Capítulo 2

Álgebra matricial

Estas notas están basadas en las realizadas por el profesor ***Manuel Jesús Gago Vargas*** para la asignatura *Métodos matemáticos: Álgebra lineal* de la *Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas*.

2.1. Adición y trasposición

Nota 2.1.1. Como en el anterior tema, consideraremos fijado un cuerpo k de coeficientes. Nos referiremos a los elementos del cuerpo como ***números*** o ***escalares***.

Alguna de las definiciones de este tema serán específicas para el caso en que k es el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. En ese caso se advertirá específicamente.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son ***iguales*** cuando A y B tienen el mismo orden y las entradas correspondientes son iguales.

Si es necesario pondremos el orden de la matriz como subíndice. Así escribiremos $A_{m\times n}$ para indicar que la matriz A es de orden $m \times n$.

Denotaremos también $[A]_{ij}$ a entrada de la fila i y la columna j en la matriz A.

Suma de matrices

Si A y B son matrices de orden $m \times n$, la suma de A y B se define como la matriz de orden $m \times n$ notada por $A + B$, cuyas entradas verifican

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \text{ para cada } i, j.$$

La matriz $-A$, llamada ***opuesta*** de A, se define como

$$[-A]_{ij} = -[A]_{ij}.$$

La ***diferencia*** de A y B es

$$A - B = A + (-B).$$

Propiedades de la suma de matrices

Sean A, B y C matrices de orden $m \times n$. Se verifican las siguientes propiedades:

- $A + B$ es una matriz de orden $m \times n$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + B = B + A$.
- La matriz $\mathbf{0}_{m\times n}$ que tiene todas sus entradas nulas verifica $A + \mathbf{0} = A$.
- La matriz $-A$ es de orden $m \times n$ y verifica $A + (-A) = \mathbf{0}$.

Multiplicación por un escalar

El producto de un escalar α por una matriz A de orden $m \times n$, notada por αA, se define como la matriz de orden $m \times n$ que verifica

$$[\alpha A]_{ij} = \alpha[A]_{ij}.$$

Propiedades de la multiplicación por un escalar

Sean A, B matrices de orden $m \times n$, y α, β escalares.

- αA es una matriz $m \times n$.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $1A = A$.

Se tienen propiedades análogas para $A\alpha = \alpha A$.

Trasposición

La traspuesta de una matriz $A_{m\times n}$ es la matriz notada por A^t de orden $n \times m$ definida como

$$[A^t]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Es evidente que $(A^t)^t = A$.

Para el caso en que $k = \mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos, definimos dos operaciones más. Recuérdese que el ***conjugado*** de un número complejo $\alpha = a + ib$ es $\overline{\alpha} = a - ib$.

Conjugada traspuesta

La matriz ***conjugada*** de una matriz $A_{m\times n}$ es la matriz de orden $m \times n$ notada por $\overline{A}$ definida como

$$[\overline{A}]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}.$$

La matriz ***conjugada traspuesta*** de una matriz $A_{m\times n}$ es la matriz de orden $n \times m$ notada por A^* y definida como

$$[A^*]_{ij} = \overline{[A]_{ji}}.$$

Es decir, $A^* = \overline{A}^t$.

Nota 2.1.2. Se tiene que $(A^*)^* = A$. En el caso de matrices **reales**, cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{R}$, se tiene que $\overline{A} = A$ y $A^* = A^t$.

Propiedades de la matriz traspuesta

Sean A y B matrices del mismo orden y α un escalar. Entonces

- $(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ y $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

Simetrías

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada.

- Decimos que A es ***simétrica*** si $A = A^t$, esto es, $a_{ij} = a_{ji}$.
- Decimos que A es ***anti-simétrica*** si $A = -A^t$, esto es, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Si además A es una matriz **compleja**:

- Decimos que A es ***hermitiana*** si $A = A^*$, esto es, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
- Decimos que A es ***anti-hermitiana*** si $A = -A^*$, esto es, $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$.

Ejercicio 2.1.1. Probar que si A es una matriz hermitiana entonces las entradas de la diagonal, $[A]_{ii}$, son números reales.

2.2. Multiplicación de matrices

Multiplicación de matrices

- Dos matrices A y B se dicen ***ajustadas*** para multiplicación en el orden AB cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B, esto es, si A es de orden $m \times p$ y B es de orden $p \times n$.
- Para matrices ajustadas $A_{m\times p} = (a_{ij})$ y $B_{p\times n} = (b_{ij})$, la ***matriz producto*** AB, de orden $m \times n$, se define como

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Nota 2.2.1. Puede ocurrir dos matrices A y B estén ajustadas para la multiplicación en el orden AB pero no en el orden BA. Es decir, que exista el producto AB, pero que no BA.

Ejemplo 2.2.1. (LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES **NO ES CONMUTATIVA**). Considere lo que ocurre al tomar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y calcular AB y BA. Ni siquiera son matrices del mismo orden.

Pero aunque fueran matrices cuadradas el producto no es conmutativo en general. Sean las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces CD y DC son distintas.

Filas y columnas de un producto

Supongamos que $A_{m\times p} = (a_{ij})$ y $B_{p\times n} = (b_{ij})$.

- $[AB]_{i*} = A_{i*}B$; esto es, la i-ésima fila de AB es la i-esima fila de A multiplicada por B.
- $[AB]_{*j} = AB_{*j}$; esto es, la j-ésima fila de AB es A multiplicada por la j-ésima fila de B.
- $[AB]_{i*} = a_{i1}B_{1*} + a_{i2}B_{2*} + \ldots + a_{ip}B_{p*} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}B_{k*}$.
- $[AB]_{*j} = A_{*1}b_{1j} + A_{*2}b_{2j} + \ldots + A_{*p}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} A_{*k}b_{kj}$.

Nota 2.2.2. Las dos últimas ecuaciones indican que las filas de AB son combinación lineal de las filas de B, y que las columnas de AB son combinación lineal de las columnas de A.

Sistemas lineales

Todo sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right.$$

se puede escribir en forma matricial como $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, toda ecuación matricial $A_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{m\times 1}$ representa un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas.

2.3. Propiedades de la multiplicación matricial

Propiedades distributiva y asociativa

Para matrices ajustadas se verifica

- $A(B+C) = AB + AC$.
- $(D+E)F = DF + EF$.
- $A(BC) = (AB)C$.

Matriz identidad

La matriz de orden $n \times n$ con unos en la diagonal y ceros en el resto

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se denomina ***matriz identidad*** de orden n. Para toda matriz A de orden $m \times n$ se verifica

$$AI_n = A \text{ y } I_m A = A.$$

Nota 2.3.1. El subíndice de I_n se elimina cuando el tamaño es obvio por el contexto.

Trasposición y producto

Para matrices ajustadas A y B se verifica que

$$(AB)^t = B^t A^t$$

y

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Ejercicio 2.3.1. Probar las propiedades anteriores.

Nota 2.3.2. Para cada matriz $A_{m\times n}$

- las matrices AA^t y A^tA son simétricas, y
- si A es una matriz compleja, las matrices AA^* y A^*A son hermitianas.

Ejercicio 2.3.2. Llamamos ***traza*** de A al número

$$\operatorname{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{bm} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Probar que para dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{n\times m}$ se verifica

$$\operatorname{traza}(AB) = \operatorname{traza}(BA).$$

Nota 2.3.3. De lo anterior se deduce que $\operatorname{traza}(ABC) = \operatorname{traza}(BCA) = \operatorname{traza}(CAB)$, pero, en general, $\operatorname{traza}(ABC) \neq \operatorname{traza}(BAC)$.

Multiplicación por bloques

Supongamos que A y B se particionan en submatrices, también llamados bloques, como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \ldots & B_{rt} \end{pmatrix}.$$

Si los pares (A_{ik}, B_{kj}) son ajustados para el producto, entonces decimos que A y B tienen una ***partición ajustada***. Para tales matrices, el producto AB se forma combinando los bloques exactamente de la misma forma como se hace con los escalares en la multiplicación ordinaria. Esto es, el bloque (i, j) en AB es

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ir}B_{rj}.$$

Ejemplo 2.3.1. Consideremos las matrices particionadas

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C & I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix}, B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & C \end{pmatrix},$$

donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mediante la multiplicación por bloques, el producto AB es fácil de obtener:

$$AB = \begin{pmatrix} C & I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C & C \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2.4. Inversa de una matriz

Inversa de una matriz

Para una matriz cuadrada $A_{n\times n}$, la matriz $B_{n\times n}$ que verifica las condiciones

$$AB = I_n \text{ y } BA = I_n$$

se denomina ***inversa*** de A, y la denotaremos por $B = A^{-1}$. No todas la matrices cuadradas tienen inversa. Una matriz cuadrada sin inversa se llama ***singular***, y una matriz con inversa se denomina ***no singular*** o ***regular***.

Proposición 2.4.1. *La inversia de una matriz, si existe, es única.*

PRUEBA: Supongamos que X_1 y X_2 son inversas de una matriz no singular A. Entonces

$$X_1 = X_1 I = X_1(AX_2) = (X_1 A)X_2 = IX_2 = X_2.$$

□

Ecuaciones matriciales

- Si A es una matriz no singular, entonces existe una única solución para X en la ecuación matricial $A_{n\times n}X_{n\times p} = B_{n\times p}$, y la solución es
$$X = A^{-1}B.$$
- Un sistema de n ecuaciones y n incógnitas se puede escribir como una ecuación matricial $A_{n\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{n\times 1}$. Por lo anterior, si A es no singular, el sistema tiene solución única igual a $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Nota 2.4.1. Sin embargo, debemos hacer hincapié en que la representación de la solución como $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ es conveniente desde el punto de vista teórico o de notación. En la práctica, un sistema no singular $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ***nunca*** se resuelve calculando A^{-1} y después el producto $A^{-1}\boldsymbol{b}$. Se realizan más operaciones así que aplicando las técnicas de eliminación descritas en el tema anterior.

El siguiente resultado nos permite distinguir entre matrices singulares y no singulares.

Existencia de inversa

Para una matriz cuadrada A de orden n, son equivalentes:

1. A^{-1} existe (A es no singular).
2. $\text{rango}(A) = n$.
3. $A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} I_n$.
4. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ implica que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

PRUEBA: El hecho de $2) \Leftrightarrow 3)$ es una consecuencia directa de la definición de rango. La equivalencia $2) \Leftrightarrow 4)$ la hemos visto en el tema anterior. Solamente falta por establecer $1) \Leftrightarrow 2)$ para completar la prueba.

$1) \Rightarrow 2)$. Consideremos la matriz $X = \begin{pmatrix} X_{*1} & X_{*2} & \dots & X_{*n} \end{pmatrix}$. Esta matriz X verifica la ecuación $AX = I$ si y solamente si X_{*j} es solución del sistema $A\boldsymbol{x} = I_{*j}$. Si A es no singular, entonces sabemos que existe una solución única de $AX = I$, y por tanto cada sistema $A\boldsymbol{x} = I_{*j}$ tiene solución única. Pero sabemos que un sistema tiene solución única si y solamente si el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas, esto es, $\text{rango}(A) = n$.

$2) \Rightarrow 1)$. Si $\text{rango}(A) = n$, entonces cada sistema $A\boldsymbol{x} = I_{*j}$ es compatible, porque $\text{rango}([A|I_{*j}]) = n = \text{rango}(A)$. Además, la solución es única, por lo que la ecuación matricial $AX = I$ tiene una única solución. Nos gustaría decir ya que $X = A^{-1}$, pero nos hace falta primero probar que $XA = I$. Supongamos que no es cierto, esto es, $XA - I \neq \mathbf{0}$. Como

$$A(XA - I) = AXA - A = IA - A = \mathbf{0},$$

se sigue que cada columna no nula de $XA - I$ es una solución no trivial del sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Pero esto es una contradicción. Por tanto, $XA - I = \mathbf{0}$, y $XA = AX = I$. □

Nota 2.4.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA USANDO GAUSS-JORDAN. En la demostración anterior hemos probado además que si $A_{n\times n}$ es una matriz para la que existe $X_{n\times n}$ con $AX = I_n$, entonces $X = A^{-1}$.

Para construir un algoritmo que nos devuelva A^{-1} cuando $A_{n\times n}$ es no singular, recordemos que determinar A^{-1} es equivalente a resolver la ecuación matricial $AX = I$, que es lo mismo que resolver los n sistemas de ecuaciones definidos por

$$A\boldsymbol{x} = I_{*j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

En otras palabras, si $X_{*1}, X_{*2}, \dots, X_{*n}$ son las respectivas soluciones, entonces $X = \begin{pmatrix} X_{*1} & X_{*2} & \dots & X_{*n} \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $AX = I$ y de aquí $X = A^{-1}$.

Si A es no singular, el método de Gauss-Jordan reduce la matriz ampliada $[A|I_{*j}]$ a $[I|X_{*j}]$, y sabemos que X_{*j} es la única solución de $A\boldsymbol{x} = I_{*j}$. En otras palabras,

$$[A|I_{*j}] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|[A^{-1}]_{*j}].$$

Pero mejor que resolver cada sistema $A\boldsymbol{x} = I_{*j}$ de forma independiente, podemos resolverlos simultáneamente aprovechando que todos tienen la misma matriz de coeficientes. En otras palabras, si aplicamos Gauss-Jordan a la matriz ampliada $[A|I_{*1}|I_{*2}|\dots|I_{*n}]$ obtenemos

$$[A|I_{*1}|I_{*2}|\dots|I_{*n}] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|[A^{-1}]_{*1}|[A^{-1}]_{*2}|\dots|[A^{-1}]_{*n}],$$

o, de manera más compacta,

$$[A|I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|A^{-1}].$$

¿Qué ocurre si intentamos invertir una ***matriz singular*** con este procedimiento? El resultado anterior nos indica que una matriz singular A no puede ser reducida mediante Gauss-Jordan a la matriz I porque una fila de ceros aparecerá en algún momento. Por ello, no tenemos que saber a priori si la matriz que tenemos es o no singular, pues resultará evidente en el proceso de cálculo.

Cálculo de la inversa

La eliminación de Gauss-Jordan se puede usar para el cálculo de la inversa de una matriz A mediante la reducción

$$[A|I] \xrightarrow{Gauss-Jordan} [I|A^{-1}].$$

La única posibilidad de que este método falle esque aparezca una fila de ceros en el lado izquierdo de la matriz ampliada, y esto ocurre si y solamente si la matriz A es singular.

Ejemplo 2.4.1. Calculemos, si existe, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener

$$[A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto , la matriz es no singular y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propiedades de la inversión de matrices

Para matrices no singulares A y B, se verifica que

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- El producto AB es no singular.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ y, si A es compleja, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

PRUEBA: La primera es inmediata. La segunda y la tercera se prueban simultáneamente. Sea $X = B^{-1}A^{-1}$. Entonces $(AB)X = I$, y como son matrices cuadradas, tenemos que $X = (AB)^{-1}$. La última propiedad tiene un tratamiento similar. Sea $X = (A^{-1})^t$, que sabemos que existe (observemos que todavía no podemos garantizar el carácter no singular de A^t). Entonces

$$A^t X = A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I,$$

de donde A^t es no singular y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. La prueba de la segunda parte es similar.
$\square$

2.5. Matrices elementales y equivalencia

Nota 2.5.1. OPERACIONES ELEMENTALES POR COLUMNAS. Es evidente que las mismas operaciones elementales por filas descritas en el tema anterior pueden realizarse por columnas. Tenemos entonces tres tipos de operaciones análogas a las operaciones elementales por filas:

- **Tipo I.** Intercambiar las columnas i y j.
- **Tipo II.** Reemplazar la columna i por un múltiplo no nulo de ella misma.
- **Tipo III.** Reemplazar la columna j por la suma de ella misma con un múltiplo de la columna j.

Análogamente a lo visto para las filas existen unas matrices especiales llamadas *formas escalonadas por columnas* y *formas escalonadas reducidas por columnas*. La trasposición de matrices nos permite definir rápidamente estos conceptos:

- Una matriz se dice que es una ***forma escalonada por columnas*** si su traspuesta es una forma escalonada por filas.
- Una matriz se dice que es una ***forma escalonada reducida por columnas*** si su traspuesta es una forma escalonada reducida por filas.

Igualmente se puede comprobar que toda matriz puede ser transformada. mediante operaciones por columnas en una forma escalonada por columnas y en una forma escalonada reducida por columnas. Por último, dos matrices se dicen ***equivalentes por columnas*** si puede transformarse una en otra mediante operaciones elementales por columnas.

Obsérvese que las operaciones elementales por columnas ***no transforman*** la matriz de un sistema lineal en la matriz de otros sistema lineal equivalente.

Teorema 2.5.1. *Toda matriz A es equivalente por columnas a* **una única** *forma escalonada reducida por columnas.*

PRUEBA: Sabemos que la matriz A^t es equivalente por filas a una única forma escalonada reducida por filas. □

Nota 2.5.2. Sean los vectores columna de orden $m \times 1$, $\boldsymbol{e}_i$, que tienen todas sus entradas nulas salvo un 1 en la posición i, con $i = 1, \ldots, m$. Obsérvese que la multiplicación de una matriz $A_{m\times n}$ por un vector columna $\boldsymbol{e}_j$ resulta $A\boldsymbol{e}_j = A_{*j}$. Análogamente, si ahora $\boldsymbol{e}_i$ es de orden $n \times 1$, la múltiplicación del traspuesto de éste con la matriz A resulta $\boldsymbol{e}_i^t A = A_{i*}$.

Obsérvese que la matriz identidad tiene por columnas a estos $\boldsymbol{e}_j$ y por filas a $\boldsymbol{e}_i^t$.

Vamos a ver que las operaciones elementales que usamos para la eliminación Gaussiana pueden interpretarse como productos por ciertas matrices de estructura muy sencilla.

Matrices elementales de tipo I

Decimos que una matriz cuadrada E es elemental tipo I si se obtiene a partir de la matriz identidad $I_n$mediante una operación elemental por filas de tipo I. Es decir, si E se obtiene de I_n al intercambiar las filas i y j.
En este caso todas las entradas de la matriz E son nulas, salvo $[E]_{kk} = 1,\ k \neq i,j$, $[E]_{ij} = 1$ y $[E]_{ji} = 1$. Si atendemos a las filas de E observamos que $E_{k*} = \boldsymbol{e}_k^t$ si $k \neq i,j$, $E_{i*} = \boldsymbol{e}_j^t$ y $E_{j*} = \boldsymbol{e}_i^t$.

Proposición 2.5.2. (MULTIPLICACIÓN POR UNA MATRIZ ELEMENTAL DE TIPO I).

- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo I* a la izquierda *de una matriz produce en ésta una operación elemental* por filas *de tipo I.*
- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo I* a la derecha *de una matriz produce en ésta una operación elemental* por columnas *de tipo I.*

PRUEBA: Basta probar el primer punto, pues el segundo, además de ser análogo, se deduce del primero por trasposición de matrices.

Sean entonces $A_{m\times n}$ y $E_{m\times m}$ la matriz obtenida de a identidad al intercambiar las filas i y j. Vamos a describir la multiplicación EA por filas, es decir,

$$[EA]_{k*} = E_{k*}A,\ k = 1, \ldots m.$$

Si $k \neq i, j$ sabemos que $E_{k*} = \boldsymbol{e}_k^t$, de donde calculamos la fila $k-$ésima de EA:

$$[EA]_{k*} = E_{k*}A = \boldsymbol{e}_k^t A = A_{k*}, \text{ con } k \neq i, j.$$

Además $E_{i*} = \boldsymbol{e}_j^t$ y $E_{j*} = \boldsymbol{e}_i^t$. Luego las filas $i-$ésima y $j-$ésima de EA son

$$[EA]_{i*} = E_{i*}A = \boldsymbol{e}_j^t A = A_{j*} \text{ y } [EA]_{j*} = E_{j*}A = \boldsymbol{e}_i^t A = A_{i*}.$$

Es decir, la matriz EA es la que se obtiene de A al intercambiar las filas i y j □

Proposición 2.5.3. *Si E es una matriz elemental de tipo I entonces E es no singular y su inversa es ella misma. Es decir, $EE = I$.*

PRUEBA: La demostración es consecuencia del resultado anterior. Si E es la matriz que se obtiene de la identidad al intercambiar las filas i y j, el producto a la izquierda de E por ella misma vuelve a intercambiar las filas i y j, obteniendo $EE = I$. □

Matrices elementales de tipo II

Decimos que una matriz cuadrada E es elemental tipo II si se obtiene a partir de la matriz identidad $I_n$mediante una operación elemental por filas de tipo II. Es decir, si E se obtiene de I_n al sustituir la fila i por un múltiplo no nulo de ella.
En este caso todas las entradas de la matriz E son nulas, salvo $[E]_{kk} = 1,\ k \neq i$, $[E]_{ii} = \alpha$ con $\alpha \neq 0$. Si atendemos a las filas de E observamos que $E_{k*} = \boldsymbol{e}_k^t$ si $k \neq i$, $E_{i*} = \alpha \boldsymbol{e}_i^t$ con $\alpha \neq 0$.

Proposición 2.5.4. (MULTIPLICACIÓN POR UNA MATRIZ ELEMENTAL DE TIPO II).

- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo II* a la izquierda *de una matriz produce en ésta una operación elemental* por filas *de tipo II.*

- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo II* a la derecha *de una matriz produce en ésta una operación elemental* por columnas *de tipo II.*

Ejercicio 2.5.1. Dejamos la prueba de la proposición anterior como ejercicio.

Proposición 2.5.5. *Si E es una matriz elemental de tipo II entonces E es no singular y su inversa es otra matriz elemental tipo II.*

PRUEBA: Es fácil comprobar que si E es la matriz que se obtiene de la identidad al multiplicar la fila i por $\alpha \neq 0$ entonces E^{-1} es la matriz que se obtiene de la identidad al multiplicar por $1/\alpha$ la fila i. □

Matrices elementales de tipo III

Decimos que una matriz cuadrada E es elemental tipo III si se obtiene a partir de la matriz identidad $I_n$mediante una operación elemental por filas de tipo III. Es decir, si E se obtiene de I_n al sustituir la fila j por la suma de ella misma con un múltiplo de la fila i.
En este caso todas las entradas de la matriz E son nulas, salvo $[E]_{ii} = 1,\ \forall i = 1, \dots n$ y $[E]_{ji} = \alpha$. Si atendemos a las filas de E observamos que $E_{k*} = \boldsymbol{e}_k^t$ si $k \neq k$, $E_{i*} = \alpha \boldsymbol{e}_i^t + \boldsymbol{e}_j^t$.

Proposición 2.5.6. (Multiplicación por una matriz elemental de tipo II).

- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo III* a la izquierda *de una matriz produce en ésta una operación elemental* por filas *de tipo III.*
- *La multiplicación de una matriz elemental de tipo III* a la derecha *de una matriz produce en ésta una operación elemental* por columnas *de tipo III.*

Ejercicio 2.5.2. Dejamos la prueba de la proposición anterior como ejercicio.

Proposición 2.5.7. *Si E es una matriz elemental de tipo III entonces E es no singular y su inversa es otra matriz elemental tipo III.*

Prueba: Es fácil comprobar que si E es la matriz que se obtiene de la identidad al reemplazar la fila j por la suma de ella misma con la fila i por α, entonces E^{-1} es la matriz que se obtiene de la identidad al reemplazar la fila j por la suma de ella misma con la fila i por $-\alpha$. □

Ejemplo 2.5.1. Consideremos la sucesión de operaciones para reducir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

a su forma escalonada reducida por filas E_A.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{Cambia } R_2 \text{ y } R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; R_1 - 4R_2 \;\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A \end{aligned}$$

La reducción se puede ver como una sucesión de multiplicaciones a izquierda por la matrices elementales correspondientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = E_A.$$

Producto de matrices elementales

Una matriz A es no singular si y solamente si A es el producto de matrices elementales de tipos 1, 2, o 3.

PRUEBA: Si A es no singular, el método de Gauss-Jordan reduce A a la matriz I mediante operaciones por fila. Si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son las correspondientes matrices elementales, entonces

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I, \text{ o bien } A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, esto prueba que A se puede expresar como producto de matrices elementales.

Recíprocamente, si $A = E_1 E_2 \cdots E_k$ es un producto de matrices elementales, entonces A es no singular, pues es el producto de matrices no singulares. □

Equivalencia de matrices

- Cuando una matriz B se puede derivar de una matriz A mediante operaciones elementales de filas y columnas, escribiremos $A \sim B$, y diremos que A y B son ***matrices equivalentes***. Otra forma de expresarlo es que

  $$A \sim B \Leftrightarrow B = PAQ \text{ para matrices no singulares } P \text{ y } Q.$$

- Análogamente se define la ***equivalencia por filas***:

  $$A \overset{f}{\sim} B \Leftrightarrow B = PA \text{ para } P \text{ matriz no singular,}$$

  y la ***equivalencia por columnas***:

  $$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow B = AQ \text{ para } Q \text{ matriz no singular.}$$

Ejercicio 2.5.3. Estas relaciones son de equivalencia.

La forma escalonada reducida por filas E_A es lo más lejos que podemos llegar mediante transformaciones por filas. Sin embargo, si permitimos además el uso de transformaciones por columnas, la reducción es mucho mayor.

Forma normal de rango

Si A es una matriz de orden $m \times n$ y $\mathrm{rango}(A) = r$, entonces

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

N_r se denomina ***forma normal de rango*** de A.

PRUEBA: Como $A \overset{f}{\sim} E_A$, existe una matriz no singular P tal que $PA = E_A$. Si $\mathrm{rango}(A) = r$, entonces las columnas básicas de E_A son las r columnas unitarias. Mediante intercambio de columnas aplicados a E_A, podemos poner estas r columnas en la parte superior izquierda. Si Q_1 es el producto de las matrices elementales que hacen estos intercambios, entonces

$$PAQ_1 = E_A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & J \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ahora multiplicamos ambos lados de esta ecuación por la matriz no singular

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & -J \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix},$$

y nos queda

$$PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Entonces $A \sim N_r$. □

Nota 2.5.3. De hecho N_r es la forma escalonada reducida por columnas de la forma escalonada reducida por filas de A.

Ejemplo 2.5.2. Veamos que

$$\mathrm{rango} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \mathrm{rango}(A) + \mathrm{rango}(B).$$

Si $\mathrm{rango}(A) = r$ y $\mathrm{rango}(B) = s$, entonces $A \sim N_r$ y $B \sim N_s$, y

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_s \end{pmatrix},$$

de donde

$$\mathrm{rango} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = r + s.$$

Dadas matrices A y B, ¿cómo decidimos si $A \sim B$, $A \overset{f}{\sim} B$ o $A \overset{c}{\sim} B$?

Test de equivalencia

Sean A y B matrices de orden $m \times n$. Entonces

- $A \sim B$ si y solamente si $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(B)$.
- $A \overset{f}{\sim} B$ si y solamente si $E_A = E_B$.
- $A \overset{c}{\sim} B$ si y solamente si $E_{A^t} = E_{B^t}$.

En consecuencia, el producto por matrices no singulares no altera el rango.

PRUEBA: Si $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(B)$, entonces $A \sim N_r$ y $B \sim N_r$, de donde $A \sim N_r \sim B$. Recíprocamente, si $A \sim B$, y $\operatorname{rango}(A) = r$, $\operatorname{rango}(B) = s$, tenemos que $A \sim N_r$ y $B \sim N_s$, por lo que $N_r \sim N_s$, y esto implica que $r = s$.

Supongamos ahora que $A \overset{f}{\sim} B$. Como $B \overset{f}{\sim} E_B$, entonces $A \overset{f}{\sim} E_B$. Como la forma escalonada reducida por filas es única, se sigue que $E_B = E_A$. Recíprocamente, si $E_A = E_B$, entonces

$$A \overset{f}{\sim} E_A = E_B \overset{f}{\sim} B.$$

Para las columnas, basta considerar que

$$\begin{aligned} A \overset{c}{\sim} B \quad & \Leftrightarrow \quad AQ = B \Leftrightarrow (AQ)^t = B^t \\ & \Leftrightarrow \quad Q^t A^t = B^t \Leftrightarrow A^t \overset{f}{\sim} B^t. \end{aligned}$$

□

Rango y trasposición

$$\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^t) \text{ y } \operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^*).$$

PRUEBA: Sea $\operatorname{rango}(A) = r$, y sean P y Q matrices no singulares tales que

$$PAQ = N_r = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

Entonces $N_r^t = Q^t A^t P^t$. Como Q^t y P^t son no singulares, se sigue que $A^t \sim N_r^t$, y entonces

$$\operatorname{rango}(A^t) = \operatorname{rango}(N_r^t) = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (m-r)} \end{pmatrix} = r = \operatorname{rango}(A).$$

Para probar que $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^*)$, escribimos $N_r = \overline{N_r} = \overline{PAQ} = \overline{P}\,\overline{A}\,\overline{Q}$. Es fácil ver que $\overline{K}^{-1} = \overline{K^{-1}}$, de donde $N_r \sim \overline{A}$ y $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(\overline{A})$. Entonces

$$\operatorname{rango}(A^*) = \operatorname{rango}(\overline{A}^t) = \operatorname{rango}(\overline{A}) = \operatorname{rango}(A).$$

$\square$