Capítulo 3

Determinantes

3.1. Definición

En este tema trataremos una de las herramientas más importantes en el estudio del álgebra matricial, en el cálculo del rango o de la inversa de una matriz o la resolución de sistemas de ecuaciones lineales: los ***determinantes***. Para ello comenzaremos por recordar brevemente algunas propiedades de las permutaciones, que el alumno debe conocer.

Denotaremos S_n al conjunto de las permutaciones de un conjunto de n elementos, es decir, al conjunto de las aplicaciones biyectivas

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Dada una permutación $\sigma \in S_n$, una de las características de σ que va a tener más importancia en este tema será su ***número de inversiones***, $ni(\sigma)$, que es el número de pares (i, j) tales que $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$. Hay una forma gráfica muy útil para describir el número de inversiones de σ: Si disponemos dos copias del conjunto $\{1, \dots, n\}$, donde los números están alineados verticalmente como en el ejemplo de la figura 3.1, la permutación σ viene representada por n segmentos, o líneas, que unen el elemento i de la primera copia al elemento $\sigma(i)$ de la segunda. Es claro que $ni(\sigma)$ es simplemente el número de cruces (intersecciones) que aparecen en esta representación. (Nota: se debe evitar que más de dos rectas se corten en el mismo punto, para poder contar los cruces de forma más clara.)

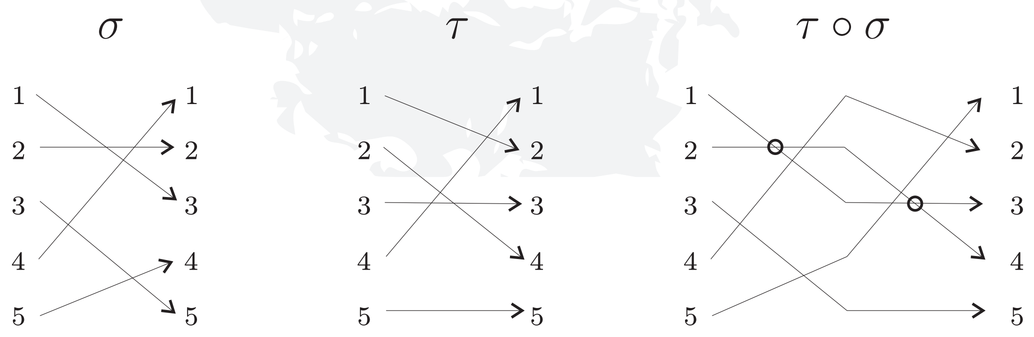

Figura 3.1: Ejemplo de permutaciones $\sigma, \tau \in S_5$ tales que $ni(\sigma) = 5$, $ni(\tau) = 4$ y $ni(\tau \circ \sigma) = 7$.

A partir de $ni(\sigma)$, se obtiene el ***signo*** (o la ***paridad***) de la permutación σ, dado simplemente por la fórmula:

$$sg(\sigma) = (-1)^{ni(\sigma)}.$$

Observemos que $sg(\sigma) = 1$ si $ni(\sigma)$ es un número par, y $sg(\sigma) = -1$ si $ni(\sigma)$ es un número impar. En el primer caso diremos que σ es una ***permutación par***, mienras que en el segundo diremos que σ es una ***permutación impar***.

Proposición 3.1.1. *La composición de dos permutaciones pares, o de dos permutaciones impares, es una permutación par. La composición de una permutación par y una impar, es una permutación impar.*

PRUEBA: Sean $\sigma, \tau \in S_n$ dos permutaciones, que representaremos gráficamente de forma consecutiva, como en la figura 3.1. Observemos que la composición $\tau \circ \sigma$ se obtiene siguiendo las líneas desde la primera copia de $\{1, \ldots, n\}$ a la tercera. Un par (i, j) será una inversión de $\tau \circ \sigma$ si las líneas correspondientes se cruzan una sóla vez (o bien en σ o bien en τ). Por el contrario, (i, j) no será una inversión de $\tau \circ \sigma$ si las líneas correspondientes no se cruzan, o si se cruzan dos veces (los dos cruces marcados en la figura 3.1). Si llamamos m al número de pares (i, j) tales que sus líneas correspondientes se cruzan dos veces, este argumento nos dice que $ni(\tau \circ \sigma) = ni(\sigma) + ni(\tau) - 2m$. De aquí se deduce inmediatamente el resultado sobre la paridad de $\tau \circ \sigma$. $\square$

Corolario 3.1.2. *Dada $\sigma \in S_n$, se tiene $sg(\sigma) = sg(\sigma^{-1})$.*

PRUEBA: Al ser $\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{Id}$ una permutación par (la identidad es la única permutación sin inversiones), el resultado anterior implica que σ y σ^{-1} tienen la misma paridad. $\square$

Más adelante necesitaremos algún otro resultado sobre permutaciones, pero ahora ya podemos dar la definición principal de este tema.

Deteminante de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Se define el ***determinante*** de A, denotado $|A|$ o $\det(A)$, como:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot [A]_{1\sigma(1)}[A]_{2\sigma(2)} \cdots [A]_{n\sigma(n)}.$$

Observemos que $|A|$ es una suma de $n!$ términos, puesto que hay un término por cada permutación de S_n. Cada sumando contiene un producto de la forma $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$. Estos n escalares son n entradas de la matriz A que están en n filas distintas, y también en n columnas distintas. Recíprocamente, si elegimos n entradas de A que estén en filas distintas y en columnas distintas, el producto de esos n escalares aparecerá en uno de los sumandos que definen $|A|$: la permutación correspondiente será la que asocia, a cada fila, la columna donde está la entrada elegida. Por tanto, $|A|$ es la suma de todos estos posibles productos, cada uno de ellos con un signo determinado por la permutación correspondiente.

Ejemplo 3.1.1. Si A es una matriz de orden 2×2, sólo hay dos permutaciones posibles en S_2, la identidad y la que permuta los elementos 1 y 2. La primera es par, y da lugar al sumando $a_{11}a_{22}$. La segunda es impar, y da lugar al sumando $-a_{12}a_{21}$. Por tanto, en el caso $n = 2$, tenemos la conocida fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ejemplo 3.1.2. Si A es una matriz de orden 3×3, y como hay 6 permutaciones en S_3, la fórmula que define $|A|$ consta de 6 sumandos, tres de ellos pares y tres impares. Concretamente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Dos resultados inmediatos son los siguientes. No necesitamos dar la demostración, al ser evidentes a partir de la definición del determinante.

Proposición 3.1.3. *Si una matriz cuadrada A tiene una fila o una columna de ceros, entonces $|A| = 0$.*

Proposición 3.1.4. *Si I es la matriz identidad de orden $n \times n$, entonces $|I| = 1$.*

3.2. Efecto por trasposición y operaciones elementales

Veamos cómo varía el determinante de una matriz A, al aplicar a ésta algunas de las operaciones definidas anteriormente, como pueden ser la trasposición, o las operaciones elementales.

Invariancia por trasposición

Para toda matriz cuadrada A, se tiene: $|A| = |A^t|$.

PRUEBA: Por definición, tenemos

$$\begin{aligned} |A^t| &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot [A]^t_{1\sigma(1)}[A]^t_{2\sigma(2)} \cdots [A]^t_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot [A]_{\sigma(1)1}[A]_{\sigma(2)2} \cdots [A]_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot [A]_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))}[A]_{\sigma(2)\sigma^{-1}(\sigma(2))} \cdots [A]_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))}. \end{aligned}$$

Reordenando los términos en cada producto, para que los primeros índices estén en orden ascendente, se tiene:

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot [A]_{1\sigma^{-1}(1)}[A]_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots [A]_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Finalmente, como $sg(\sigma) = sg(\sigma^{-1})$, nos queda:

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma^{-1}) \cdot [A]_{1\sigma^{-1}(1)}[A]_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots [A]_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Pero toda permutación de S_n tiene una única inversa, luego en el sumatorio anterior, σ^{-1} toma como valor todas las posibles permutaciones, por tanto dicho sumatorio es igual a $|A|$, como queríamos demostrar. $\square$

Veamos ahora el efecto que producen las operaciones elementales por filas en el determinante de una matriz.

Determinante y operaciones elementales de tipo I

Si la matriz cuadrada B se obtiene de A al intercambiar dos filas (o dos columnas), entonces:

$$|B| = -|A|.$$

PRUEBA: Supongamos que B se obtiene de A al intercambiar las filas i y j, con $i < j$. Tendremos:

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [B]_{1\sigma(1)}\cdots [B]_{i\sigma(i)}\cdots [B]_{j\sigma(j)}\cdots [B]_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [A]_{1\sigma(1)}\cdots [A]_{j\sigma(i)}\cdots [A]_{i\sigma(j)}\cdots [A]_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [A]_{1\sigma(1)}\cdots [A]_{i\sigma(j)}\cdots [A]_{j\sigma(i)}\cdots [A]_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Si llamamos τ a la permutación (llamada trasposición) que intercambia los elementos i y j, dejando invariantes los demás, se tiene:

$$|B| = \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [A]_{1\sigma(\tau(1))}\cdots [A]_{i\sigma(\tau(i))}\cdots [A]_{j\sigma(\tau(j))}\cdots [A]_{n\sigma(\tau(n))}.$$

Ahora observemos que una trasposición siempre es impar, como se puede ver en su representación gráfica: hay $j-i-1$ líneas que empiezan entre i y j, y todas ellas se cruzan con las líneas i y j; además tenemos el cruce de la línea i con la línea j, y no hay ningún otro cruce. Por tanto, $ni(\tau) = 2(j-i-1)+1$, luego τ es impar. Esto implica que $sg(\sigma) = -sg(\sigma\circ\tau)$, y así tenemos:

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{\sigma\in S_n} -sg(\sigma\circ\tau)\cdot [A]_{1\sigma(\tau(1))}\cdots [A]_{i\sigma(\tau(i))}\cdots [A]_{j\sigma(\tau(j))}\cdots [A]_{n\sigma(\tau(n))}\\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma\circ\tau)\cdot a_{1\sigma(\tau(1))}\cdots a_{i\sigma(\tau(i))}\cdots a_{j\sigma(\tau(j))}\cdots a_{n\sigma(\tau(n))}.
\end{aligned}$$

Como en este sumatorio $\sigma\circ\tau$ toma como valor todas las posibles permutaciones, la suma da precisamente $|A|$, luego se obtiene $|B| = -|A|$, como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que B se obtiene de A al permutar dos columnas. En este caso B^t se obtiene de A^t al permutar dos filas, luego $|B| = |B^t| = -|A^t| = -|A|$. $\square$

Un corolario inmediato de este resultado es el siguiente:

Determinante de matrices con filas o columnas iguales

Si A es una matriz cuadrada con dos filas o dos columnas iguales, entonces
$$|A| = 0.$$

PRUEBA: En este caso, A se obtiene de sí misma al intercambiar dos filas o dos columnas (aquellas que son iguales). Por tanto, $|A| = -|A|$, luego $|A| = 0$. □

Nota 3.2.1. En la demostración anterior, hemos supuesto que $2 \neq 0$ en el cuerpo k. En efecto, $|A| = -|A|$ es equivalente $2|A| = 0$, que implica $|A| = 0$ siempre que $2 \neq 0$. Hay cuerpos en los que esto no ocurre (por ejemplo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$), aunque incluso en este caso el resultado sigue siendo cierto. Un buen ejercicio es demostrar este resultado directamente con la definición de determinante.

Para estudiar el efecto que una operación elemental de tipo II o III induce en el determinante de una matriz, veremos un resultado más general, que incluye a ambos.

Determinante y combinaciones lineales de filas

Sean $B, A_1, \dots, A_t$ matrices $n \times n$ tales que:

- La fila i de B es una combinación lineal de las filas i de $A_1, \dots, A_t$, es decir, existen unos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ tales que
$$[B]_{i*} = \alpha_1[A_1]_{i*} + \cdots \alpha_t[A_t]_{i*}.$$
- Para todo $k \neq i$, las filas k de $B, A_1, \dots, A_t$ son todas iguales.

Entonces
$$|B| = \alpha_1|A_1| + \cdots + \alpha_t|A_t|.$$

Ejemplo 3.2.1. A partir de la combinación lineal $(2,\ 3,\ -1) = 2(1,\ 5,\ 1) + (-1)(0,\ 7,\ 3)$, se deduce la igualdad:

$$\begin{vmatrix} 13 & 57 & 36 \\ 2 & 3 & -1 \\ 248 & 504 & 311 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 13 & 57 & 36 \\ 1 & 5 & 1 \\ 248 & 504 & 311 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 13 & 57 & 36 \\ 0 & 7 & 3 \\ 248 & 504 & 311 \end{vmatrix}.$$

PRUEBA: Para todo $k \neq i$, sabemos que la entrada (k, j) de cualquiera de las matrices estudiadas es $[B]_{k,j}$. Para la fila i, denotaremos $[A_m]_{i,j}$ a la entrada (i, j) de la matriz A_m, para $m = 1, \dots, t$. Entonces tenemos $[B]_{i,j} = \alpha_1[A_1]_{i,j} + \cdots + \alpha_t[A_t]_{i,j}$, para todo $j = 1, \dots, n$.

La fórmula del determinante de A queda:

$$
\begin{aligned}
|B| &= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [B]_{1\sigma(1)}\cdots [B]_{i\sigma(i)}\cdots [B]_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [B]_{1\sigma(1)}\cdots \big(\alpha_1[A_1]_{i\sigma(i)}+\cdots+\alpha_t[A_t]_{i\sigma(i)}\big)\cdots [B]_{n\sigma(n)} \\
&= \left(\sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [B]_{1\sigma(1)}\cdots (\alpha_1[A_1]_{i\sigma(i)})\cdots [B]_{n\sigma(n)}\right)+\cdots \\
&\qquad \cdots+\left(\sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [B]_{1\sigma(1)}\cdots (\alpha_t[A_t]_{i\sigma(i)})\cdots [B]_{n\sigma(n)}\right) \\
&= \alpha_1\left(\sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [B]_{1\sigma(1)}\cdots [A_1]_{i\sigma(i)}\cdots [B]_{n\sigma(n)}\right)+\cdots \\
&\qquad \cdots+\alpha_t\left(\sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\cdot [B]_{1\sigma(1)}\cdots [A_t]_{i\sigma(i)}\cdots [B]_{n\sigma(n)}\right) \\
&= \alpha_1|A_1|+\cdots\alpha_t|A_t|,
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar. □

El mismo resultado es claramente cierto para columnas:

Determinante y combinaciones lineales de columnas

Sean $B, A_1, \ldots, A_t$ matrices $n\times n$ tales que:

- La columna j de B es una combinación lineal de las columnas j de $A_1, \ldots, A_t$, es decir, existen unos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ tales que
$$[B]_{*j} = \alpha_1[A_1]_{*j}+\cdots\alpha_t[A_t]_{*j}.$$
- Para todo $k\neq j$, las columnas k de $B, A_1, \ldots, A_t$ son todas iguales.

Entonces
$$|B| = \alpha_1|A_1|+\cdots+\alpha_t|A_t|.$$

PRUEBA: Inmediato, puesto que las traspuestas de las matrices $B, A_1, \ldots, A_t$ satisfacen las hipótesis del resultado anterior. □

Determinante y operaciones elementales de tipo II

Si la matriz cuadrada B se obtiene de A al multiplicar una fila (o columna) por un escalar α, entonces:

$$|B| = \alpha|A|.$$

PRUEBA: Inmediato a partir de los resultados anteriores, tomando $t = 1$, $\alpha_1 = \alpha$ y $A_1 = A$. $\square$

Determinante y operaciones elementales de tipo III

Si la matriz cuadrada B se obtiene de A al sumar a una fila (o columna) un múltiplo de otra, entonces:

$$|B| = |A|.$$

PRUEBA: Supongamos que B se obtiene de A al sumar, a la fila i, la fila j multiplicada por $\alpha \in k$. Denotemos $A_1 = A$, y sea A_2 la matriz que se obtiene de A al sustituir la fila i for la j, dejando la fila j como está: es decir, las filas i y j de A_2 son ambas iguales a la fila j de A. En este caso, B, A_1 y A_2 satisfacen las hipótesis de los resultados anteriores: las filas k con $k \neq i$ son todas iguales, y la fila i de B es combinación lineal de las filas i de A_1 y A_2. Concretamente:

$$[B]_{i*} = [A]_{i*} + \alpha[A]_{j*} = [A_1]_{i*} + \alpha[A_2]_{i*},$$

por lo que se tiene $|B| = |A_1| + \alpha|A_2|$. Como A_2 es una matriz con dos filas iguales, $|A_2| = 0$, luego $|B| = |A_1| = |A|$.

El caso de las operaciones elementales por columnas se demuestra igual. $\square$

3.3. Regla del producto

Veamos ahora cómo se comporta el determinante con respecto al producto de matrices. Para ello usaremos dos argumentos que ya conocemos: cómo se comporta el determinante al aplicar una transformación elemental, y que las transformaciones elementales equivalen a multiplicar por una matriz elemental.

Determinante de las matrices elementales

Si E es una matriz elemental de tipo I, entonces $|E| = -1$.

Si E es una matriz elemental de tipo II, que se obtiene al multiplicar una fila de la matriz identidad por $\alpha \neq 0$, entonces $|E| = \alpha$.

Si E es una matriz elemental de tipo III, entonces $|E| = 1$.

PRUEBA: Las tres afirmaciones son inmediatas, una vez que sabemos que $|I_n| = 1$, y cómo se comporta el determinante al aplicar una transformación elemental de tipo I, II o III. □

Determinante y producto por matrices elementales

Si A y E son matrices $n \times n$, y E es una matriz elemental, entonces

$$|EA| = |E||A| = |A||E| = |AE|.$$

PRUEBA: La primera igualdad es consecuencia de que EA se obtiene de A al aplicar una transformación elemental de filas. Por tanto, si E es de tipo I, sabemos que $|EA| = -|A| = |E||A|$. Si E es de tipo II y el escalar correspondiente es α, se tiene $|EA| = \alpha|A| = |E||A|$. Finalmente, si E es de tipo III, tenemos $|EA| = |A| = |E||A|$. En cualquier caso, se tiene la primera igualdad.

La seguna igualdad es inmediata por la propiedad conmutativa del producto en k. La tercera se prueba de idéntica manera a la primera, utilizando transformaciones de columnas. □

A partir de este resultado, podemos dar una nueva caracterización de las matrices invertibles:

Existencia de inversa y determinantes

Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

PRUEBA: Consideremos una matriz cuadrada A, y sea R su forma escalonada reducida por filas. Recordemos que R se obtiene a partir de A mediante una sucesión de transformaciones elementales por filas, y esto equivale a multiplicar a A, por la izquierda, por una serie de matrices elementales. Esto es: $R = E_1 \cdots E_k A$, donde $E_1, \ldots, E_k$ son matrices elementales. Aplicando reiteradamente el resultado anterior, obtenemos: $|R| = |E_1| \cdots |E_k||A|$. Como las matrices elementales tienen todas determinante distito de cero, obtenemos que $|A| = 0 \Leftrightarrow |R| = 0$.

Ahora recordemos que si A es invertible, R es la matriz identidad, luego $|R| = 1 \neq 0$ y $|A| \neq 0$. Por otra parte, si A no es invertible, R tiene una fila de ceros, luego $|R| = 0$ y $|A| = 0$. □

Ya podemos demostrar cómo se comporta el determinante con respecto al producto de matrices.

Determinante y producto de matrices

Sean A y B matrices $n \times n$. Se tiene:

$$|AB| = |A||B|.$$

PRUEBA: Supongamos que A es singular. Entonces $|A| = 0$, y además sabemos que $A = E_1 \cdots E_k R$, donde $E_1, \ldots, E_k$ son matrices elementales y R es la forma escalonada reducida por filas de A, que tiene una fila de ceros (al menos la última). Pero en este caso la última fila de RB también es de ceros, luego $|RB| = 0$. Por tanto $|AB| = |E_1 \cdots E_k RB| = |E_1| \cdots |E_k||RB| = 0 = |A||B|$.

Si B es singular, se tiene $|AB| = |(AB)^t| = |B^t A^t|$, donde B^t es singular, y podemos aplicar el caso anterior, obteniendo: $|AB| = |B^t A^t| = |B^t||A^t| = |B||A| = |A||B|$.

Supongamos entonces que A y B son no singulares. Serán entonces producto de matrices elementales, $A = E_1 \cdots E_k$ y $B = E'_1 \cdots E'_r$. Pero entonces $|A| = |E_1 \cdots E_k| = |E_1| \cdots |E_k|$, $|B| = |E'_1 \cdots E'_r| = |E'_1| \cdots |E'_r|$ y por último $|AB| = |E_1 \cdots E_k E'_1 \cdots E'_r| = |E_1| \cdots |E_k||E'_1| \cdots |E'_r|$. Por tanto, $|AB| = |A||B|$, como queríamos demostrar. □

3.4. Rango y determinantes

En esta sección veremos cómo el rango de una matriz cualquiera puede calcularse usando determinantes. Para ello necesitamos la siguiente definición

Submatrices

Dada una matriz A, $m \times n$, si elegimos unas filas, es decir, un subconjunto $I \subset \{1, \ldots, m\}$, y además elegimos unas columnas, es decir, un subconjunto $J \in \{1, \ldots, n\}$, se define la ***submatriz*** de A determinada por I y J como la matriz

$$[A]_{I,J}$$

cuyas entradas son las entradas a_{ij} de A tales que $i \in I$ y $j \in J$. En otras palabras, es la matriz que se obtiene de A al eliminar las filas que no están en I, y las columnas que no están en J.

Menores

Dada una matriz A, $m \times n$, los ***menores*** de A son los determinantes de las submatrices cuadradas de A. Es decir, los escalares

$$m_{I,J} = |[A]_{I,J}|\,,$$

donde $I \subset \{1,\ldots,m\}$ y $J \subset \{1,\ldots,n\}$ son dos conjuntos con el mismo número de elementos.

Diremos que $m_{I,J}$ es un menor de ***orden*** s si la submatriz $[A]_{I,J}$ tiene orden $s \times s$, es decir, si I y J tienen s elementos.

Recordemos que el rango de una matriz A es igual al número de columnas básicas, o al número de filas distintas de cero de su forma escalonada reducida por filas. Con respecto a las submatrices, el rango se comporta de la siguiente manera:

Rango y submatrices

Si $[A]_{I,J}$ es una submatriz de A, $\qquad \mathrm{rg}([A]_{I,J}) \leq \mathrm{rg}(A)$.

PRUEBA: Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$ y rango r. Sabemos que una serie de operaciones elementales por filas transforman A en E, su forma escalonada reducida por filas. Si llamamos $M = \{1,\ldots,m\}$, podemos considerar la submatriz $[A]_{M,J}$, que estará formada por algunas columnas de A. Si aplicamos a $[A]_{M,J}$ las mismas operaciones elementales, obtendremos las columnas correspondientes de la matriz E, es decir, obtendremos una matriz que tendrá como mucho r filas no nulas. Esto implica que la reducida por filas de $[A]_{M,J}$ tiene como mucho r filas no nulas, luego $\mathrm{rg}(A_{M,J}) \leq r = \mathrm{rg}(A)$.

Hemos probado entonces que, dada una matriz A de rango r, toda submatriz formada por columnas completas de A tiene a lo sumo rango r. Pero observemos que $([A]_{I,J})^t$ es una submatriz de $([A]_{M,J})^t$ formada por columnas completas, luego $\mathrm{rg}([A]_{I,J}) = \mathrm{rg}(([A]_{I,J})^t) \leq \mathrm{rg}(([A]_{M,J})^t) = \mathrm{rg}([A]_{M,J}) \leq \mathrm{rg}(A)$, como queríamos demostrar. $\square$

Veamos que existe otra definición de rango, a partir de los menores de una matriz A.

Rango y menores

El rango de A es igual al mayor orden alcanzado por los menores no nulos de A. Es decir, $\mathrm{rg}(A) = r$ si y sólo si:

- Existe un menor $m_{I,J} \neq 0$ de orden r.
- Todos los menores de A de orden mayor que r son nulos.

PRUEBA: Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$, que tiene rango r. Sabemos que hay unas operaciones elementales por filas que transforman A en su forma escalonada reducida por filas E.

Sean $p_1, \ldots, p_r$ las columnas básicas de A, y definamos $J = \{p_1, \ldots, p_r\}$ y $M = \{1, \ldots, m\}$. La submatriz $[A]_{M,J}$ está formada por las columnas básicas de A. Si aplicamos a $[A]_{M,J}$ las mismas operaciones elementales que a A, obtendremos las columnas básicas de E, es decir, una matriz $m \times r$ cuyas primeras r filas forman la matriz identidad, y las restantes $m - r$ filas son de ceros. Como esta matriz es una reducida por filas con r pivotes, $[A]_{M,J}$ tiene rango r.

Consideremos ahora $([A]_{M,J})^t$. Sabemos que también tiene rango r, luego el mismo argumento anterior nos dice que tomando sus columnas básicas obtenemos una matriz de rango r. Sean $q_1, \ldots, q_r$ sus columnas básicas. Observemos que tomar las columnas $q_1, \ldots, q_r$ de $([A]_{M,J})^t$ es lo mismo que definir $I = \{q_1, \ldots, q_r\}$ y considerar la matriz $([A]_{I,J})^t$. Esta matriz tendrá entonces rango r, luego la matriz $[A]_{I,J}$ también lo tendrá. Pero entonces $A_{I,J}$ es una submatriz de A, de orden $r \times r$ y rango r, luego su determinante es distinto de cero. Es decir, el menor $m_{I,J}$, de orden r, es no nulo.

Consideremos ahora un menor $m_{I',J'}$ de orden $k > r$. Como una submatriz no puede tener mayor rango que la matriz original, $[A]_{I',J'}$ es una matriz de orden $k \times k$ y rango menor o igual a $r < k$, luego su determinante debe ser cero. Es decir, $m_{I',J'} = 0$.

Hemos demostrado entonces que para todo r, una matriz de rango r admite un menor no nulo de orden r, y todos sus menores de orden mayor que r son nulos. Por tanto, el mayor orden alcanzado por los menores no nulos de A es igual al rango de A, como queríamos demostrar. $\square$

Más adelante veremos que para calcular el rango de una matriz usando menores, no es necesario ver que se anulan *todos* los menores de un cierto orden. Pero antes necesitamos ver una nueva caracterización del determinante.

3.5. Desarrollo por adjuntos

El determinante de una matriz cuadrada A se puede describir (y calcular) de una forma recursiva, usando determinantes de matrices más pequeñas. Esto se consigue gracias a unos menores muy especiales, que se llaman ***adjuntos***.

Adjuntos

Dada una matriz cuadrada A de orden n, y dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, sean $I = \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ y $J = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$. Se define el ***adjunto*** (i, j) de la matriz A como el escalar:

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{I,J}.$$

En otras palabras, $A_{i,j}$ es igual al determinante de la matriz que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j, salvo un signo que viene determinado por los valores de i y j. No se debe confundir el adjunto $A_{i,j}$ con el elemento $[A]_{i,j} = a_{i,j}$.

Otra definición de adjuntos

Sea $\mathbf{e}_k$ la matriz $1 \times n$ dada por $(0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0)$, donde el 1 está en la posición k. Entonces:

- El adjunto $A_{i,j}$ es el determinante de la matriz que se obtiene de A al sustituir la fila i por $\mathbf{e}_j$.
- El adjunto $A_{i,j}$ es el determinante de la matriz que se obtiene de A al sustituir la columna j por $(\mathbf{e}_i)^t$.

PRUEBA: Probemos la primera afirmación, siendo la segunda análoga. Sea B la matriz que se obtiene de A al sustituir la fila i por $\mathbf{e}_j$. Haciendo $n-i$ trasposiciones de filas, podemos llevar esta fila i hasta la última posición. Haciendo ahora $n-j$ trasposiciones de columnas, podemos llevar la columna j a la última posición, con lo que la matriz B queda convertida en:

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{j,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & a_{j,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como hemos transformado B en C mediante $n-i$ trasposiciones de filas y $n-j$ trasposiciones de columnas, se tiene $|C| = (-1)^{2n-i-j}|B| = (-1)^{-i-j}|B|$. Calculemos ahora el determinante de C. Observemos que, como $c_{n,i} = 0$ si $i < n$, las únicas permutaciones que pueden dar un sumando no trivial en la fórmula del determinante de C, son aquellas en las que aparece $c_{n,n}$, es decir, aquellas σ tales que $\sigma(n) = n$. Por tanto:

$$|C| = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} sg(\sigma) \cdot c_{1\sigma(1)} \cdots c_{n-1\sigma(n-1)} c_{n\sigma(n)} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} sg(\sigma) \cdot c_{1\sigma(1)} \cdots c_{n-1\sigma(n-1)},$$

donde esta última igualdad se obtiene de $c_{n\sigma(n)} = c_{nn} = 1$.

Pero ahora observemos que una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(n) = n$, equivale a una permutación de S_{n-1}. Además, el signo de esta permutación es el mismo considerado en S_n que considerado en S_{n-1}, puesto que la línea correspondiente a n no se cruza con ninguna otra. Por tanto, la fórmula anterior se puede reescribir:

$$|C| = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} sg(\sigma) \cdot c_{1\sigma(1)} \cdots c_{n-1\sigma(n-1)}.$$

Ahora sólo queda observar que éste es el determinante de la sumbatriz de C formada por las primeras $n-1$ filas y $n-1$ columnas, que no es otra cosa que la submatriz de A a la que le hemos quitado la fila i y la columna j. Es decir, es el menor $m_{I,J}$ que aparece en la definición de adjunto. En otras palabras: $A_{i,j} = (-1)^{i+j}|C|$. Por tanto nos queda $A_{i,j} = (-1)^{i+j}(-1)^{-i-j}|B| = |B|$, como queríamos demostrar. $\square$

Usando los adjuntos, que son determinantes de matrices de orden $n-1$, podemos describir el determinante de A:

Desarrollo por adjuntos del determinante

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se tienen las siguientes igualdades:

- **Desarrollo por la fila i.** Para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$|A| = a_{i,1}A_{i,1} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}.$$

- **Desarrollo por la columna j.** Para cualquier $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$|A| = a_{1,j}A_{1,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}.$$

PRUEBA: Este resultado es inmediato a partir del anterior, y de las propiedades del determinante. La fila i de A se puede escribir como combinación lineal:

$$(a_{i,1} \cdots a_{i,n}) = a_{i,1}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n.$$

Como $A_{i,j}$ es el determinante de la matriz que se obtiene de A al sustituir su fila i por $\mathbf{e}_j$, se tiene:

$$|A| = a_{i,1}A_{i,1} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n},$$

como queríamos demostrar. El caso de las columnas es análogo. □

3.6. Método del orlado

Recordemos que el rango de una matriz X es r si y sólo si existe un menor no nulo de orden r, y todos los menores de orden mayor que r son nulos. En principio, paras demostrar que una matriz tiene rango r habría que encontrar un menor no nulo de orden r, y calcular todos los menores de orden $r+1$ para ver que se anulan. En esta sección veremos que esto no es necesario. Si encontramos una submatriz cuadrada M de X tal que $|M| \neq 0$, y vemos que se anulan todos los menores de orden $r+1$ que corresponden a submatrices de X *que contienen a* M, entonces $\text{rg}(X) = r$.

Para demostrar esto necesitamos un resultado previo:

Lema 3.6.1. *Sean* M, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *y* a *matrices* $r \times r$, $1 \times r$, $r \times 1$ *y* 1×1, *respectivamente. Si* $|M| \neq 0$ *y* $\left|\begin{array}{c|c} M & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{f} & a \end{array}\right| = 0$, *entonces* $\mathbf{f}\ M^{-1}\ \mathbf{c} = a$.

PRUEBA: Si $|M| \neq 0$, existe su inversa M^{-1}. Observemos que se tiene siguiente producto:

$$\left(\begin{array}{c|c} M^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{f}M^{-1} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{f} & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & M^{-1}\mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{f}M^{-1}\mathbf{c} + a \end{array}\right).$$

Llamemos P, Q y R a las matrices que aparecen en esta fórmula. Tenemos entonces $PQ = R$. Por hipótesis $|Q| = 0$, y por otra parte el determinante de R es claramente $-\mathbf{f}\ M^{-1}\ \mathbf{c} + a$. Por tanto, $-\mathbf{f}\ M^{-1}\ \mathbf{c} + a = |R| = |P||Q| = |P|\,0 = 0$. $\square$

Ahora ya podemos demostrar el resultado que necesitamos.

Teorema principal del método del orlado

Sea X una matriz $m \times n$ con un menor no nulo de orden r, es decir, con una submatriz cuadrada M de orden r tal que $|M| \neq 0$. Supongamos que todas las submatrices cuadradas de orden $r+1$ que contienen a M tienen determinante 0. Entonces rg$(X) = r$.

PRUEBA: Observemos que intercambiar filas o columnas de una matriz no cambia su rango, ni el hecho de que sus menores de un cierto orden sean o no sean todos nulos. Por tanto, podemos suponer que la submatriz M está formada por las primeras r filas y columnas de X. Es decir, podremos escribir X de la forma:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} M & A \\ \hline B & C \end{array}\right).$$

Estamos suponiendo que $|M| \neq 0$, luego existe su inversa M^{-1}, y podemos considerar el siguiente producto:

$$\left(\begin{array}{c|c} M^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline -BM^{-1} & I_{m-r} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} M & A \\ \hline B & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & M^{-1}A \\ \hline \mathbf{0} & -BM^{-1}A + C \end{array}\right).$$

Hemos escrito entonces $PX = Y$, donde P es una matriz cuadrada $m \times m$ tal que $|P| = |M^{-1}| \neq 0$. Por tanto, rg$(X) =$ rg(Y), y sólo tenemos que probar que rg$(Y) = r$. Bastará demostrar que $-BM^{-1}A + C$ es la matriz nula, es decir, que $BM^{-1}A = C$.

La fila i de la matriz $BM^{-1}A$ es $[BM^{-1}A]_{i*} = [B]_{i*}M^{-1}A$, y la columna j de esta fila, es decir, el elemento (i,j) de la matriz $BM^{-1}A$ es

$$[BM^{-1}A]_{ij} = [[B]_{i*}M^{-1}A]_{*j} = [B]_{i*}M^{-1}[A]_{*j}.$$

Por tanto, tenemos que demostrar que $[B]_{i*}M^{-1}[A]_{*j} = [C]_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m-r$ y para todo $j = 1, \ldots, n-r$.

Ahora consideremos la submatriz de X formada por las filas $1, \ldots, r$ y $r+i$, y por las columnas $1, \ldots, r$ y $r+j$. Es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{c|c} M & [A]_{*j} \\ \hline [B]_{i*} & [C]_{ij} \end{array}\right).$$

Como esta submatriz es cuadrada de orden $r+1$ y contiene a M, tiene determinante cero. Por el lema anterior, se sigue que $[B]_{i*}M^{-1}[A]_{*j} = [C]_{ij}$, como queríamos demostrar. $\square$

A partir de este resultado, el método del orlado para calcular el rango de una matriz X es el siguiente. Por abuso del lenguaje, diremos que un menor $|M'|$ contiene a $|M|$ si M es una submatriz de M'.

Método del orlado

Sea X una matriz $m \times n$. El método del orlado para calcular el rango de r es como sigue. Si $X = \mathbf{0}$, entonces $\text{rg}(X) = 0$. En caso contrario, tomamos un menor $|M|$ de orden 1 no nulo. Comenzando por $r = 1$, se realizan los siguientes pasos:

1. Hallar, si existe, un menor no nulo de orden $r + 1$ que contenga a M.
2. Si no lo hay, $\text{rg}(X) = r$.
3. Si lo hay, repetir el paso 1 aumentando r una unidad, y reemplazando M por el menor encontrado.

Observemos que en el método anterior no es necesario comenzar con $r = 1$. Si se encuentra un menor no nulo de orden r, se puede empezar con dicho r en el paso 1.

3.7. Regla de Cramer

Veamos otra utilidad de los determinantes: resolver sistemas lineales en los que la matriz de coeficientes es cuadrada y no singular. Recordemos que si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales, donde A es cuadrada y no singular, su solución es única y viene dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, aunque para hallarla de esta manera hay que calcular la inversa de A. Existe otra posiblidad, que además nos permite calcular el valor de una sóla de las incógnitas, sin necesidad de calcular las demás.

Regla de Cramer

Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales, tal que A es una matriz cuadrada de orden n no singular. Sea B_i la matriz que se obtiene de A al sustituir la columna i por $\mathbf{b}$ (la columna de términos independientes). Entonces la solución del sistema es:

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|},$$

para $i = 1, \ldots, n$.

PRUEBA: Sea $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ la solución del sistema. Tenemos que probar que $s_i = |B_i|/|A|$. Consideremos la matriz

$$C_i = \begin{pmatrix} 1 & & & s_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & s_{i-1} & & & \\ & & & s_i & & & \\ & & & s_{i+1} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & s_n & & & 1 \end{pmatrix}$$

que se obtiene de la matriz identidad al sustituir su columna i por la solución del sistema (que llamaremos $\mathbf{s}$). Recordemos que, si multiplicamos A por C_i, las columnas del producto AC_i se pueden ver como $[AC_i]_{*k} = A\,[C_i]_{*k}$. Por tanto, las columnas de AC_i serán iguales a las columnas de A, salvo la columna i, que quedará igual a $A\mathbf{s} = \mathbf{b}$, al ser $\mathbf{s}$ la solución del sistema. Es decir, $AC_i = B_i$. Por la regla del producto tenemos $|A||C_i| = |B_i|$, y ya sólo queda darse cuenta de que $|C_i| = s_i$, al ser la permutación trivial la única que puede dar un sumando no nulo a $|C_i|$. Por tanto, $|A|s_i = |B_i|$, y como $|A| \neq 0$, tenemos finalmente $s_i = |B_i|/|A|$. $\square$

3.8. Inversa y determinantes

Terminaremos este tema explicando cómo los determinantes pueden servir para calcular la inversa de una matriz. Para ello necesitamos la siguiente definición:

Matriz adjunta

Dada ua matriz cuadrada A de orden n, se define la matriz ***adjunta*** de A, como la matriz $adj(A)$ dada por:

$$[adj(A)]_{i,j} = A_{j,i}.$$

Es decir, $adj(A)$ es la matriz cuyas entradas son los adjuntos de A, dispuestos en el orden **traspuesto** al que sería, a priori, natural. Demostremos ya el último resultado de este tema.

Inversa y determinantes

Dada una matriz cuadrada A no singular, se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,adj(A).$$

PRUEBA: Observemos que A^{-1} es la única solución de la ecuación $AX = I$. Esta ecuación puede verse como un conjunto de n sistemas lineales, ya que se tiene $A[X]_{*j} = (\mathbf{e}_j)^t$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Pero ya sabemos resolver este tipo de sistemas, por ejemplo usando a la regla de Cramer. Esta regla nos dice que la incógnita i de este sistema, es decir, $x_{i,j}$, es igual a $|B_i|/|A|$, donde B_i es la matriz que se obtiene de A al sustituir la columna i por la de los términos indepentdientes, es decir, por $(\mathbf{e}_j)^t$. Ahora bien, sabemos que al sustituir la columna i de A por $(\mathbf{e}_j)^t$, y calcular el determinante, obtenemos el adjunto $A_{j,i}$. Por tanto, acabamos de demostrar que la entrada $x_{i,j}$ de la matriz A^{-1} es precisamente $A_{j,i}/|A|$. Sacando fuera el escalar $1/|A|$, que aparece en todas las entradas de la matriz, se obtiene finalmente

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A).$$

$\square$