. Propiedades de la suma de variedades. Fórmula de la dimensión.

Dadas dos variedades L_1 y L_2 en un espacio vectorial de dimensión finita V, hemos definido la variedad suma $L_1 + L_2$. La causa de que esta variedad lineal se llame *suma*, se encuentra en el siguiente resultado:

Proposición 4.11.1. *Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V. se tiene:*

$$L_1 + L_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \quad \mathbf{v}_1 \in L_1,\ \mathbf{v}_2 \in L_2\}.$$

PRUEBA: Si $\mathbf{v} \in L_1 + L_2$, entonces es combinación lineal de los vectores de $L_1 \cup L_2$. Separemos esta combinación lineal en dos sumandos $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, donde en $\mathbf{v}_1$ están todos los términos en que aparece un vector de L_1, y $\mathbf{v}_2$ contiene el resto de los términos, que necesariamente consta de vectores de L_2. Entonces $\mathbf{v}_1 \in \langle L_1 \rangle = L_1$, y $\mathbf{v}_2 \in \langle L_2 \rangle = L_2$.

La otra inclusión es trivial. $\square$

Veamos ahora que la suma de dos variedades, $L_1 + L_2$, es en realidad la variedad más pequeña que hubiéramos podido escoger, conteniendo a $L_1 \cup L_2$.

Proposición 4.11.2. *Dado un sistema de vectores S de un espacio vectorial V, la variedad lineal $\langle S \rangle$ es la menor variedad lineal que contiene a S. Es decir, si L es una variedad lineal que contiene a S, entonces $\langle S \rangle \subseteq L$.*

PRUEBA: Si una variedad L contiene a S, es decir, si $S \subset L$, entonces $\langle S \rangle \subset \langle L \rangle = L$. $\square$

Corolario 4.11.3. *$L_1 + L_2$ es la menor variedad lineal que contiene a L_1 y a L_2.*

Pero no tenemos por qué restringirnos a sumar sólo dos variedades. Podemos sumar tantas como queramos, siempre que sea un número finito.

Grupo

Sea V un espacio vectorial, y sean $L_1, \ldots, L_m$ variedades lineales de V. Se define la suma de todas estas variedades como la variedad lineal

$$\sum_{i=1}^{m} L_i = L_1 + L_2 + \cdots + L_m = \langle L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_m \rangle.$$

De forma análoga a la proposición anterior, se demuestra lo siguiente:

Proposición 4.11.4. *Si $L_1, \ldots, L_m$ son variedades lineales de un espacio vectorial V, entonces*

$$L_1 + \cdots + L_m = \{\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_m; \quad \mathbf{v}_i \in L_i,\ \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Finalizamos esta sección con uno de los teoremas más importantes del álgebra lineal, que relaciona las dimensiones de dos variedades cualesquiera, su suma y su intersección. Este teorema es muy útil para calcular dimensiones de variedades lineales.

Teorema 4.11.5 (Fórmula de la dimensión). *Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V de dimensión finita. Se tiene:*

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2).$$

PRUEBA: Sea $B_0 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ una base de $L_1 \cap L_2$. Por el teorema de la base incompleta, podemos ampliar B_0 hasta una base de L_1, y también la podemos ampliar hasta una base de L_2. Es decir, existen dos sistemas de vectores, $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ y $S_2 = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t\}$ tales que $B_1 = B_0 \cup S_1$ es una base de L_1, y $B_2 = B_0 \cup S_2$ es una base de L_2.

Sea $B = B_0 \cup S_1 \cup S_2$. Vamos a demostrar que B es base de $L_1 + L_2$, y con eso habremos probado el teorema, ya que $\dim L_1 = r+s$, $\dim L_2 = r+t$, $\dim(L_1 \cap L_2) = r$, y en este caso $\dim(L_1 + L_2) = r + s + t$.

B es sistema de generadores de $L_1 + L_2$, ya que $B = B_1 \cup B_2$. Por tanto, sólo tenemos que ver que es linealmente independiente. Consideremos una combinación lineal:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_1 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^{t} \gamma_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}.$$

Hay que demostrar que todos los coeficientes deben ser nulos. Sea

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_1 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{v}_j = -\sum_{k=1}^{t} \gamma_k \mathbf{w}_k.$$

De la primera forma de escribir $\mathbf{v}$ se obtiene que $\mathbf{v} \in L_1$, y de la segunda, que $\mathbf{v} \in L_2$. Por tanto, $\mathbf{v} \in L_1 \cap L_2$, y así $\mathbf{v}$ se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de B_0. Como también se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de B_1 (la fórmula anterior), y $B_0 \subset B_1$, estas dos formas de escribirlo deben ser la misma. Por tanto, $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$.

Después de esto, nos queda

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^{t} \gamma_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0},$$

pero esta es una combinación lineal de los vectores de B_2, que es una base, luego todos los coeficientes son nulos. □

4.12. Suma directa. Propiedades.

como vimos en la sección precedente, las variedades lineales se pueden intersecar o sumar. En esta sección veremos que, si $L = L_1 + L_2$, hay ocasiones en que las propiedades de la variedad L se pueden estudiar fácilmente a partir de las propiedades de L_1 y L_2. Para ver cómo esto es posible, definiremos la *suma directa* de variedades:

Suma directa

Diremos que dos variedades lineales L_1, L_2 son **independientes**, o que su suma $L_1 + L_2$ es **suma directa**, que escribiremos $L_1 \oplus L_2$, si

$$L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Ejemplo 4.12.1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideramos las variedades lineales $L_1 = \langle (1,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$ y $L_2 = \langle (0,1,0,1),(0,0,1,1)\rangle$. Obsérvese que $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^4$ y $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$. Es decir,

$$L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^4.$$

La suma directa recuerda mucho al concepto de base. En particular, por el siguiente resultado:

Proposición 4.12.1. *Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V. La suma $L_1 + L_2$ es directa si y sólo si cualquier vector $\mathbf{v} \in L_1 + L_2$ se puede escribir, de una única forma, como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1 \in L_1$ y $\mathbf{v}_2 \in L_2$.*

PRUEBA: Supongamos que $L_1 \oplus L_2$. Si un vector $\mathbf{v}$ se pudiera escribir de dos maneras distintas, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$, donde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1 \in L_1$ y $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2 \in L_2$, entonces $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}'_1$ (si no, tendríamos también $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2$, y la descomposición sería la misma). Consideremos $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1 \neq \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{u} \in L_1$, pero además

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + (\mathbf{u} + \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2 \in L_2.$$

Por tanto, $\mathbf{u} \in L_1 \cap L_2$, lo que contradice que la suma de L_1 y L_2 sea directa.

Supongamos ahora que cualquier vector se puede escribir de forma única como suma de vectores de L_1 y L_2. Si existiera un vector $\mathbf{v} \in L_1 \cap L_2$, entonces podríamos escribir $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$, que serían dos descomposiciones distintas. Esto es imposible, por tanto $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$, y la suma de estas dos variedades es directa. □

Corolario 4.12.2. *Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V. La suma $L_1 + L_2$ es directa si y sólo si, si se tiene $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, con $\mathbf{v}_1 \in L_1$ y $\mathbf{v}_2 \in L_2$, entonces $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.*

PRUEBA: Si $L_1 \oplus L_2$, entonces $\mathbf{0}$ se puede escribir de una única forma como suma de vectores de L_1 y L_2. Por tanto, si $\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, sólo hay una posiblidad: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Por otra parte, supongamos que el vector $\mathbf{0}$ sólo se puede escribir $\mathbf{0} + \mathbf{0}$ como suma de vectores de L_1 y L_2. Si la suma de L_1 y L_2 no fuera directa, existiría un vector $\mathbf{v} \in L_1 + L_2$ que se podría escribir de dos formas distintas como suma de vectores de L_1 y L_2, digamos $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$. Pero entonces

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) - (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2),$$

donde $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1 \in L_1$ y $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2 \in L_2$, por tanto $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2 = \mathbf{0}$, es decir, la descomposición es la misma. Por tanto, se tiene $L_1 \oplus L_2$. □

Estas dos caracterizaciones nos permiten extender la definición de suma directa a más de dos variedades lineales.

Suma directa de más de dos variedades lineales

Dadas m variedades lineales $L_1, \ldots, L_m$ de un espacio vectorial V, se dice que son **independientes**, o que su suma $L_1 + \cdots + L_m$ es **suma directa**, que escribiremos $L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m$, si cualquier vector $\mathbf{v}$ de dicha suma se puede escribir, de una única forma, como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_m,$$

donde $\mathbf{v}_i \in L_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

También se tiene la caracterización análoga al caso de dos variedades lineales, con la misma demostración:

Proposición 4.12.3. *Sean $L_1, \dots, L_m$ variedades lineales de un espacio vectorial V. Su suma es directa si y sólo si, si se tiene $\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_m$, con $\mathbf{v}_i \in L_i$ para todo i, entonces $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \cdots = \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$.*

Estos conceptos de suma y de suma directa de variedades lineales se ven más claramente cuando todas las variedades son de dimensión 1. En ese caso, se tiene:

Proposición 4.12.4. *Sea V un espacio vectorial y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sistema finito de vectores de V. Se tiene:*

1. $\langle S \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}_m \rangle$.
2. *S es linealmente independiente si y sólo si* $\langle S \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v}_m \rangle$.

Ejercicio 4.12.1. Demostrar la proposición anterior.

Un caso especial, e importante, de suma directa de dos subespacios es el siguiente:

Variedades suplementarias

Dado un espacio vectorial V, dos variedades lineales L_1 y L_2 de V se dicen **suplementarias** si $L_1 \oplus L_2 = V$.

Ejemplo 4.12.2. Las variedades del ejemplo 4.12.1 son suplementarias.

De la misma forma que hemos probado los resultados anteriores, se tiene:

Proposición 4.12.5. *Sea V un espacio vectorial, y sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de V. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *L_1 y L_2 son suplementarios.*
2. $L_1 + L_2 = V$, *y* $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.
3. *Todo vector de $\mathbf{v} \in V$ se descompone de forma única como una suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1 \in L_1$ y $\mathbf{v}_2 \in L_2$.*

La importancia de los espacios suplementarios procede de la facilidad para manejar sus bases y dimensiones:

Proposición 4.12.6. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean L_1 y L_2 dos espacios suplementarios, con bases respectivas B_1 y B_2. Se tiene:*

1. *$B_1 \cup B_2$ es base de V.*
2. $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim V$.

PRUEBA: Como $L_1 \oplus L_2 = V$, entonces todo vector de V puede escribirse de una única forma como suma de un vector de L_1 y otro de L_2. Pero como B_1 es base de L_1 y B_2 es base de L_2, estos dos vectores se escriben de forma única como combinación lineal de los vectores de B_1 y B_2. Es decir, cualquier vector de V se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de $B_1 \cup B_2$, luego este conjunto es una base de V. □

Ejercicio 4.12.2. Dejamos como ejercicio demostrar la segunda propiedad.

El recíproco del resultado anterior también es cierto:

Proposición 4.12.7. *Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{s+1}, \ldots, \mathbf{u}_t\}$ una base de un espacio vectorial V. Sean $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s\}$ y $B_2 = \{\mathbf{u}_{s+1}, \ldots, \mathbf{u}_t\}$. Entonces $\langle B_1 \rangle$ y $\langle B_2 \rangle$ son dos variedades suplementarias de V.*

Y por último, este resultado es una reescritura de un resultado anterior:

Proposición 4.12.8. *Sea V un espacio vectorial de tipo finito. Toda variedad lineal de V tiene alguna variedad suplementaria.*

Ejercicio 4.12.3. Demostrar las dos proposiciones anteriores.

Hemos visto, por tanto, cómo una variedad lineal L (es decir, un espacio vectorial) se puede descomponer en dos o más subespacios, $L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$ de forma óptima: La dimensión de L es la suma de las dimensiones de cada L_i, y si conocemos una base de cada L_i, su unión es una base de L. Ahora veamos la operación contraria: dados dos o más espacios vectoriales sobre K, de tipo finito, $V_1, \ldots, V_m$, aunque no tengan nada que ver, podremos construir un espacio vectorial más grande, V, tal que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$.

4.13. Espacio producto. Espacio cociente.

Producto de espacios vectoriales

Dados dos espacios vectoriales de dimensión finita, V_1 y V_2 sobre un mismo cuerpo K, se define el **espacio producto** de V_1 y V_2 como el conjunto

$$V_1 \times V_2 = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\,; \quad \mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2\},$$

donde se definen las siguientes operaciones internas:

- **Suma:** $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$.
- **Producto por escalar:** $\alpha(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\alpha\mathbf{v}_1, \alpha\mathbf{v}_2)$.

Proposición 4.13.1. *Dados dos espacios vectoriales de tipo finito, V_1 y V_2, sobre un mismo cuerpo K, el espacio producto $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial. Además, $\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.*

PRUEBA: Se prueba que $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial directamente a partir de la definición. Para probar que su dimensión es la suma de las de V_1 y V_2, tomemos una base $B_1 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ de V_1, y una base $B_2 = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ de V_2. Se prueba de forma directa que el sistema de vectores

$$B = ((\mathbf{u}_1, 0), \ldots, (\mathbf{u}_m, 0), (0, \mathbf{v}_1), \ldots, (0, \mathbf{v}_n))$$

es base de $V_1 \times V_2$. Por tanto, $\dim(V_1 \times V_2) = m + n = \dim(V_1) + \dim(V_2)$. $\square$

Terminaremos esta sección, y este tema, estudiando una noción que es básica en muchas ramas de las matemáticas, en particular en el álgebra lineal: el *espacio cociente*.

Fijaremos a partir de ahora un espacio vectorial V, y una variedad lineal $L \subset V$. Básicamente, se puede pensar en el espacio cociente de V sobre L como si fuera el espacio V, pero donde los vectores de L no tienen ningún valor: es decir, cualquier vector de L representa el vector $\mathbf{0}$ del espacio cociente; y si sumamos a cualquier vector del cociente un vector de L, éste se queda igual. Vamos a definirlo de forma rigurosa:

L-equivalencia

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de V se dicen **L-equivalentes** si su diferencia pertenece a L. Escribiremos:

$$\mathbf{u} \sim_L \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} \in L.$$

Proposición 4.13.2. *La L-equivalencia es una relación de equivalencia.*

Ejercicio 4.13.1. Hay que demostrar las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva. Lo dejamos como ejercicio.

Cuando se define, en cualquier conjunto, una relación de equivalencia, se pueden considerar los subconjuntos de elementos que están relacionados entre sí. Estos subconjuntos se llaman *clases de equivalencia*. En este caso, las clases de equivalencia se llaman *variedades lineales afines*.

Variedad lineal afín

Sea L una variedad lineal de un espacio vectorial V, y sea $\mathbf{v}$ un vector de V. Llamaremos **variedad lineal afín** que pasa por $\mathbf{v}$ con dirección L, y la notaremos $\mathbf{v} + L$, a la *clase de L-equivalencia* de $\mathbf{v}$, es decir, al conjunto formado por todos los vectores de V que son L-equivalentes a $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} + L = \{\mathbf{u} \in V \; ; \quad \mathbf{u} \sim_L \mathbf{v}\} = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \; ; \quad \mathbf{w} \in L\}.$$

Ejemplo 4.13.1. Si $V = \mathbb{R}^3$ y L es un plano que pasa por el origen de coordenadas, dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son L-equivalentes si su vector diferencia pertenece a L, es decir, si el segmento que une los puntos finales de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es paralelo al plano L. Por tanto, la variedad lineal afín que pasa por un vector $\mathbf{v}$ con dirección L, está formada por todos los vectores cuyos puntos finales forman un plano: el que contiene al punto final de $\mathbf{v}$ y es paralelo a L. Así, las variedades lineales con dirección L son, en cierto modo, todos los planos paralelos a L.

Ejemplo 4.13.2. Al igual que en el ejemplo anterior, si $V = \mathbb{R}^3$ y L es una recta que pasa por el origen, entonces las variedades lineales afines con dirección L vienen determinadas por las rectas paralelas a L, es decir las que tienen la misma dirección que la recta L.

Una propiedad evidente de las variedades lineales afines es la siguiente:

Proposición 4.13.3. *Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, se tiene:*

$$\mathbf{u} + L = \mathbf{v} + L \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \sim_L \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} \in L.$$

Nota 4.13.1. Aunque L sea una variedad lineal, las variedades lineales afines correspondientes **no son variedades lineales**, en general. Esto se puede ver en los dos ejemplos anteriores (los planos o rectas que no pasan por el origen no determinan variedades lineales), o bien por el siguiente razonamiento: Si $\mathbf{u} \in \mathbf{v} + L$, entonces $2\mathbf{u} \in \mathbf{v} + L$ si y sólo si $\mathbf{u} \in L$. Pero en ese caso, $\mathbf{v} \sim_L \mathbf{u} \sim_L \mathbf{0}$, luego $\mathbf{v} + L = \mathbf{0} + L$. Por tanto, la única variedad lineal afín con dirección L que es una variedad lineal es $\mathbf{0} + L$, es decir, la misma L.

De todas formas, aunque las variedades lineales afines no sean variedades lineales, sí van a ser los elementos de un nuevo espacio vectorial, llamado *espacio cociente*.

Espacio cociente

Sea L una variedad lineal de un espacio vectorial V. Llamaremos **espacio cociente** de V sobre L, y lo denotaremos V/L, al conjunto formado por las variedades lineales afines con dirección L, donde definimos las siguientes operaciones:

- **Suma:** $(\mathbf{u} + L) + (\mathbf{v} + L) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + L$.
- **Producto por escalar:** $\alpha(\mathbf{u} + L) = (\alpha\mathbf{u}) + L$.

Proposición 4.13.4. *La suma y el producto que acabamos de dar, están bien definidos.*

PRUEBA: Necesitamos este resultado ya que, si queremos sumar variedades lineales afines, la suma no puede depender del representante (el vector) que tomemos. Es decir, debemos demostrar que, si $\mathbf{u} + L = \mathbf{u}' + L$ y además $\mathbf{v} + L = \mathbf{v}' + L$, entonces las clases de equivalencia $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + L$ y $(\mathbf{u}'+\mathbf{v}') + L$ son iguales. Pero sabemos que $\mathbf{u} \sim_L \mathbf{u}'$, luego $\mathbf{u}-\mathbf{u}' \in L$. Análogamente $\mathbf{v}-\mathbf{v}' \in L$. Por tanto, $(\mathbf{u}-\mathbf{u}')+(\mathbf{v}-\mathbf{v}') = (\mathbf{u}+\mathbf{v})-(\mathbf{u}'+\mathbf{v}') \in L$. Es decir, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \sim_L (\mathbf{u}' + \mathbf{v}')$, luego $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + L = (\mathbf{u}' + \mathbf{v}') + L$ como queríamos demostrar.

Por otro lado, si $\mathbf{u} + L = \mathbf{u}' + L$ y $\alpha \in K$, entonces $(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \in L$, luego $\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = \alpha\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}' \in L$. Por tanto $(\alpha\mathbf{u}) + L = (\alpha\mathbf{u}') + L$, y se obtiene el resultado. □

Teorema 4.13.5. *Sea L una variedad lineal de un espacio vectorial V sobre K. El espacio cociente V/L, con las dos operaciones que acabamos de definir, es un espacio vectorial sobre K. Además, si V es de dimensión finita, se tiene:*

$$\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L).$$

PRUEBA: La demostración de que V/L es un espacio vectorial, es directa. Observemos que el elemento neutro de la suma de clases es la clase $\mathbf{0} + L$. Para probar la fórmula que relaciona sus dimensiones, tomemos una base $B_1 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$ de L. Esta base se podrá ampliar a una base $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ de V. Vamos a probar que $B_2 = (\mathbf{u}_{r+1} + L, \ldots, \mathbf{u}_n + L)$ es una base de V/L, y esto demostrará el resultado.

Probemos primero que B_2 es sistema de generadores. Sea $\mathbf{v} + L$ una clase de equivalencia cualquiera. Como $\mathbf{v} \in V$, podremos escribirlo como combinación lineal de los elementos de B. Es decir, $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$. Sea $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{u}_r$. Claramente $\mathbf{u} \in L$, luego $\mathbf{u}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \sim_L \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}' = \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$. Pero en ese caso $\mathbf{v} + L = \mathbf{u}' + L = \alpha_{r+1}(\mathbf{u}_{r+1} + L) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{u}_n + L)$. Es decir, cualquier clase de equivalencia, $\mathbf{v} + L$, puede escribirse como combinación lineal de los elementos de B_2.

La demostración estará completa si probamos que B_2 es un sistema libre. Supongamos que tenemos una combinación lineal

$$\alpha_{r+1}(\mathbf{u}_{r+1} + L) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{u}_n + L) = \mathbf{0} + L.$$

Esto implica que

$$(\alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) + L = \mathbf{0} + L,$$

es decir, $(\alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) \in L$. Pero la variedad lineal generada por los vectores $(\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ es suplementaria a L (ya que B es una base), luego la única posiblidad es que $(\alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$, por lo que $\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Esto nos dice que los elementos de B_2 son linealmente independientes. □

Ejemplo 4.13.3. Si L es un plano de $V = \mathbb{R}^3$, que pasa por el origen, los elementos del espacio cociente son los planos paralelos a L. La suma de dos planos Π_1 y Π_2, da como resultado otro plano Π_3: si se toma un vector $\mathbf{u}_1$ cuyo punto final esté en Π_1, y un vector $\mathbf{u}_2$ cuyo punto final esté en Π_2, el punto final del vector $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ estará en Π_3. Del mismo modo, el producto de α por Π_1 es el plano que contiene al punto final del vector $\alpha\mathbf{u}_1$.

Base de V/L y coordenadas

Sea V un espacio vectorial sobre K en el que hemos fijado una base respecto de la que tomamos coordenadas. Para obtener una base del espacio cociente se procede como en la prueba del teorema 4.13.5. Si tenemos una base de L, pongamos $B_1 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$, completamos esta base siguiendo la prueba del teorema 4.5.2. Pongamos que $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ es una base de V. Entonces

$$B_2 = (\mathbf{u}_{r+1} + L, \ldots, \mathbf{u}_n + L)$$

es una base de V/L.
Sea $\mathbf{v} \in V$ un vector cualquiera. Para dar las coordenadas de $\mathbf{v} + L$ respecto de B_2 prcedemos de la siguiente manera:

1) Primero escribimos $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base B, pongamos

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{u}_r + \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n.$$

2) Entonces

$$(\mathbf{v} + L)_{B_2} = (\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Ejemplo 4.13.4. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sea la variedad lineal L de ecuaciones

$$L\colon \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Hallar una base de V/L y las coordenadas del vector $\mathbf{v} + L$, siendo $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

Una base de L es $B_1 = \{\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0)\}$. Ampliamos a una base de V

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Luego $B = \{\mathbf{u}_1 = (2,1,0), \mathbf{u}_2 = (1,0,0), \mathbf{u}_3 = (0,0,1)\}$ es una base de V. Una base de V/L es

$$B_2 = \{\mathbf{u}_2 + L, \mathbf{u}_3 + L\}.$$

Para hallar las coordenadas de $\mathbf{v} + L$ respecto de B_2 hacemos lo siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Entonces $\mathbf{v}_B = (1,-1,1)$ y

$$(\mathbf{v} + L)_{B_2} = (-1, 1).$$