Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Introducción

Estas notas están basadas en las realizadas por el profesor ***Manuel Jesús Gago Vargas*** para la asignatura *Métodos matemáticos: Álgebra lineal* de la *Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas*.

Un problema fundamental que aparece en matemáticas y en otras ciencias es el análisis y resolución de m ecuaciones algebraicas con n incógnitas. El estudio de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas está íntimimamente ligado al estudio de una matriz rectangular de números definida por los coeficientes de las ecuaciones. Esta relación parece que se ha notado desde el momento en que aparecieron estos problemas.

El primer análisis registrado de ecuaciones simultáneas lo encontramos en el libro chino *Jiu zhang Suan-shu* (*Nueve Capítulos sobre las artes matemáticas*), (véase McTutor y Carlos Maza) escrito alrededor del 200 a.C. Al comienzo del capítulo VIII, aparece un problema de la siguiente forma:

Tres gavillas de buen cereal, dos gavillas de cereal mediocre y una gavilla de cereal malo se venden por 39 dou. Dos gavillas de bueno, tres mediocres y una mala se venden por 34 dou. Y una buena, dos mediocres y tres malas se venden por 26 dou. ¿Cuál es el precio recibido por cada gavilla de buen cereal, cada gavilla de cereal mediocre, y cada gavilla de cereal malo?

Hoy en día, este problema lo formularíamos como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 39, \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34, \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26, \end{array}$$

donde x, y y z representan el precio de una gavilla de buen, mediocre y mal cereal, respectivamente. Los chinos vieron el problema esencial. Colocaron los coeficientes de este sistema, representados por cañas de bambú de color, como un cuadrado sobre un tablero de contar (similar a un ábaco), y manipulaban las filas del cuadrado según ciertas reglas establecidas. Su tablero de contar y sus reglas encontraron su camino hacia Japón y finalmente aparecieron en Europa, con las cañas de color sustituidas por números y el tablero reemplazado por tinta y papel.

En Europa, esta técnica llegó a ser conocida como *eliminación Gaussiana*, en honor del matemático alemán Carl F. Gauss.

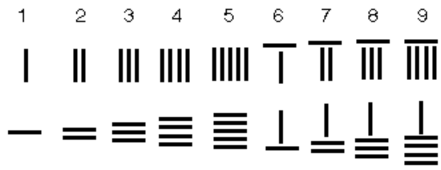

Figura 1.1: Numerales chinos con cañas de bambú

Figura 1.2: C.F. Gauss (1777-1855)

Como la técnica de eliminación es fundamental, empezamos el estudio de nuestra materia aprendiendo cómo aplicar este método para calcular las soluciones de los sistemas lineales. Después de que los aspectos computacionales se manejen bien, profundizaremos en cuestiones más teóricas.

1.2. Eliminación Gaussiana y matrices

Nota 1.2.1. En lo que sigue consideraremos fijado un cuerpo k de coeficientes. En el texto nos referiremos a los elementos del cuerpo como ***números*** o ***escalares***. El lector bien puede pensar que k es el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, $\mathbb{R}$ de los reales o incluso $\mathbb{C}$ de los complejos. Aunque debe tener en cuenta que todo lo dicho sobre sistemas de ecuaciones lineales y matrices es cierto en general para cualquier cuerpo k.

Definición 1.2.1. Sea $n \geq 1$ un número natural. Una ***ecuación lineal*** es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ y b son números conocidos y $x_1\ x_2,\ldots,\ x_n$ son incógnitas. Los números a_i se denominan ***coeficientes*** de la ecuación, mientras que b es el ***término independiente***.

Una ***solución*** de la ecuación lineal anterior es una serie de números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que la satisfacen, es decir, que verifican

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b.$$

Definición 1.2.2. Sean $m \geq 1$ y $n \geq 1$ números naturales. Un ***sistema lineal*** es un conjunto de m ecuaciones lineales y n incógnitas de la forma

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right.$$

donde las x_i son las incógnitas y los a_{ij}, b_i son números. Los números a_{ij} se denominan ***coeficientes*** del sistema, y el conjunto de los b_i ***términos independientes*** del sistema.

Una ***solución*** del sistema lineal anterior es una serie de números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ que satisface cada ecuación del sistema, es decir, que verifica

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

para $i = 1, \dots, n$.

Problema.- El problema es calcular, si es posible, una solución común a un sistema lineal como el anterior. Para estos sistemas, existen tres posibilidades:

- SOLUCIÓN ÚNICA : Existe uno y sólo un conjunto de valores para las incógnitas x_i que satisfacen las ecuaciones simultáneamente. Se dice entonces que el sistema es ***compatible determinado***. Por ejemplo el sistema formado por la única ecuación lineal $2x_1 = 3$ es compatible determinado, su única solución es $x_1 = 3/2$.

- INFINITAS SOLUCIONES : Existen infinitos conjuntos de valores para las incógnitas x_i que satisfacen las ecuaciones simultáneamente. No es difícil probar que si el sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas si k, el cuerpo de números, es infinito. En este caso se dice que el sistema lineal es ***compatible indeterminado***. Por ejemplo, el sistema formado por la ecuación lineal $2x_1 + x_2 = 3$ tiene como soluciones $x_1 = a,\ x_2 = 3 - 2a$, donde a es cualquier elemento de k, luego es compatible indeterminado.

- SIN SOLUCIÓN : No hay ningún conjunto de valores para las incógnitas x_i que satisfagan todas las ecuaciones simultáneamente. El conjunto de soluciones es vacío. Decimos que estos sistemas son ***incompatibles***. Por ejemplo, el sistema dado por las ecuaciones $2x_1 = 3,\ x_1 = 1$ es incompatible, pues no hay ningún valor de x_1 que satisfaga ambas ecuaciones.

Gran parte del trabajo acerca de los sistemas de ecuaciones es decidir cuál de estas tres posibilidades es la que se presenta. La otra parte de la tarea es calcular la solución si es única o describir el conjunto de soluciones si hay más de una.

Definición 1.2.3. Dos sistemas lineales con n incógnitas se dicen ***equivalentes*** si tienen los mismos conjuntos de soluciones.

Ejercicio 1.2.1. Dar un ejemplo de dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes con distinto número de ecuaciones.

La eliminación Gaussiana es una herramienta que nos permitirá tratar las dos primeras situaciones. Es un *algoritmo* que sistemáticamente transforma un sistema en otro más simple, pero ***equivalente***. La idea es llegar a un sistema lo más sencillo posible, eliminando variables, y obtener al final un sistema que sea fácilmente resoluble. Por ejemplo, uno triangular[1] para el caso $m = n$. El proceso de eliminación descansa sobre tres operaciones simples que transforman un sistema en otro equivalente. Para describir estas operaciones, sea E_k la k-ésima ecuación

$$E_k : a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

y escribamos el sistema como

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

Dado un sistema lineal $\mathcal{S}$, cada una de las siguientes ***transformaciones elementales*** produce un sistema equivalente $\mathcal{S}'$.

1. Intercambio de las ecuaciones i-ésima y j-ésima ($1 \leq i \leq j \leq m$). Esto es, si

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}, \text{ entonces } \mathcal{S}' \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

2. Reemplaza la i-ésima ecuación por un múltiplo no nulo de ella. Esto es,

$$\mathcal{S}' \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ \alpha E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}, \text{ donde } \alpha \neq 0.$$

3. Reemplaza la j-ésima ecuación por la suma de ella misma con un múltiplo de la i-ésima ecuación. Esto es,

$$\mathcal{S}' \equiv \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j + \alpha E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

[1] Por sistema ***triangular*** nos referimos a uno en el que, siendo $m = n$, se tiene que los coeficientes a_{ij} con $i > j$ son todos nulos. Tal y como ocurre al final del ejemplo 1.2.1

Ejercicio 1.2.2. Comprobar que estas operaciones no cambian el conjunto de soluciones. Es decir, que los sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son equivalentes.

El problema más común en la práctica es la resolución de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas, lo que se conoce como un ***sistema cuadrado***, con solución única. En este caso, la eliminación Gaussiana es directa, y más tarde estudiaremos las diferentes posibilidades. Lo que sigue es un ejemplo típico.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1, \\ 6x & + & 2y & + & z & = & -1, \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7. \end{array} \tag{1.2.1}$$

En cada paso, la estrategia es centrarse en una posición, llamada ***posición pivote***, y eliminar todos los términos por debajo de la posición usando las tres operaciones elementales. El coeficiente en la posición pivote se denomina ***pivote***, mientras que la ecuación en donde se encuentra el pivote se llama ***ecuación pivote***. Solamente se permiten números no nulos como pivotes. Si un coeficiente en una posición pivote es cero, entonces la ecuación pivote se intercambia con una ecuación por *debajo* para producir un pivote no nulo. Esto siempre es posible para sistemas cuadrados con solución única. A menos que sea cero, el primer coeficiente de la primera ecuación se toma como el primer pivote. Por ejemplo, el elemento $\boxed{2}$ del sistema es el pivote del primer paso:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{2}x & + & y & + & z & = & 1, \\ 6x & + & 2y & + & z & = & -1, \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7. \end{array}$$

Paso 1. Elimina todos los términos por debajo del pivote.

- Resta tres veces la primera ecuación de la segunda para generar el sistema equivalente

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{2}x & + & y & + & z & = & 1, & \\ & - & y & - & 2z & = & -4, & (E_2 - 3E_1) \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7. & \end{array}$$

- Suma la primera ecuación a la tercera para formar el sistema equivalente

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{2}x & + & y & + & z & = & 1, & \\ & - & y & - & 2z & = & -4, & \\ & & 3y & + & 2z & = & 8 & (E_3 + E_1). \end{array}$$

Paso 2. Selecciona un nuevo pivote.

- De momento, seleccionamos un nuevo pivote buscando para abajo y a la derecha. Más adelante veremos una mejor estrategia. Si este coeficiente no es cero, entonces es nuestro pivote. En otro caso, intercambiamos con una ecuación que esté por *debajo* de esta posición para colocar el elemento no nulo en la posición pivote. En nuestro ejemplo, -1 es el segundo pivote:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1, \\ & & \boxed{\text{-1}}y & - & 2z & = & -4, \\ & & 3y & + & 2z & = & 8. \end{array}$$

Paso 3. Elimina todos los términos por debajo del pivote.

- Suma tres veces la segunda ecuación a la tercera para llegar al sistema equivalente:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & y & + & z & = & 1, & \\ & & \boxed{\text{-1}}\,y & - & 2z & = & -4, & \\ & & & - & 4z & = & -4 & (E_3 + 3E_2). \end{array}$$

- En general, en cada paso nos movemos abajo y hacia la derecha para seleccionar el nuevo pivote, y entonces eliminar todos los términos por debajo de él hasta que ya no podamos seguir. En este ejemplo, el tercer pivote es -4, pero como ya no hay nada por debajo que eliminar, paramos el proceso.

En este punto, decimos que hemos ***triangularizado*** el sistema. Un sistema triangular se resuelve muy fácilmente mediante el método de ***sustitución hacia atrás***, en el que la última ecuación se resuelve para la última incógnita y se sustituye hacia atrás en la penúltima ecuación, la cual se vuelve a resolver para la penúltima incógnita, y continuamos así hasta llegar a la primera ecuación. En nuestro ejemplo, de la última ecuación obtenemos

$$z = 1.$$

Sustituimos $z = 1$ en la segunda ecuación, y tenemos

$$y = 4 - 2z = 4 - 2(1) = 2.$$

Por último, sustituimos $z = 1$ y $y = 2$ en la primera ecuación para obtener

$$x = \frac{1}{2}(1 - y - z) = \frac{1}{2}(1 - 2 - 1) = -1,$$

que completa la solución.

No hay razón para escribir los símbolos como x, y o z en cada paso, pues lo único que manejamos son los coeficientes. Si descartamos los símbolos, entonces el sistema de ecuaciones se reduce a una matriz rectangular de números en la que cada fila representa una ecuación. Por ejemplo, el sistema 1.2.1 se reduce a la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \text{ (las barras indican dónde aparece el signo } = .\text{)}$$

Matrices de un sistema lineal

Llamamos ***matriz de coeficientes*** del sistema lineal

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si aumentamos la matriz de coeficientes a la derecha con los términos independientes tenemos la ***matriz ampliada*** del sistema:

$$[A|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Nota 1.2.2. MATRICES. Un ***escalar*** es un elemento del cuerpo k, y una ***matriz*** es una disposición de escalares en rectángulo. Usaremos letras mayúsculas para las matrices y minúsculas con subíndice para las entradas individuales de la matriz. Así, escribiremos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

El primer subíndice de un elemento de la matriz indica la ***fila***, y el segundo subíndice denota la ***columna*** donde se encuentra. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 5 & -9 \\ -3 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \text{ entonces } a_{11} = 2, a_{12} = 1, \dots, a_{34} = 7. \quad (1.2.2)$$

Una ***submatriz*** de una matriz dada A es una matriz que se obtiene eliminando un conjunto de filas y columnas de A. Por ejemplo,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

es una submatriz de A porque B es el resultado de eliminar la segunda fila, y las columnas segunda y tercera de A.

Una matriz A se dice que tiene ***orden*** $m \times n$ cuando A tiene exactamente m filas y n columnas. La matriz A de (1.2.2) es una matriz 3×4. Por convenio, las matrices

1×1 se identifican con escalares, y al revés. Para enfatizar que una matriz A es de orden $m \times n$, usaremos la notación $A_{m \times n}$. Cuando $m = n$, es decir, cuando el número de filas y columnas coincide, diremos que la matriz es ***cuadrada***. En otro caso, la llamamos ***rectangular***. Las matrices que tienen una sola fila o una sola columna las llamaremos, respectivamente, ***vectores fila*** o ***vectores columna***.

El símbolo A_{i*} se usa para denotar la fila i-ésima, y A_{*j} para la j-ésima columna. Por ejemplo, si A es la matriz de (1.2.2), entonces

$$A_{2*} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & -9 \end{pmatrix} \text{ y } A_{*2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La eliminación Gaussiana se puede realizar sobre la matriz ampliada $[A|\boldsymbol{b}]$ mediante operaciones elementales sobre las filas de $[A|\boldsymbol{b}]$. Estas operaciones elementales de filas se corresponden a las tres operaciones elementales que hemos visto antes.

Operaciones elementales por filas

Para una matriz de orden $m \times n$ de la forma

$$M = \begin{pmatrix} M_{1*} \\ \vdots \\ M_{i*} \\ \vdots \\ M_{j*} \\ \vdots \\ M_{m*} \end{pmatrix},$$

los tres tipos de ***operaciones elementales de filas*** sobre M son como sigue.

- Tipo I. Intercambio de filas i y j para dar

$$\begin{pmatrix} M_{1*} \\ \vdots \\ M_{j*} \\ \vdots \\ M_{i*} \\ \vdots \\ M_{m*} \end{pmatrix}. \tag{1.2.3}$$

- Tipo II. Reemplazo de la fila i por un múltiplo no nulo de ella para dar

$$\begin{pmatrix} M_{1*} \\ \vdots \\ \alpha M_{i*} \\ \vdots \\ M_{m*} \end{pmatrix}, \text{ donde } \alpha \neq 0. \tag{1.2.4}$$

- Tipo III. Reemplazo de la fila j por la suma de ella con un múltiplo de la fila i, $i \neq j$, para dar

$$\begin{pmatrix} M_{1*} \\ \vdots \\ M_{i*} \\ \vdots \\ M_{j*} + \alpha M_{i*} \\ \vdots \\ M_{m*} \end{pmatrix}. \tag{1.2.5}$$

Definición 1.2.4. Dos matrices M y M' se dicen ***equivalentes por filas*** si puede transformarse una en otra mediante operaciones elementales por filas.

Ejercicio 1.2.3. A una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ podemos asociarle el siguiente sistema lineal homogéneo

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. ,$$

cuya matriz ampliada es $[A|\mathbf{0}]$. Comprobar que los sistemas lineales asociados a dos matrices equivalentes por filas son equivalentes.

Ejemplo 1.2.2. Para resolver el sistema del ejemplo 1.2.1 mediante operaciones elementales por fila, partimos de la matriz ampliada $M = (A|\boldsymbol{b})$ y triangularizamos la matriz de coeficientes A realizando la misma secuencia de operaciones por fila que se corresponden a las operaciones elementales realizadas sobre las ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} M_{2*} - 3M_{1*} \\ M_{3*} + M_{1*} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) M_{3*} + 3M_{2*}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

La matriz final representa el sistema triangular

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 1, \\ & - & y & - & 2z & = & -4, \\ & & & - & 4z & = & -4. \end{array}$$

que se resuelve por sustitución hacia atrás, como explicamos antes (ver ejemplo 1.2.1).

En general, si un sistema $n \times n$ se triangulariza a la forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} & c_1 \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} & c_n \end{array}\right) \tag{1.2.6}$$

en donde cada $t_{ii} \neq 0$ (no hay pivotes nulos), entonces el algoritmo general de sustitución hacia atrás es como sigue.

Algoritmo de sustitución hacia atrás

Determina los x_i de 1.2.6 mediante $x_n = c_n/t_{nn}$ y procede de manera recursiva calculando

$$x_i = \frac{1}{t_{ii}}(c_i - t_{i,i+1}x_{i+1} - t_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - t_{in}x_n)$$

para $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$.

1.3. Método de Gauss-Jordan

En esta sección introducimos una variante de la eliminación Gaussiana, conocida como método de Gauss-Jordan. Aunque hay confusión con respecto al nombre, este método fue usado por Wilhelm Jordan (1842-1899), profesor de geodesia alemán, y no por Camille Jordan (1838-1922), matemático francés de quien hablaremos más adelante.

Figura 1.3: Wilhelm Jordan (1842-1899)

Las características que distinguen el método de Gauss-Jordan de la eliminación Gaussiana son los siguientes:

- En cada paso, el elemento pivote tiene que ser 1.
- En cada paso, todos los términos por *encima* del pivote así como todos los que están por debajo deben ser anulados.

En otras palabras, si

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

es la matriz ampliada del sistema, entonces mediante operaciones elementales la reducimos a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_n \end{array}\right).$$

La solución aparece en la última columna ($x_i = s_i$), por lo que no es necesaria la sustitución hacia atrás.

Ejemplo 1.3.1. Apliquemos Gauss-Jordan al siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 4, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 6, \\ -2x_1 & - & 6x_2 & - & 7x_3 & = & -1. \end{array}$$

Sea R la matriz ampliada del sistema. La sucesión de operaciones se indican en cada paso, y se marca el pivote.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{2} & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right) \; R_{1*}/2 \; \to \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_{2*} - 2R_{1*} \\ R_{3*} + 2R_{1*} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right) \; -R_{2*} \; \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_{1*} - R_{2*} \\ \\ R_{3*} + 4R_{2*} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \; -R_{3*}/5 \; \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_{1*} - 4R_{3*} \\ R_{2*} + R_{3*} \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto, la solución es $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

1.4. Forma escalonada por filas y rango

Ya estamos preparados para analizar sistemas rectangulares con m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

donde m puede ser diferente de n. Si no sabemos con seguridad que m y n son iguales, entonces decimos que el sistema es ***rectangular***. El caso $m = n$ también queda comprendido en lo que digamos.

La primera tarea es extender la eliminación Gaussiana de sistemas cuadrados a sistemas rectangulares. Recordemos que para un sistema cuadrado de solución única, las posiciones pivote siempre se localizan a lo largo de la ***diagonal principal*** de la matriz de coeficientes A, por lo que la eliminación Gaussiana resulta en una reducción de A a una matriz ***triangular***, similar, para $n = 4$, a

$$T = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Recordemos que un pivote debe ser siempre un valor no nulo. Para sistemas cuadrados con una única solución, probaremos que siempre podremos obtener un valor no nulo en cada posición pivote a lo largo de la diagonal principal. Sin embargo, en el caso de un sistema rectangular general, no siempre es posible tener las posiciones pivote en la diagonal principal de la matriz de coeficientes. Esto significa que el resultado final de la eliminación Gaussiana *no* será una forma triangular. Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 5, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 4x_4 & + & 4x_5 & = & 6, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 5x_5 & = & 9, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 4x_4 & + & 7x_5 & = & 9. \end{array}$$

Fijemos nuestra atención en la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad (1.4.1)$$

e ignoremos de momento el lado derecho del sistema, es decir, los términos independientes. Aplicando eliminación Gaussiana a A obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{0} & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el proceso de eliminación básico, nos movemos abajo y a la derecha, a la siguiente posición pivote. Si encontramos un cero en esta posición, se efectúa un intercambio con una fila inferior para llevar un número no nulo a la posición pivote. Sin embargo, en este ejemplo, es imposible llevar un elemento no nulo a la posición $(2, 2)$ mediante el intercambio de la segunda fila con una fila inferior.

Para manejar esta situación, debemos modificar el procedimiento de la eliminación Gaussiana.

Eliminación Gaussiana modificada

Sea A una matriz, supongamos que U es la matriz obtenida a partir de A tras haber completado $i-1$ pasos de eliminación Gaussiana. Para ejecutar el i-ésimo paso, procedemos como sigue:

- De izquierda a derecha en U, localizamos la primera columna que contiene un valor no nulo en o por debajo de la i-ésima posición. Digamos que es U_{*j}.
- La posición pivote para el i-ésimo paso es la posición (i,j).
- Si es necesario, intercambia la i-ésima fila con una fila inferior para llevar un número no nulo a la posición (i,j), y entonces anula todas las entradas por debajo de este pivote.
- Si la fila U_{i*} así como todas las filas de U por debajo de U_{i*} consisten en filas nulas, entonces el proceso de eliminación está completo.

Ilustremos lo anterior aplicando la versión modificada de la eliminación Gaussiana a la matriz dada en 1.4.1

Ejemplo 1.4.1. Aplicamos la eliminación Gaussiana modificada a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

y marcamos las posiciones pivote.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que el resultado final de aplicar eliminación Gaussiana en el ejemplo anterior no es forma triangular exactamente, sino un tipo escalonado de forma triangular. De aquí en adelante, una matriz que muestre esta estructura la llamaremos ***forma escalonada por filas***.

Forma escalonada por filas

Una matriz E de orden $m \times n$ con filas E_{i*} y columnas E_{*j} se dice que está en ***forma escalonada por filas*** si se verifica lo siguiente.

- Si E_{i*} es una fila de ceros, entonces todas las filas por debajo de E_{i*} son también nulas.
- Si la primera entrada no nula de E_{i*} está en la j-ésima posición, entonces todas las entradas por debajo de la i-ésima posición en las columnas $E_{*1}, E_{*2}, \ldots, E_{*j}$ son nulas.

El algoritmo de la eliminación Gaussiana prueba el siguiente

Teorema 1.4.1. *Toda matriz es equivalente por filas a una forma escalonada por filas.*

Una estructura típica de una forma escalonada por filas, con los pivotes marcados, es

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los pivotes son las primeras entradas no nulas en cada fila. Podemos tener también columnas de ceros a la izquierda de la matriz.

Como hay flexibilidad para elegir las operaciones por filas que reducen una matriz A a una forma escalonada E, las entradas de E no están unívocamente determinadas por A. No obstante

Lema 1.4.2. *Sean $E = (e_{ij})$ una matriz en forma escalonada por filas de orden $m \times n$ y $\mathcal{S}$ el sistema de matriz ampliada $[E|\mathbf{0}]$, sea E_{*j} una columna de E donde no hay pivote. Entonces existe una solución del sistema $\mathcal{S}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tal que $\alpha_j \neq 0$ y $\alpha_k = 0 \forall k > j$.*

PRUEBA: Consideremos el conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, con $p_1 < p_2 \cdots < p_m$ de las columnas de E tales que en la columna p_i hay un pivote en la fila i, es decir, el elemento e_{ip_i} es un pivote. La columna $j-$ésima de E es de la forma

$$E_{*j} = \begin{pmatrix} e_{1j} \\ \vdots \\ erj \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

de manera que el pivote e_{rp_r} es tal que $p_r < j$, pues hemos supuesto por hipótesis que E_{*j} no tiene pivote.

Vamos a construir la solución $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ que pruebe el lema. Debe ser $\alpha_s = 0 \forall s > j$, por supuesto. Ahora, suponiendo que $s \leq j$ ponemos

$$\alpha_s = 0 \text{ si } E_{*s} \text{ es una columna sin pivote, es decir, } s \notin \{p_1, \dots, p_r\}.$$

Ponemos también

$$\alpha_j = 1.$$

Falta por asignar valores a $\alpha_{p_1}, \dots, \alpha_{p_r}$. Sustituyendo en el sistema de matriz ampliada $[E|\mathbf{0}]$ los valores que ya hemos construido, es decir, $x_j = 1$ y $x_s = 0$ si $s > j$ o bien $s \notin \{p_1, \dots, p_r\}$, nos queda el sistema triangular:

$$\mathcal{S}' \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} e_{1p_1}x_{p_1} & + & e_{1p_2}x_{p_2} & + & \cdots & + & e_{1p_r}x_{p_r} + e_{1j} = 0 \\ & & e_{2p_2}x_{p_2} & + & \cdots & + & e_{2p_r}x_{p_r} + e_{2j} = 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & e_{rp_r}x_{p_r} + e_{rj} = 0 \end{array} \right. .$$

Mediante el algoritmo de sustución hacia atrás se obtiene una solución del sistema $\mathcal{S}'$, pongamos

$$x_{p_k} = \alpha_{p_k}, \text{ con } k = 1, \dots, r.$$

De esta forma, $\alpha_1, \dots \alpha_n$ es una solución del sistema de matriz ampliada $[E|\mathbf{0}]$ tal que $\alpha_j \neq 0$, de hecho $\alpha_j = 1$, y $\alpha_k = 0\ \forall k > j$. □

Teorema 1.4.3. *Las posiciones de los pivotes de una forma escalonada por filas E asociada a una matriz A están completamente determinadas por las entradas de A.*

PRUEBA: Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$. Sean $U = (u_{ij})$ y $V = (v_{ij})$ dos formas escalonadas por filas obtenidas a partir de la matriz $A = (a_{ij})$. Hemos probado en el ejercicio 1.2.3 que los sistemas lineales $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$ de matrices ampliadas $[A|\mathbf{0}]$, $[U|\mathbf{0}]$ y $[V|\mathbf{0}]$ son equivalentes. En particular, los conjuntos de soluciones de los sistemas $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$ coinciden.

Llamaremos p_i a la calumna de U donde hay un pivote en la fila i, es decir, el elemento u_{ip_i} es un pivote. Análogamente llamamos q_i a la columna de V donde hay un pivote en la fila i.

Tenemos que probar que las posiciones pivote de U y V son las mismas. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que U y V no tienen las mismas posiciones pivote. Deduciremos entonces que los sistemas $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$ no son equivalentes, lo cual es una contradicción.

Sea i el índice de la primera fila de U y V donde la posición pivote no coincide, es decir, $p_r = q_r$ si $r < i$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $q_i > p_i$.

Entonces la columna V_{*p_i} no tiene pivote en V. Por el lema 1.4.2, existe una solución del sistema $\mathcal{S}_3$, pongamos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tal que $\alpha_{p_i} \neq 0$ y $\alpha_r = 0 \forall r > p_i$.

Sin embargo, la $i-$ésima ecuación de $\mathcal{S}_2$ es

$$\sum_{s=p_i}^{n} u_{is}x_s = 0.$$

De forma que. al sustituir los valores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en esta ecuación obtenemos el valor $u_{ip_i}\alpha_{p_i} \neq 0$. Luego no es solución de $\mathcal{S}_2$ y los sistemas no son equivalentes. □

Ejemplo 1.4.2. Ilustraremos con un ejemplo lo que hemos hecho en la prueba anterior. sean dos matrices escalonadas con posiciones pivote distintas

$$U = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las posiciones pivote de las filas 1 y 2 de ambas matrices coinciden. Sin embargo, el pivote de la tercera fila en U está en la posición $(3,4)$, mientras que en V está en $(3,5)$. Nos centraremos precisamente en la columna 4 de V para obtener una solución del sistema de matriz ampliada $[V|\mathbf{0}]$ que no lo sea del de matriz ampliada $[U|\mathbf{0}]$. Es evidente que los valores $x_1 = -3/2$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = x_7 = 0$ representan una solución del sistema definido por V. Sin embargo, al sustituir estos valores en la tercera ecuación del sistema definido por U

$$5x_4 - x_5 + 2x_6 = 0$$

obtenemos el valor $5 \neq 0$. Luego no es solución para el sistema definido por U.

Como las posiciones pivote son únicas, se sigue que el número de pivotes, que es el mismo que el número de filas no nulas de E, también está unívocamente determinado por A. Este número se denomina ***rango*** de A, y es uno de los conceptos fundamentales del curso.

Rango de una matriz

Supongamos que una matriz A de orden $m \times n$ se reduce mediante operaciones elementales por filas a una forma escalonada E. El ***rango*** de A es el número

$$\begin{aligned} \operatorname{rango}(A) &= \text{número de pivotes} \\ &= \text{número de filas no nulas de } E \\ &= \text{número de columnas básicas de } A, \end{aligned}$$

donde las columnas básicas de A son aquellas columnas de A que contienen las posiciones pivote.

Ejemplo 1.4.3. Determinemos el rango y columnas básicas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Reducimos A a forma escalonada por filas.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Por tanto, $\operatorname{rango}(A) = 2$. Las posiciones pivote están en la primera y cuarta columna, por lo que las columnas básicas de A son A_{*1} y A_{*4}. Esto es,

$$\text{Columnas básicas } = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es importante resaltar que las columnas básicas se extraen de A y no de la forma escalonada E.

1.5. Forma reducida por filas

En cada paso del método de Gauss-Jordan, forzábamos a que el pivote fuera 1, y entonces todas las entradas por encima y por debajo del pivote se anulaban mediante operaciones elementales. Si A es la matriz de coeficientes de un sistema cuadrado con solución única, entonces el resultado final de aplicar el método de Gauss-Jordan a A es una matriz con 1 en la diagonal y 0 en el resto. Esto es,

$$A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero si la técnica de Gauss-Jordan se aplica a matrices rectangulares $m \times n$, entonces el resultado final no es necesariamente como el descrito antes. El siguiente ejemplo ilustra qué ocurre en el caso rectangular.

Ejemplo 1.5.1. Aplicamos la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

y marcamos las posiciones pivote.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos este ejemplo con el resultado del ejemplo 1.4.1, y vemos que la forma de la matriz final es la misma en ambos casos, que tiene que ver con la unicidad de las posiciones de los pivotes que hemos comentado anteriormente. La única diferencia es el valor numérico de algunas entradas. Por la naturaleza de la eliminación de Gauss-Jordan, cada pivote es 1 y todas las entradas por encima y por debajo son nulas. Por tanto, la forma escalonada por filas que produce el método de Gauss-Jordan contiene un número reducido de entradas no nulas, por lo que parece natural llamarla ***forma escalonada reducida por filas***.

Forma escalonada reducida por filas

Una matriz $E_{m\times n}$ está en ***forma escalonada reducida por filas*** si se verifican las siguientes condiciones:

- E está en forma escalonada por filas.
- La primera entrada no nula de cada fila (el pivote) es 1.
- Todas las entradas por encima del pivote son cero.

Una estructura típica de una matriz en forma escalonada reducida por filas es

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como comentamos antes, si una matriz A se transforma en una forma escalonada por filas mediante operaciones elementales por fila, entonces la forma está unívocamente determinada por A, pero las entradas individuales de la forma no son únicas. Sin embargo

Teorema 1.5.1. *Toda matriz A es equivalente por filas a una única forma escalonada reducida por filas E_A.*

PRUEBA: Una forma escalonada reducida por filas de A se obtiene a partir de cualquier forma escalonada por filas de A mediante la aplicación del método de Gauss-Jordan como se ha visto antes, de ahí la existencia. Falta la unicidad.

Sean $U = (u_{ij})$ y $V = (v_{ij})$ dos formas escalonadas reducidas por filas asociadas a $A = (a_{ij})$. Hemos probado en el teorema 1.4.3 que las posiciones pivote de U y V coinciden. Como las columnas básicas de las formas escalonadas reducidas por filas están formadas por ceros, salvo un 1 en la posición pivote, el teorema 1.4.3 prueba que las columnas básicas de U y V coinciden.

Si una columna no básica de U, pongamos U_{*j}, es nula (formada sólo por ceros), debe serlo también la correspondiente columna V_{*j}. En caso contrario los valores

$$x_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

representan una solución del sistema de matriz ampliada $[U|\mathbf{0}]$ pero no del de $[V|\mathbf{0}]$.

Si una columna no básica de U es no nula, será de la forma

$$U_{*j} = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El teorema 1.4.3 prueba que la misma columna en V también debe ser de la forma

$$V_{*j} = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hay que probar entonces que $u_{ij} = v_{ij}$ para $i = 1, \ldots r$. Para ello usaremos que los sistemas $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$ definidos respectivamente por las matrices $[U|\mathbf{0}]$ y $[V|\mathbf{0}]$ son equivalentes.

Sea la siguiente familia de soluciones de $[U|\mathbf{0}]$

$$x_{i,s} = \begin{cases} -u_{ij} & \text{si } U_{*s} \text{ es una columna básica} \\ 1 & \text{si } s = j \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{1.5.1}$$

para $i = 1, \ldots, r$. Imponiendo que también sean soluciones de $\mathcal{S}_3$, concretamente al sustituir la solución $i-$ésima de la familia 1.5.1 en la ecuación $i-$ésima de $\mathcal{S}_3$ se obtiene

$$v_{ij} = u_{ij} \text{ para } i = 1, \ldots, r.$$

Luego las matrices U y V son idénticas. □

Notación

Para una matriz A, el símbolo E_A denotará la única forma escalonada reducida por filas derivada de A mediante operaciones por fila. También escribiremos

$$A \stackrel{\text{rref}}{\to} E_A.$$

Ejemplo 1.5.2. Determinemos E_A, calculemos $\operatorname{rango}(A)$ e identifiquemos las columnas básicas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A
$$

Por tanto, $\mathrm{rango}(A) = 3$, y $\{A_{*1}, A_{*3}, A_{*5}\}$ son las tres columnas básicas.

El ejemplo anterior ilustra otra importante característica de E_A, y explica por qué las columnas básicas reciben ese nombre. Cada columna no básica es expresable como combinación lineal de las columnas básicas. En el ejemplo,

$$A_{*2} = 2A_{*1}, A_{*4} = A_{*1} + A_{*3}. \tag{1.5.2}$$

Observemos que las mismas relaciones se tienen en E_A, esto es,

$$E_{*2} = 2E_{*1}, E_{*4} = E_{*1} + E_{*3}. \tag{1.5.3}$$

Esto no es una coincidencia, y ocurre en general. Hay algo más que observar. Las relaciones entre las columnas básicas y no básicas en una matriz general A no se ven a simple vista, pero las relaciones entre las columnas de E_A son completamente transparentes. Por ejemplo, los coeficientes usados en las relaciones 1.5.2 y 1.5.3 aparecen explícitamente en las dos columnas no básicas de E_A. Son precisamente las entradas no nulas en estas columnas no básicas. Esto es importante, porque usaremos E_A como un mapa o clave para revelar las relaciones ocultas entre las columnas de A.

Finalmente, observemos del ejemplo que únicamente las columnas básicas *a la izquierda* de una columna no básica dada se necesitan para expresar la columna no básica como combinación lineal de las columnas básicas. Así, la expresión de A_{*2} requiere únicamente de A_{*1}, y no de A_{*3} o A_{*5}, mientras que la expresión de A_{*4} precisa únicamente de A_{*1} y A_{*3}.

Relaciones de las columnas en A y E_A

- Cada columna no básica E_{*k} de E_A es una combinación lineal de las columnas básicas de E_A a la izquierda de E_{*k}. Esto es,

$$E_{*k} = \mu_1 E_{*b_1} + \mu_2 E_{*b_2} + \ldots + \mu_j E_{*b_j},$$

donde las E_{*b_i} son las columnas básicas a la izquierda de E_{*k}, y los coeficientes μ_j son las primeras j entradas de E_{*k}.

- Las relaciones que existen entre las columnas de A son exactamente las mismas relaciones que existen entre las columnas de E_A. En particular, si A_{*k} es una columna no básica de A, entonces

$$A_{*k} = \mu_1 A_{*b_1} + \mu_2 A_{*b_2} + \ldots + \mu_j A_{*b_j},$$

donde las A_{*b_i} son las columnas básicas de A situadas a la izquierda de A_{*k} y los coeficientes μ_j son los descritos antes.

***Ejercicio* 1.5.1.** Se deja como ejercicio probar lo afirmado en el recuadro anterior. Obsérvese que las combinaciones lineales de las columnas iguales a cero son precisamente soluciones del sistema lineal asociado a la matriz.

Lo que tenemos es una expresión de la forma

$$\begin{aligned} E_{*k} &= \mu_1 E_{*b_1} + \mu_2 E_{*b_2} + \ldots + \mu_j E_{*b_j} \\ &= \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \mu_j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

***Ejemplo* 1.5.3.** Escribamos las columnas no básicas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

como combinación lineal de las básicas. Para ello, calculamos la forma escalonada reducida por filas E_A.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 12 & -9 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Las columnas tercera y quinta son no básicas. Revisando las columnas de E_A, tenemos que

$$E_{*3} = 2E_{*1} + 3E_{*2} \text{ y } E_{*5} = 4E_{*1} + 2E_{*2} + \frac{1}{2}E_{*4}.$$

Las relaciones que existen entre las columnas de A son exactamente las mismas que las de E_A, esto es,

$$A_{*3} = 2A_{*1} + 3A_{*2} \text{ y } A_{*5} = 4A_{*1} + 2A_{*2} + \frac{1}{2}A_{*4}.$$

En resumen, la utilidad de E_A reside en su habilidad para revelar las dependencias entre los datos almacenados en la matriz A. Las columnas no básicas de A representan información redundante en el sentido de que esta información se puede expresar en términos de los datos contenidos en las columnas básicas.

Aunque la compresión de datos no es la razón primaria para introducir a E_A, la aplicación a estos problemas es clara. Para una gran matriz de datos, es más eficiente almacenar únicamente las columnas básicas de A con los coeficientes μ_j obtenidos de las columnas no básicas de E_A. Entonces los datos redundantes contenidos en las columnas no básicas de A siempre se pueden reconstruir cuando los necesitemos. Algo parecido ocurrirá cuando tratemos el problema de la colinealidad de datos.

1.6. Compatibilidad de los sistemas lineales. Teorema de Rouché-Frobenius

Recuérdese la siguiente clasificación de sistemas lineales vista en la página 3:

Definición 1.6.1. Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas se dice ***compatible*** si posee el menos una solución. Si no tiene soluciones, decimos que el sistema es ***incompatible***.
Un sistema lineal ***compatible*** se dice ***determinado*** si tiene una única solución, en otro caso se dice ***indeterminado***.

El propósito de esta sección es determinar las condiciones bajo las que un sistema es compatible.

Establecer dichas condiciones para un sistema de dos o tres incógnitas es fácil. Una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano, y una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en el espacio de tres dimensiones. Por tanto, un sistema lineal de m ecuaciones con dos incógnitas es compatible si y solamente si las m rectas definidas por las m ecuaciones tienen al menos un punto común de intersección. Lo mismo ocurre para m planos en el espacio. Sin embargo, para m grande, estas condiciones geométricas pueden ser difíciles de verificar visualmente, y cuando $n > 3$ no es posible esta representación tan visual.

Mejor que depender de la geometría para establecer la compatibilidad, usaremos la eliminación Gaussiana. Si la matriz ampliada asociada $[A|\boldsymbol{b}]$ se reduce mediante operaciones por filas a una forma escalonada por filas $[E|\boldsymbol{c}]$, entonces la compatibilidad o no del sistema es evidente. Supongamos que en un momento del proceso de reducción de $[A|\boldsymbol{b}]$ a $[E|\boldsymbol{c}]$ llegamos a una situación en la que la única entrada no nula de una fila aparece en el lado derecho, como mostramos a continuación:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{Fila } i \rightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \alpha \neq 0. \\ \\ \end{array}$$

Si esto ocurre en la i-ésima fila, entonces la i-ésima ecuación del sistema asociado es

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = \alpha.$$

Para $\alpha \neq 0$, esta ecuación no tiene solución, y el sistema original es incompatible (recordemos que las operaciones por filas no alteran el conjunto de soluciones). El recíproco también se verifica. Esto es, si el sistema es incompatible, entonces en algún momento del proceso de eliminación llegamos a una fila de la forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array} \right), \alpha \neq 0. \tag{1.6.1}$$

En otro caso, la sustitución hacia atrás se podría realizar y obtener una solución. No hay incompatibilidad si se llega a una fila de la forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Esta ecuación dice simplemente $0 = 0$, y aunque no ayuda a determinar el valor de ninguna incógnita, es verdadera.

Existen otras formas de caracterizar la compatibilidad (o incompatibilidad) de un sistema. Una es observando que si la última columna $\boldsymbol{b}$ de la matriz ampliada $[A|\boldsymbol{b}]$ es una columna no básica, entonces no puede haber un pivote en la última columna, y por tanto el sistema es compatible, porque la situación 1.6.1 no puede ocurrir. Recíprocamente, si el sistema es compatible, entonces la situación 1.6.1 no puede ocurrir, y en consecuencia la última columna no puede ser básica.

Proposición 1.6.1. $[A|\boldsymbol{b}]$ *es compatible si y solamente si* $\boldsymbol{b}$ *no es columna básica.*

Decir que $\boldsymbol{b}$ no es columna básica en $[A|\boldsymbol{b}]$ es equivalente a decir que todas las columnas básicas de $[A|\boldsymbol{b}]$ están en la matriz de coeficientes A. Como el número de columnas básicas es el rango, la compatibilidad puede ser caracterizada diciendo que un sistema es compatible si y sólo si $\operatorname{rango}([A|\boldsymbol{b}]) = \operatorname{rango}(A)$. Este enunciado en función del rango se conoce como ***teorema de Rouché-Frobenius***, del que más adelante daremos un anunciado algo más ampliado.

Recordemos que una columna no básica se puede expresar como combinación lineal de las columnas básicas. Como un sistema compatible se caracteriza porque el lado derecho $\boldsymbol{b}$ es una columna no básica, se sigue que un sistema es compatible si y sólo si $\boldsymbol{b}$ es una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes A.

Resumimos todas estas condiciones.

Compatibilidad

Cada uno de las siguientes enunciados es equivalente a que el sistema lineal determinado por la matriz $[A|\boldsymbol{b}]$ es compatible.

- En la reducción por filas de $[A|\boldsymbol{b}]$, nunca aparece una fila de la forma
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array}\right), \alpha \neq 0.$$
- $\boldsymbol{b}$ es una columna no básica de $[A|\boldsymbol{b}]$.
- $\operatorname{rango}([A|\boldsymbol{b}]) = \operatorname{rango}(A)$.
- $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.

Ejemplo 1.6.1. Determinemos si el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 2, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 6x_4 & + & 5x_5 & = & 3, \end{array}$$

es compatible. Aplicamos eliminación Gaussiana a la matriz ampliada $[A|\boldsymbol{b}]$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como no hay ninguna fila de la forma $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array}\right)$, con $\alpha \neq 0$, el sistema es compatible. También observamos que $\boldsymbol{b}$ no es una columna básica en $[A|\boldsymbol{b}]$, por lo que $\operatorname{rango}([A|\boldsymbol{b}]) = \operatorname{rango}(A)$. Los pivotes nos indican también que $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de A_{*1}, A_{*2} y A_{*5}. En concreto, como la forma escalonada reducida por filas es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

vemos que $\boldsymbol{b} = A_{*1} + A_{*2} - A_{*5}$.

Luego un sistema es compatible si y sólo si $\operatorname{rango}([A|\mathbf{b}]) = \operatorname{rango}(A)$. De hecho se puede decidir si un sistema compatible es ***determinado*** o ***indeterminado*** también en función del rango de la matriz de los coeficientes, tal y como se enuncia en el ***teorema de Rouché-Frobenius***.

Teorema de Rouché-Frobenius

Dado un sistema lineal con n incógnitas y matriz ampliada $[A|\mathbf{b}]$, se tiene:

- El sistema es ***incompatible*** si y sólo si $\text{rango}(A) < \text{rango}([A|\mathbf{b}])$.
- El sistema es ***compatible determinado*** si y sólo si $\text{rango}(A) = \text{rango}([A|\mathbf{b}]) = n$.
- El sistema es ***compatible indeterminado*** si y sólo si $\text{rango}(A) = \text{rango}([A|\mathbf{b}]) < n$.

En realidad hemos demostrado en esta sección que un sistema es compatible si y sólo si $\text{rango}(A) = \text{rango}([A|\mathbf{b}])$, falta por demostrar que es compatible determinado si y sólo si el rango de sus matrices es n (el número de incógnitas). Dedicaremos las siguientes dos secciones a expresar la solución general de un sistema lineal lo que, de paso, completará la prueba del teorema de Rouché-Frobenius (ver teorema 1.8.2).

1.7. Sistemas homogéneos

Definición 1.7.1. Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{array}$$

en el que el lado derecho contiene únicamente ceros se denomina ***homogéneo***. Si al menos uno de los coeficientes de la derecha es no nulo, decimos que es ***no homogéneo***.

En esta sección vamos a examinar algunas de las propiedades más elementales de los sistemas homogéneos.

La compatibilidad nunca es un problema con un sistema homogéneo, pues $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ siempre es una solución del sistema, independientemente de los coeficientes. Esta solución de denomina ***solución trivial***. La pregunta es si hay otras soluciones además de la trivial, y cómo podemos describirlas. Como antes, la eliminación Gaussiana nos dará la respuesta.

Mientras reducimos la matriz ampliada $[A|\mathbf{0}]$ de un sistema homogéneo a una forma escalonada mediante la eliminación Gaussiana, la columna de ceros de la derecha no se ve alterada por ninguna de las operaciones elementales. Así, cualquier forma escalonada derivada de $[A|\mathbf{0}]$ tendrá la forma $[E|\mathbf{0}]$. Esto significa que la columna de ceros puede ser eliminada a la hora de efectuar los cálculos. Simplemente reducimos la matriz A a una forma escalonada E, y recordamos que el lado derecho es cero cuando procedamos a la sustitución hacia atrás. El proceso se comprende mejor con un ejemplo.

Ejemplo 1.7.1. Vamos a examinar las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0. \end{array}$$

Reducimos la matriz de coeficientes a una forma escalonada por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E. \quad (1.7.1)$$

Entonces, el sistema homogéneo inicial es equivalente al sistema homogéneo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ & & & & -3x_3 & - & 3x_4 & = & 0. \end{array}$$

Como hay cuatro incógnitas, y solamente dos ecuaciones, es imposible extraer una solución única para cada incógnita. Lo mejor que podemos hacer es elegir dos incógnitas básicas, que llamaremos ***variables básicas***, y resolver el sistema en función de las otras dos, que llamaremos ***variables libres***. Aunque hay distintas posibilidades para escoger las variables básicas, el convenio es siempre resolver las incógnitas que se encuentran en las posiciones pivote.

En este ejemplo, los pivotes, así como las columnas básicas, están en la primera y tercera posición, así que la estrategia es aplicar sustitución hacia atrás en la resolución del sistema, y expresar las variables básicas x_1 y x_3 en función de las variables libres x_2 y x_4.

La segunda ecuación nos da

$$x_3 = -x_4$$

y la sustitución hacia atrás produce

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ & = & -2x_2 - 2(-x_4) - 3x_4 \\ & = & -2x_2 - x_4. \end{array}$$

Las soluciones al sistema homogéneo original pueden ser descritas como

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_2 - x_4, \\ x_2 & = & \text{libre }, \\ x_3 & = & -x_4, \\ x_4 & = & \text{libre.} \end{array}$$

Como las variables libres x_2 y x_4 pueden tomar todos los valores posibles, las expresiones anteriores describen todas las soluciones.

Mejor que describir las soluciones de esta forma, es más conveniente expresarlas como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

entendiendo que x_2 y x_4 son variables libres que pueden tomar cualquier valor. Esta representación se denominará ***solución general*** del sistema homogéneo. Esta expresión de la solución general enfatiza que cada solución es combinación lineal de las dos soluciones

$$\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora un sistema homogéneo general $[A|\mathbf{0}]$ de m ecuaciones y n incógnitas. Si la matriz de coeficientes A es de rango r, entonces, por lo que hemos visto antes, habrá r variables básicas, correspondientes a las posiciones de las columnas básicas de A, y $n-r$ variables libres, que se corresponden con las columnas no básicas de A. Mediante la reducción de A a una forma escalonada por filas por eliminación Gaussiana y sustitución hacia atrás, expresamos las variables básicas en función de las variables libres y obtenemos la ***solución general***, de la forma

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r},$$

donde $x_{f_1}, x_{f_2}, \ldots, x_{f_{n-r}}$ son las variables libres, y $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_{n-r}$ son vectores columna que representan soluciones particulares.

Si calculamos la forma escalonada reducida por filas del ejemplo, nos queda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A,$$

y el sistema a resolver es

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_4 & = & 0, \\ & & x_3 & + & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Si resolvemos x_1 y x_3 en función de x_2 y x_4 nos queda el mismo resultado que antes. Por ello, y para evitar la sustitución hacia atrás, puede resultar más conveniente usar Gauss-Jordan para calcular la forma escalonada reducida por filas E_A y construir directamente la solución general a partir de las entradas de E_A.

Una última pregunta que nos planteamos es cuándo la solución trivial de un sistema homogéneo es la única solución. Lo anterior nos muestra la respuesta. Si hay al menos una variable libre, entonces el sistema tendrá infinitas soluciones. Por tanto, la solución trivial será la única solución si y solamente si no hay variables libres, esto es, $n - r = 0$. Podemos reformular esto diciendo

Proposición 1.7.1. *Un sistema homogéneo de matriz A tiene únicamente la solución trivial si y solamente si* $\operatorname{rango}(A) = n$.

Ejemplo 1.7.2. El sistema homogéneo

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & 0, \end{array}$$

tiene solamente la solución trivial porque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E$$

prueba que $\operatorname{rango}(A) = 3 = n$. Se ve fácilmente que la aplicación de la sustitución hacia atrás desde $[E|\mathbf{0}]$ únicamente devuelve la solución trivial.

Ejemplo 1.7.3. Calculemos la solución general del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & = & 0. \end{array}$$

Se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E,$$

de donde $\operatorname{rango}(A) = 2 < n = 3$. Como las columnas básicas están en las posiciones uno y dos, x_1 y x_2 son las variables básicas, y x_3 es libre. Mediante sustitución hacia atrás en $[E|\mathbf{0}]$, nos queda $x_2 = -3x_3$ y $x_1 = -2x_2 - 2x_3 = 4x_3$, y la solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } x_3 \text{ es libre.}$$

1.8. Sistemas no homogéneos

Recordemos que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

es ***no homogéneo*** cuando $b_i \neq 0$ para algún i. A diferencia de los sistemas homogéneos, los no homogéneos pueden ser incompatibles y las técnicas que conocemos las aplicaremos para saber si una solución existe. A menos que se diga lo contrario, suponemos que los sistemas de esta sección son compatibles.

Para describir el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema no homogéneo compatible, vamos a construir una solución general de la misma forma que hicimos para los homogéneos.

- Usaremos eliminación Gaussiana para reducir la matriz ampliada $[A|\boldsymbol{b}]$ a una forma escalonada por filas $[E|\boldsymbol{c}]$.
- Identificaremos las variables básicas y las libres.
- Aplicaremos sustitución hacia atrás a $[E|\boldsymbol{c}]$ y resolveremos las variables básicas en función de las libres.

- Escribiremos el resultado en la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r},$$

donde $x_{f_1}, x_{f_2}, \ldots, x_{f_{n-r}}$ son las variables libres, y $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_{n-r}$ son vectores columna de orden n tales que $\boldsymbol{p}$ es una solución particular del sistema de matriz $[A|\boldsymbol{b}]$ y $x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}$ es la solución general del sistema homogéneo de matriz $[A|\boldsymbol{0}]$. Esta será la ***solución general*** del sistema no homogéneo.

Como las variables libres x_{f_i} recorren todos los posibles valores, la solución general genera todas las posibles soluciones del sistema $[A|\boldsymbol{b}]$. Como en el caso homogéneo, podemos reducir completamente $[A|\boldsymbol{b}]$ a $E_{[A|\boldsymbol{b}]}$ mediante Gauss-Jordan, y evitamos la sustitución hacia atrás.

Ejemplo 1.8.1. La diferencia entre la solución general de un sistema no homogéneo y la de uno homogéneo es la columna $\boldsymbol{p}$ que aparece. Para entender de dónde viene, consideremos el sistema no homogéneo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 7, \end{array}$$

en el que la matriz de coeficientes es la misma que la matriz de coeficientes de (1.7.1). Si $[A|\boldsymbol{b}]$ se reduce por Gauss-Jordan a $E_{[A|\boldsymbol{b}]}$, tenemos

$$[A|\boldsymbol{b}] \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E_{[A|\boldsymbol{b}]}.$$

Nos queda el sistema equivalente

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_4 & = & 2, \\ & & x_3 & + & x_4 & = & 1. \end{array}$$

Resolvemos las variables básicas, x_1 y x_3, en función de las libres, x_2 y x_4. Nos queda

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - 2x_2 - x_4, \\ x_2 & & \text{es libre}, \\ x_3 & = & 1 - x_4, \\ x_4 & & \text{es libre}. \end{array}$$

La solución general se sigue escribiendo estas ecuaciones en la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 1 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8.1)$$

La columna

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que aparece en (1.8.1) es una *solución particular* del sistema no homogéneo; se tiene cuando $x_2 = 0, x_4 = 0$.

Además, la solución general del sistema homogéneo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0, \end{array} \tag{1.8.2}$$

es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, la solución general del sistema homogéneo (1.8.2) es una parte de la solución general del sistema no homogéneo original (1.8.1).

Estas dos observaciones se pueden combinar diciendo que

Teorema 1.8.1. *La solución general del sistema no homogéneo viene dado por una solución particular más la solución general del sistema homogéneo asociado.*

PRUEBA: Supongamos que $[A|\boldsymbol{b}]$ representa un sistema $m \times n$ compatible, donde $\operatorname{rango}(A) = r$. La compatibilidad garantiza que $\boldsymbol{b}$ no es una columna básica de $[A|\boldsymbol{b}]$, por lo que las columnas básicas de $[A|\boldsymbol{b}]$ están en la misma posición que las columnas básicas de $[A|\boldsymbol{0}]$. Esto significa que el sistema no homogéneo y el sistema homogéneo asociado tienen exactamente el mismo conjunto de variables básicas así como de libres. Además, no es difícil ver que

$$E_{[A|\boldsymbol{0}]} = [E_A|\boldsymbol{0}] \text{ y } E_{[A|\boldsymbol{b}]} = [E_A|\boldsymbol{c}],$$

donde $\boldsymbol{c}$ es una columna de la forma

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que si resolvemos la i-ésima ecuación en el sistema homogéneo reducido para la i-ésima variable básica x_{b_i} en función de las variables libres $x_{f_1}, x_{f_2}, \ldots, x_{f_{n-r}}$ para dar

$$x_{b_i} = \alpha_i x_{f_i} + \alpha_{i+1} x_{f_{i+1}} + \ldots + \alpha_{n-r} x_{f_{n-r}},$$

entonces la solución de la i-ésima variable básica en el sistema **no homogéneo** reducido debe tener la forma

$$x_{b_i} = \xi_i + \alpha_i x_{f_i} + \alpha_{i+1} x_{f_{i+1}} + \ldots + \alpha_{n-r} x_{f_{n-r}}.$$

Esto es, las dos soluciones se diferencian únicamente en la presencia de la constante ξ_i en la última. Si organizamos como columnas las expresiones anteriores, podemos decir que si la solución general del sistema homogéneo es de la forma

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1} \boldsymbol{h}_1 + x_{f_2} \boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}} \boldsymbol{h}_{n-r},$$

entonces la solución general del sistema no homogéneo tiene la forma similar

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r},$$

donde la columna $\boldsymbol{p}$ contiene las constantes ξ_i junto con ceros. $\square$

Ejemplo 1.8.2. Calculemos la solución general del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 2, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 6x_4 & + & 5x_5 & = & 3, \end{array}$$

y la comparamos con la solución general del sistema homogéneo asociado.

En primer lugar, calculamos la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada $[A|\boldsymbol{b}]$.

$$\begin{array}{rcl} [A|\boldsymbol{b}] & = & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \\ & \to & \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ & \to & \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E_{[A|\boldsymbol{b}]}. \end{array}$$

El sistema es compatible, pues la última columna es no básica. Resolvemos el sistema reducido para las variables básicas x_1, x_2, x_5 en función de las variables libres x_3, x_4 para obtener

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - x_3 - 2x_4, \\ x_2 & = & 1 - x_3, \\ x_3 & & \text{es libre }, \\ x_4 & & \text{es libre }, \\ x_5 & = & -1. \end{array}$$

La solución general del sistema no homogéneo es

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_3 - 2x_4 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema homogéneo asociado es

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora volvemos a la pregunta *"¿Cuándo un sistema compatible tiene solución única?"*. Sabemos que la solución general de un sistema no homogéneo compatible de orden $m \times n$, con rango r, es de la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r},$$

donde

$$x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}$$

es la solución general del sistema homogéneo asociado. Por tanto

Teorema 1.8.2. *Un sistema **compatible** de matriz ampliada $[A|\boldsymbol{b}]$ tendrá una única solución si y solamente si no hay variables libres, esto es, si y solamente si $\operatorname{rango}(A) = n$. Esto es lo mismo que decir que el sistema homogéneo asociado $[A|\boldsymbol{0}]$ tiene únicamente la solución trivial.*

Ejemplo 1.8.3. Consideremos el siguiente sistema no homogéneo:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 2, \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1, \\
x_1 & & & + & x_3 & = & -3, \\
2x_1 & + & 4x_2 & & & = & 8.
\end{array}$$

La forma escalonada reducida por filas de $[A|\boldsymbol{b}]$ es

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E_{[A|\boldsymbol{b}]}.$$

El sistema es compatible porque la última columna no es básica, o bien porque $\operatorname{rango}(A) = 3 =$ número de incógnitas (no hay variables libres). El sistema homogéneo asociado tiene únicamente la solución trivial, y la solución del sistema es

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resumen

Sea $[A|\boldsymbol{b}]$ la matriz ampliada de un sistema no homogéneo compatible, de orden $m \times n$, con $\operatorname{rango}(A) = r$.

- Mediante la reducción de $[A|\boldsymbol{b}]$ a una forma escalonada usando la eliminación Gaussiana, resolvemos las variables básicas en función de las libres y llegamos a que la ***solución general*** del sistema es de la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}.$$

- La columna $\boldsymbol{p}$ es una solución particular del sistema no homogéneo.
- La expresión

$$x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}$$

es la solución general del sistema homogéneo asociado.