

## Capítulo 2

# Álgebra matricial

Estas notas están basadas en las realizadas por el profesor **Manuel Jesús Gago Vargas** para la asignatura *Métodos matemáticos: Álgebra lineal* de la *Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas*.

### 2.1. Adición y trasposición

*Nota 2.1.1.* Como en el anterior tema, consideraremos fijado un cuerpo  $k$  de coeficientes. Nos referiremos a los elementos del cuerpo como **números** o **escalares**.

Alguna de las definiciones de este tema serán específicas para el caso en que  $k$  es el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. En ese caso se advertirá específicamente.

Si es necesario pondremos el orden de la matriz como subíndice. Así escribiremos  $A_{m \times n}$  para indicar que la matriz  $A$  es de orden  $m \times n$ .

Denotaremos también  $[A]_{ij}$  a entrada de la fila  $i$  y la columna  $j$  en la matriz  $A$ .

Dos matrices  $A$  y  $B$  son **iguales** si tienen el mismo orden y las entradas correspondientes son iguales,  $[A]_{ij} = [B]_{ij}$ .

#### Suma de matrices

Si  $A$  y  $B$  son matrices de orden  $m \times n$ , la suma de  $A$  y  $B$  se define como la matriz de orden  $m \times n$  notada por  $A + B$ , cuyas entradas verifican

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \text{ para cada } i, j.$$

La matriz  $-A$ , llamada **opuesta** de  $A$ , se define como

$$[-A]_{ij} = -[A]_{ij}.$$

La **diferencia** de  $A$  y  $B$  es

$$A - B = A + (-B).$$

### Propiedades de la suma de matrices

Sean  $A, B$  y  $C$  matrices de orden  $m \times n$ . Se verifican las siguientes propiedades:

- $A + B$  es una matriz de orden  $m \times n$ .
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
- $A + B = B + A$ .
- La matriz  $\mathbf{0}_{m \times n}$  que tiene todas sus entradas nulas verifica  $A + \mathbf{0} = A$ .
- La matriz  $-A$  es de orden  $m \times n$  y verifica  $A + (-A) = \mathbf{0}$ .

### Multiplicación por un escalar

El producto de un escalar  $\alpha$  por una matriz  $A$  de orden  $m \times n$ , notada por  $\alpha A$ , se define como la matriz de orden  $m \times n$  que verifica

$$[\alpha A]_{ij} = \alpha[A]_{ij}.$$

### Propiedades de la multiplicación por un escalar

Sean  $A, B$  matrices de orden  $m \times n$ , y  $\alpha, \beta$  escalares.

- $\alpha A$  es una matriz  $m \times n$ .
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ .
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ .
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .
- $1A = A$ .

*Nota 2.1.2.* Se tienen propiedades análogas para  $A\alpha = \alpha A$ .

### Trasposición

La traspuesta de una matriz  $A_{m \times n}$  es la matriz notada por  $A^t$  de orden  $n \times m$  definida como

$$[A^t]_{ij} = [A]_{ji}.$$

*Nota 2.1.3.* Es evidente que  $(A^t)^t = A$ .

Para el caso en que  $k = \mathbb{C}$  es el cuerpo de los números complejos definimos dos operaciones más. Recuérdese que el **conjugado** de un número complejo  $\alpha = a + ib$  es  $\bar{\alpha} = a - ib$ .

### Conjugada traspuesta

La matriz **conjugada** de una matriz  $A_{m \times n}$  es la matriz de orden  $m \times n$  notada por  $\bar{A}$  definida como

$$[\bar{A}]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}.$$

La matriz **conjugada traspuesta** de una matriz  $A_{m \times n}$  es la matriz de orden  $n \times m$  notada por  $A^*$  y definida como

$$[A^*]_{ij} = \overline{[A]_{ji}}.$$

Es decir,  $A^* = \overline{A^t}$ .

*Nota 2.1.4.* Se tiene que  $(A^*)^* = A$ . En el caso de matrices **reales**, cuyas entradas pertenecen a  $\mathbb{R}$ , se tiene que  $\bar{A} = A$  y  $A^* = A^t$ .

### Propiedades de la matriz traspuesta

Sean  $A$  y  $B$  matrices del mismo orden y  $\alpha$  un escalar. Entonces

- $(A + B)^t = A^t + B^t$  y  $(A + B)^* = A^* + B^*$ .
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$  y  $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ .

### Simetrías

Sea  $A$  una matriz cuadrada.

- Decimos que  $A$  es **simétrica** si  $A = A^t$ , esto es,  $[A]_{ij} = [A]_{ji}$ .
- Decimos que  $A$  es **anti-simétrica** si  $A = -A^t$ , esto es,  $[A]_{ij} = -[A]_{ji}$ .

Si además  $A$  es una matriz **compleja**:

- Decimos que  $A$  es **hermitiana** si  $A = A^*$ , esto es,  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ .
- Decimos que  $A$  es **anti-hermitiana** si  $A = -A^*$ , esto es,  $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ .

**Ejercicio 2.1.1.** Probar que si  $A$  es una matriz hermitiana entonces las entradas de la diagonal,  $[A]_{ii}$ , son números reales.

## 2.2. Multiplicación de matrices

### Multiplicación de matrices

- Dos matrices  $A$  y  $B$  se dicen **ajustadas** para multiplicación en el orden  $AB$  cuando el número de columnas de  $A$  es igual al número de filas de  $B$ , esto es, si  $A$  es de orden  $m \times p$  y  $B$  es de orden  $p \times n$ .
- Para matrices ajustadas  $A_{m \times p}$  y  $B_{p \times n}$ , la **matriz producto**  $AB$ , de orden  $m \times n$ , se define como

$$[AB]_{ij} = [A]_{i1}[B]_{1j} + [A]_{i2}[B]_{2j} + \dots + [A]_{ip}[B]_{pj} = \sum_{k=1}^p [A]_{ik}[B]_{kj}$$

**Nota 2.2.1.** Puede ocurrir dos matrices  $A$  y  $B$  estén ajustadas para la multiplicación en el orden  $AB$  pero no en el orden  $BA$ . Es decir, que exista el producto  $AB$ , pero que no  $BA$ .

**Ejercicio 2.2.1.** (LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES NO ES CONMUTATIVA). Considere lo que ocurre al tomar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y calcular  $AB$  y  $BA$ . Obsérvese que ni siquiera son matrices del mismo orden.

Pero aunque fueran matrices cuadradas el producto no es conmutativo en general. Por ejemplo, sean las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que  $CD$  y  $DC$  son distintas.

### Filas y columnas de un producto

Supongamos que  $A_{m \times p}$  y  $B_{p \times n}$ .

- $[AB]_{i*} = A_{i*}B$ ; esto es, la  $i$ -ésima fila de  $AB$  es la  $i$ -ésima fila de  $A$  multiplicada por  $B$ .
- $[AB]_{*j} = AB_{*j}$ ; esto es, la  $j$ -ésima columna de  $AB$  es  $A$  multiplicada por la  $j$ -ésima columna de  $B$ .
- $[AB]_{i*} = [A]_{i1}B_{1*} + [A]_{i2}B_{2*} + \dots + [A]_{ip}B_{p*} = \sum_{k=1}^p [A]_{ik}B_{k*}$ .
- $[AB]_{*j} = A_{*1}[B]_{1j} + A_{*2}[B]_{2j} + \dots + A_{*p}[B]_{pj} = \sum_{k=1}^p A_{*k}[B]_{kj}$ .

*Nota 2.2.2.* Las dos últimas ecuaciones indican que las filas de  $AB$  son combinación lineal de las filas de  $B$ , y que las columnas de  $AB$  son combinación lineal de las columnas de  $A$ .

### Sistemas lineales

Todo sistema de  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

se puede escribir en forma matricial como  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, toda ecuación matricial  $A_{m \times n}\mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$  representa un sistema lineal de  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas.

## 2.3. Propiedades de la multiplicación matricial

### Propiedades distributiva y asociativa

Para matrices ajustadas se verifica

- $A(B + C) = AB + AC$ .
- $(D + E)F = DF + EF$ .
- $A(BC) = (AB)C$ .

### Matriz identidad

La matriz de orden  $n \times n$  con unos en la diagonal y ceros en el resto

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz identidad** de orden  $n$ . Para toda matriz  $A$  de orden  $m \times n$  se verifica

$$AI_n = A \text{ y } I_m A = A.$$

*Nota 2.3.1.* El subíndice de  $I_n$  se elimina cuando el tamaño es obvio por el contexto.

### Trasposición y producto

Para matrices ajustadas  $A$  y  $B$  se verifica que

$$(AB)^t = B^t A^t$$

y

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

*Ejercicio 2.3.1.* Probar las propiedades anteriores.

*Nota 2.3.2.* Para cada matriz  $A_{m \times n}$

- las matrices  $AA^t$  y  $A^t A$  son simétricas, y
- si  $A$  es una matriz compleja, las matrices  $AA^*$  y  $A^* A$  son hermitianas.

**Ejercicio 2.3.2.** Llamamos *traza* de  $A$  al número

$$\text{Tr}(A) = [A]_{11} + [A]_{22} + \dots + [A]_{nn} = \sum_{i=1}^n [A]_{ii}.$$

Probar que para dos matrices  $A_{m \times n}$  y  $B_{n \times m}$  se verifica

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

*Nota 2.3.3.* De lo anterior se deduce que  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$ , pero, en general,  $\text{Tr}(ABC) \neq \text{Tr}(BAC)$ .

### Multiplicación por bloques

Supongamos que  $A$  y  $B$  se particionan en submatrices, también llamados bloques, como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rt} \end{pmatrix}.$$

Si los pares  $(A_{ik}, B_{kj})$  son ajustados para el producto, entonces decimos que  $A$  y  $B$  tienen una **partición ajustada**. Para tales matrices, el producto  $AB$  se forma combinando los bloques exactamente de la misma forma como se hace con los escalares en la multiplicación ordinaria. Esto es, el bloque  $(i, j)$  en  $AB$  es

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{ir}B_{rj}.$$

**Ejemplo 2.3.1.** Consideremos las matrices particionadas

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} C & I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix}, B = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ C & C \end{pmatrix},$$

donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mediante la multiplicación por bloques, el producto  $AB$  es fácil de obtener:

$$AB = \begin{pmatrix} C & I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ C & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C & C \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

## 2.4. Inversa de una matriz

### Inversa de una matriz

Para una matriz cuadrada  $A_{n \times n}$ , la matriz  $B_{n \times n}$  que verifica las condiciones

$$AB = I_n \text{ y } BA = I_n$$

se denomina **inversa** de  $A$ , y la denotaremos por  $B = A^{-1}$ . No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una matriz cuadrada sin inversa se llama **singular**, y una matriz con inversa se denomina **no singular** o **regular**.

**Proposición 2.4.1.** *La inversa de una matriz, si existe, es única.*

PRUEBA: Supongamos que  $X_1$  y  $X_2$  son inversas de una matriz no singular  $A$ . Entonces

$$X_1 = X_1 I = X_1 (A X_2) = (X_1 A) X_2 = I X_2 = X_2.$$

□

### Ecuaciones matriciales

- Si  $A$  es una matriz no singular de orden  $n$ , entonces existe una única solución para  $X$  en la ecuación matricial  $A_{n \times n} X_{n \times p} = B_{n \times p}$ , y la solución es

$$X = A^{-1} B.$$

- Un sistema de  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas se puede escribir como una ecuación matricial  $A_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1}$ . Por lo anterior, si  $A$  es no singular, el sistema tiene solución única igual a  $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$ .

*Nota 2.4.1.* Sin embargo, debemos hacer hincapié en que la representación de la solución como  $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$  es conveniente desde el punto de vista teórico o de notación. En la práctica, un sistema no singular  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  **nunca** se resuelve calculando  $A^{-1}$  y después el producto  $A^{-1} \mathbf{b}$ . Se realizan más operaciones así que aplicando las técnicas de eliminación descritas en el tema anterior.

El siguiente resultado nos permite distinguir entre matrices singulares y no singulares.

### Existencia de inversa

Para una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$ , son equivalentes:

1.  $A^{-1}$  existe ( $A$  es no singular).
2.  $\text{rango}(A) = n$ .
3.  $A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} I_n$ .
4.  $Ax = 0$  implica que  $x = 0$ .

PRUEBA: El hecho de  $2) \Leftrightarrow 3)$  es una consecuencia directa de la definición de rango. La equivalencia  $2) \Leftrightarrow 4)$  la hemos visto en el tema anterior. Solamente falta por establecer  $1) \Leftrightarrow 2)$  para completar la prueba.

$1) \Rightarrow 2)$ . Consideremos la matriz  $X = (X_{*1} \ X_{*2} \ \dots \ X_{*n})$ . Esta matriz  $X$  verifica la ecuación  $AX = I$  si y solamente si  $X_{*j}$  es solución del sistema  $Ax = I_{*j}$ . Si  $A$  es no singular, entonces sabemos que existe una solución única de  $AX = I$ , y por tanto cada sistema  $Ax = I_{*j}$  tiene solución única. Pero sabemos que un sistema tiene solución única si y solamente si el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas, esto es,  $\text{rango}(A) = n$ .

$2) \Rightarrow 1)$ . Si  $\text{rango}(A) = n$ , entonces cada sistema  $Ax = I_{*j}$  es compatible, porque  $\text{rango}([A|I_{*j}]) = n = \text{rango}(A)$ . Además, la solución es única, por lo que la ecuación matricial  $AX = I$  tiene una única solución. Nos gustaría decir ya que  $X = A^{-1}$ , pero nos hace falta primero probar que  $XA = I$ , esto es,  $XA - I = 0$ . Como

$$A(XA - I) = AXA - A = IA - A = 0,$$

se sigue que cada columna de  $XA - I$  es una solución del sistema homogéneo  $Ax = 0$ , que es compatible determinado. Por tanto,  $XA - I = 0$  y  $XA = I = AX$ .  $\square$

**Nota 2.4.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA USANDO GAUSS-JORDAN.** En la demostración anterior hemos probado además que si  $A_{n \times n}$  es una matriz para la que existe  $X_{n \times n}$  con  $AX = I_n$ , entonces  $X = A^{-1}$ .

Para construir un algoritmo que nos devuelva  $A^{-1}$  cuando  $A_{n \times n}$  es no singular, recordemos que determinar  $A^{-1}$  es equivalente a resolver la ecuación matricial  $AX = I$ , que es lo mismo que resolver los  $n$  sistemas de ecuaciones definidos por

$$Ax = I_{*j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

En otras palabras, si  $X_{*1}, X_{*2}, \dots, X_{*n}$  son las respectivas soluciones, entonces  $X = (X_{*1} \ X_{*2} \ \dots \ X_{*n})$  resuelve la ecuación  $AX = I$  y de aquí  $X = A^{-1}$ .

Si  $A$  es no singular, el método de Gauss-Jordan reduce la matriz ampliada  $[A|I_{*j}]$  a  $[I|X_{*j}]$ , y sabemos que  $X_{*j}$  es la única solución de  $Ax = I_{*j}$ . En otras palabras,

$$[A|I_{*j}] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|[A^{-1}]_{*j}].$$

Pero mejor que resolver cada sistema  $Ax = I_{*j}$  de forma independiente, podemos resolverlos simultáneamente aprovechando que todos tienen la misma matriz de coeficientes.

En otras palabras, si aplicamos Gauss-Jordan a la matriz ampliada  $[A|I_{*1}|I_{*2}|\dots|I_{*n}]$  obtenemos

$$[A|I_{*1}|I_{*2}|\dots|I_{*n}] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|[A^{-1}]_{*1}|[A^{-1}]_{*2}|\dots|[A^{-1}]_{*n}],$$

o, de manera más compacta,

$$[A|I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|A^{-1}].$$

¿Qué ocurre si intentamos invertir una **matriz singular** con este procedimiento? El resultado anterior nos indica que una matriz singular  $A$  no puede ser reducida mediante Gauss-Jordan a la matriz  $I$  porque una fila de ceros aparecerá en algún momento. Por ello, no tenemos que saber a priori si la matriz que tenemos es o no singular, pues resultará evidente en el proceso de cálculo.

### Cálculo de la inversa

La eliminación de Gauss-Jordan se puede usar para el cálculo de la inversa de una matriz  $A$  mediante la reducción

$$[A|I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|A^{-1}].$$

La única posibilidad de que este método falle es que aparezca una fila de ceros en el lado izquierdo de la matriz ampliada, y esto ocurre si y solamente si la matriz  $A$  es singular.

**Ejemplo 2.4.1.** Calculemos, si existe, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz es no singular y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Propiedades de la inversión de matrices

Para matrices no singulares  $A$  y  $B$  del mismo orden, se verifica que

- $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- El producto  $AB$  es no singular y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$  y, si  $A$  es compleja,  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .

PRUEBA: La primera propiedad es inmediata. Para la segunda basta comprobar que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I,$$

de donde  $AB$  es no singular y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Para la última propiedad se comprueba que

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I,$$

de donde  $A^t$  es no singular y  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ . Análogamente se prueba que  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .  $\square$

## 2.5. Matrices elementales y equivalencia

*Nota 2.5.1. OPERACIONES ELEMENTALES POR COLUMNAS.* Es evidente que las mismas operaciones elementales por filas descritas en el tema anterior pueden realizarse por columnas. Tenemos entonces tres tipos de operaciones análogas a las operaciones elementales por filas:

- **Tipo I.** Intercambiar las columnas  $i$  y  $j$ .
- **Tipo II.** Reemplazar la columna  $i$  por un múltiplo no nulo de ella misma.
- **Tipo III.** Reemplazar la columna  $j$  por la suma de ella misma con un múltiplo de la columna  $i$ .

Análogamente a lo visto para las filas existen unas matrices especiales llamadas *formas escalonadas por columnas* y *formas escalonadas reducidas por columnas*. La trasposición de matrices nos permite definir rápidamente estos conceptos:

- Una matriz se dice que es una **forma escalonada por columnas** si su traspuesta es una forma escalonada por filas.
- Una matriz se dice que es una **forma escalonada reducida por columnas** si su traspuesta es una forma escalonada reducida por filas.

Igualmente se puede comprobar que toda matriz puede ser transformada, mediante operaciones por columnas en una forma escalonada por columnas y en una forma escalonada reducida por columnas. Por último, dos matrices se dicen **equivalentes por columnas** si puede transformarse una en otra mediante operaciones elementales por columnas.

Obsérvese que las operaciones elementales por columnas **no transforman** la matriz de un sistema lineal en la matriz de otro sistema lineal equivalente.

**Teorema 2.5.1.** *Toda matriz  $A$  es equivalente por columnas a una única forma escalonada reducida por columnas.*

PRUEBA: Sabemos que la matriz  $A^t$  es equivalente por filas a una única forma escalonada reducida por filas.  $\square$

*Nota 2.5.2.* Sean los vectores columna de orden  $m \times 1$ ,  $e_i$ , que tienen todas sus entradas nulas salvo un 1 en la posición  $i$ , con  $i = 1, \dots, m$ . Obsérvese que la multiplicación de una matriz  $A_{m \times n}$  por un vector columna  $e_j$  resulta  $Ae_j = A_{*j}$ . Análogamente, si ahora  $e_i$  es de orden  $n \times 1$ , la multiplicación del traspuesto de éste con la matriz  $A$  resulta  $e_i^t A = A_{i*}$ .

Obsérvese que la matriz identidad tiene por columnas a estos  $e_j$  y por filas a  $e_i^t$ .

Vamos a ver que las operaciones elementales que usamos para la eliminación Gaussiana pueden interpretarse como productos por ciertas matrices de estructura muy sencilla.

### Matrices elementales de tipo I

Decimos que una matriz cuadrada  $E$  es elemental tipo I si se obtiene a partir de la matriz identidad  $I_n$  mediante una operación elemental por filas de tipo I. Es decir, si  $E$  se obtiene de  $I_n$  al intercambiar las filas  $i$  y  $j$ .

En este caso todas las entradas de la matriz  $E$  son nulas, salvo  $[E]_{kk} = 1$ ,  $k \neq i, j$ ,  $[E]_{ij} = 1$  y  $[E]_{ji} = 1$ . Si atendemos a las filas de  $E$  observamos que  $E_{k*} = e_k^t$  si  $k \neq i, j$ ,  $E_{i*} = e_j^t$  y  $E_{j*} = e_i^t$ .

**Proposición 2.5.2.** (MULTIPLICACIÓN POR UNA MATRIZ ELEMENTAL DE TIPO I).

- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo I a la izquierda de una matriz produce en ésta una operación elemental por filas de tipo I.*
- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo I a la derecha de una matriz produce en ésta una operación elemental por columnas de tipo I.*

PRUEBA: Basta probar el primer punto, pues el segundo, además de ser análogo, se deduce del primero por trasposición de matrices.

Sean entonces  $A_{m \times n}$  y  $E_{m \times m}$  la matriz obtenida de a identidad al intercambiar las filas  $i$  y  $j$ . Vamos a describir la multiplicación  $EA$  por filas, es decir,

$$[EA]_{k*} = E_{k*}A, \quad k = 1, \dots, m.$$

Si  $k \neq i, j$  sabemos que  $E_{k*} = e_k^t$ , de donde calculamos la fila  $k$ -ésima de  $EA$ :

$$[EA]_{k*} = E_{k*}A = e_k^t A = A_{k*}, \quad \text{con } k \neq i, j.$$

Además  $E_{i*} = e_j^t$  y  $E_{j*} = e_i^t$ . Luego las filas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima de  $EA$  son

$$[EA]_{i*} = E_{i*}A = e_j^t A = A_{j*} \quad \text{y} \quad [EA]_{j*} = E_{j*}A = e_i^t A = A_{i*}.$$

Es decir, la matriz  $EA$  es la que se obtiene de  $A$  al intercambiar las filas  $i$  y  $j$   $\square$

**Proposición 2.5.3.** Si  $E$  es una matriz elemental de tipo I entonces  $E$  es no singular y su inversa es ella misma. Es decir,  $EE = I$ .

PRUEBA: La demostración es consecuencia del resultado anterior. Si  $E$  es la matriz que se obtiene de la identidad al intercambiar las filas  $i$  y  $j$ , el producto a la izquierda de  $E$  por ella misma vuelve a intercambiar las filas  $i$  y  $j$ , obteniendo  $EE = I$ .  $\square$

### Matrices elementales de tipo II

Decimos que una matriz cuadrada  $E$  es elemental tipo II si se obtiene a partir de la matriz identidad  $I_n$  mediante una operación elemental por filas de tipo II. Es decir, si  $E$  se obtiene de  $I_n$  al sustituir la fila  $i$  por un múltiplo no nulo de ella.

En este caso todas las entradas de la matriz  $E$  son nulas, salvo  $[E]_{kk} = 1$ ,  $k \neq i$ ,  $[E]_{ii} = \alpha$  con  $\alpha \neq 0$ . Si atendemos a las filas de  $E$  observamos que  $E_{k*} = e_k^t$  si  $k \neq i$ ,  $E_{i*} = \alpha e_i^t$  con  $\alpha \neq 0$ .

**Proposición 2.5.4.** (MULTIPLICACIÓN POR UNA MATRIZ ELEMENTAL DE TIPO II).

- La multiplicación de una matriz elemental de tipo II a la izquierda de una matriz produce en ésta una operación elemental por filas de tipo II.
- La multiplicación de una matriz elemental de tipo II a la derecha de una matriz produce en ésta una operación elemental por columnas de tipo II.

**Ejercicio 2.5.1.** Dejamos la prueba de la proposición anterior como ejercicio.

**Proposición 2.5.5.** Si  $E$  es una matriz elemental de tipo II entonces  $E$  es no singular y su inversa es otra matriz elemental tipo II.

PRUEBA: Es fácil comprobar que si  $E$  es la matriz que se obtiene de la identidad al multiplicar la fila  $i$  por  $\alpha \neq 0$  entonces  $E^{-1}$  es la matriz que se obtiene de la identidad al multiplicar por  $1/\alpha$  la fila  $i$ .  $\square$

### Matrices elementales de tipo III

Decimos que una matriz cuadrada  $E$  es elemental tipo III si se obtiene a partir de la matriz identidad  $I_n$  mediante una operación elemental por filas de tipo III. Es decir, si  $E$  se obtiene de  $I_n$  al sustituir la fila  $j$  por la suma de ella misma con un múltiplo de la fila  $i$ .

En este caso todas las entradas de la matriz  $E$  son nulas, salvo  $[E]_{ii} = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  y  $[E]_{ji} = \alpha$ . Si atendemos a las filas de  $E$  observamos que  $E_{k*} = e_k^t$  si  $k \neq j$ ,  $E_{j*} = \alpha e_i^t + e_j^t$ .

**Proposición 2.5.6.** (MULTIPLICACIÓN POR UNA MATRIZ ELEMENTAL DE TIPO III).

- La multiplicación de una matriz elemental de tipo III a la izquierda de una matriz produce en ésta una operación elemental por filas de tipo III.
- La multiplicación de una matriz elemental de tipo III a la derecha de una matriz produce en ésta una operación elemental por columnas de tipo III.

**Ejercicio 2.5.2.** Dejamos la prueba de la proposición anterior como ejercicio.

**Proposición 2.5.7.** Si  $E$  es una matriz elemental de tipo III entonces  $E$  es no singular y su inversa es otra matriz elemental tipo III.

PRUEBA: Es fácil comprobar que si  $E$  es la matriz que se obtiene de la identidad al reemplazar la fila  $j$  por la suma de ella misma con la fila  $i$  por  $\alpha$ , entonces  $E^{-1}$  es la matriz que se obtiene de la identidad al reemplazar la fila  $j$  por la suma de ella misma con la fila  $i$  por  $-\alpha$ .  $\square$

**Ejemplo 2.5.1.** Consideremos la sucesión de operaciones para reducir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

a su forma escalonada reducida por filas  $E_A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Cambia } R_2 \text{ y } R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1 - 4R_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

La reducción se puede ver como una sucesión de multiplicaciones a izquierda por la matrices elementales correspondientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = E_A.$$

### Producto de matrices elementales

Una matriz  $A$  es no singular si y solamente si  $A$  es el producto de matrices elementales de tipos 1, 2, o 3.

PRUEBA: Si  $A$  es no singular, el método de Gauss-Jordan reduce  $A$  a la matriz  $I$  mediante operaciones por fila. Si  $E_1, E_2, \dots, E_k$  son las correspondientes matrices elementales, entonces

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I, \text{ o bien } A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, esto prueba que  $A$  se puede expresar como producto de matrices elementales.

Recíprocamente, si  $A = E_1 E_2 \cdots E_k$  es un producto de matrices elementales, entonces  $A$  es no singular, pues es el producto de matrices no singulares.  $\square$

### Equivalencia de matrices

- Cuando una matriz  $B$  se puede derivar de una matriz  $A$  mediante operaciones elementales de filas y columnas, escribiremos  $A \sim B$ , y diremos que  $A$  y  $B$  son **matrices equivalentes**. Otra forma de expresarlo es que

$$A \sim B \Leftrightarrow B = PAQ \text{ para matrices no singulares } P \text{ y } Q.$$

- Análogamente se define la **equivalencia por filas**:

$$A \overset{f}{\sim} B \Leftrightarrow B = PA \text{ para } P \text{ matriz no singular,}$$

y la **equivalencia por columnas**:

$$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow B = AQ \text{ para } Q \text{ matriz no singular.}$$

**Ejercicio 2.5.3.** Estas relaciones son de equivalencia.

La forma escalonada reducida por filas  $E_A$  es lo más lejos que podemos llegar mediante transformaciones por filas. Sin embargo, si permitimos además el uso de transformaciones por columnas, la reducción es mucho mayor.

### Forma normal de rango

Si  $A$  es una matriz de orden  $m \times n$  y  $\text{rango}(A) = r$ , entonces

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

$N_r$  se denomina **forma normal de rango** de  $A$ .

PRUEBA: Como  $A \overset{f}{\sim} E_A$ , existe una matriz no singular  $P$  tal que  $PA = E_A$ . Si  $\text{rango}(A) = r$ , entonces las columnas básicas de  $E_A$  son las  $r$  columnas unitarias. Mediante intercambio de columnas aplicados a  $E_A$ , podemos poner estas  $r$  columnas en la parte superior izquierda. Si  $Q_1$  es el producto de las matrices elementales que hacen estos intercambios, entonces

$$PAQ_1 = E_A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & J \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ahora multiplicamos ambos lados de esta ecuación por la matriz no singular

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & -J \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix},$$

y nos queda

$$PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Entonces  $A \sim N_r$ . □

*Nota 2.5.3.* De hecho  $N_r$  es la forma escalonada reducida por columnas de la forma escalonada reducida por filas de  $A$ .

*Ejemplo 2.5.2.* Veamos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \text{rango}(A) + \text{rango}(B).$$

Si  $\text{rango}(A) = r$  y  $\text{rango}(B) = s$ , entonces  $A \sim N_r$  y  $B \sim N_s$ , y

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_s \end{pmatrix},$$

de donde

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = r + s.$$

Dadas matrices  $A$  y  $B$ , ¿cómo decidimos si  $A \sim B$ ,  $A \stackrel{f}{\sim} B$  o  $A \stackrel{c}{\sim} B$ ?

### Test de equivalencia

Sean  $A$  y  $B$  matrices de orden  $m \times n$ . Entonces

- $A \sim B$  si y solamente si  $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$ .
- $A \stackrel{f}{\sim} B$  si y solamente si  $E_A = E_B$ .
- $A \stackrel{c}{\sim} B$  si y solamente si  $E_{A^t} = E_{B^t}$ .

En consecuencia, el producto por matrices no singulares no altera el rango.

**PRUEBA:** Si  $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$ , entonces  $A \sim N_r$  y  $B \sim N_r$ , de donde  $A \sim N_r \sim B$ . Recíprocamente, si  $A \sim B$ , y  $\text{rango}(A) = r$ ,  $\text{rango}(B) = s$ , tenemos que  $A \sim N_r$  y  $B \sim N_s$ , por lo que  $N_r \sim N_s$ , y esto implica que  $r = s$ .

Supongamos ahora que  $A \stackrel{f}{\sim} B$ . Como  $B \stackrel{f}{\sim} E_B$ , entonces  $A \stackrel{f}{\sim} E_B$ . Como la forma escalonada reducida por filas es única, se sigue que  $E_B = E_A$ . Recíprocamente, si  $E_A = E_B$ , entonces

$$A \stackrel{f}{\sim} E_A = E_B \stackrel{f}{\sim} B.$$

Para las columnas, basta considerar que

$$\begin{aligned} A \stackrel{c}{\sim} B &\Leftrightarrow AQ = B \Leftrightarrow (AQ)^t = B^t \\ &\Leftrightarrow Q^t A^t = B^t \Leftrightarrow A^t \stackrel{f}{\sim} B^t. \end{aligned}$$

□

### Rango y trasposición

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t) \text{ y } \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*).$$

PRUEBA: Sea  $\text{rango}(A) = r$ , y sean  $P$  y  $Q$  matrices no singulares tales que

$$PAQ = N_r = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

Entonces  $N_r^t = Q^t A^t P^t$ . Como  $Q^t$  y  $P^t$  son no singulares, se sigue que  $A^t \sim N_r^t$ , y entonces

$$\text{rango}(A^t) = \text{rango}(N_r^t) = \text{rango} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (m-r)} \end{pmatrix} = r = \text{rango}(A).$$

Para probar que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$ , escribimos  $N_r = \overline{N_r} = \overline{PAQ} = \overline{PAQ}$ . Es fácil ver que  $\overline{K}^{-1} = \overline{K}^{-1}$ , de donde  $N_r \sim \overline{A}$  y  $\text{rango}(A) = \text{rango}(\overline{A})$ . Entonces

$$\text{rango}(A^*) = \text{rango}(\overline{A}^t) = \text{rango}(\overline{A}) = \text{rango}(A).$$

□