Capítulo 7

Formas canónicas reales

Introducción. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $f \in \mathrm{End}(V)$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = A \in \mathcal{M}(n \times n)$. Sea $\lambda = a + bi$ es una autovalor complejo de f de multiplicidad m. Para tal autovalor complejo hemos aprendido a calcular un bloque complejo de Jordan así como un bloque de base canónica compleja asociados a dicho autovalor. Nuestro objetivo en el presente capítulo es hallar una forma canónica real de Jordan así como una base canónica real de V para f cuando f posea autovalores complejos. Para alcanzar este objetivo comenzaremos revisando algunas propiedades relacionadas con los números complejos.

7.1 Algunos resultados sobre $\mathbb{C}$

Definición 7.1.1 Consideremos el conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Sea $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, llamamos conjugado del número complejo α, al complejo $\overline{\alpha} = a - bi$.
Los números reales a y b reciben el nombre de *parte real* y *parte imaginaria*, respectivamente, del complejo α. Habitualmente, se utiliza la notación:

$$a = \mathrm{Re}(\alpha), \quad b = \mathrm{Im}(\alpha).$$

Proposición 7.1.1 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se verifica:

1) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

2) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$.

3) $\mathrm{Re}(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}), \quad \mathrm{Im}(\alpha) = \dfrac{1}{2i}(\alpha - \overline{\alpha})$.

Proposición 7.1.2 Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio cuyos coeficientes son números reales y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $p(x)$ de multiplicidad m. Se verifica que:

1) $\overline{\alpha}$ es también raíz de $p(x)$. En otras palabras,

$$p(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow p(\overline{\alpha}) = 0$$

.

2) La multiplicidad de $\overline{\alpha}$ como raíz de $p(x)$ es también m.

Definición 7.1.2 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuyos elementos son números complejos. Llamamos *conjugada* de A a la matriz $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$.

Proposición 7.1.3 Sean A y B matrices cuyos elementos son números complejos. Se verifica:

1) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.

2) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

3) $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{C}) \Longrightarrow \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

4) $\mathrm{rg}(\overline{A}) = \mathrm{rg}(A)$.

Notaciones. Sea $\mathbf{v} \in V$ un vector cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ son

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (x_1 + y_1 i, x_2 + y_2 i, \ldots, x_n + y_n i).$$

Consideremos los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ tales que $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y}_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Se tiene:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (x_1 + y_1 i, x_2 + y_2 i, \ldots, x_n + y_n i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} + i\mathbf{y}_{\mathcal{B}},$$

de aquí que adoptemos la notación

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}i.$$

Por analogía con los números complejos, escribiremos,

$$\mathrm{Re}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}, \quad \mathrm{Im}(\mathbf{v}) = \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores de V cuyas coordenadas son números reales.
Se tiene, igualmente, que

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \overline{\mathbf{v}}), \quad \mathbf{y} = \frac{1}{2i}(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}).$$

Definición 7.1.3 Sean V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y $\mathcal{B}$ una base de V. Sea L una variedad lineal de V de ecuaciones respecto de $\mathcal{B}$ son $A\mathbf{x}^t = 0$. Llamaremos conjugada de la variedad L a la variedad $\overline{L}$ cuyas ecuaciones, respecto de $\mathcal{B}$ son $\overline{A}\mathbf{x}^t = 0$.

Proposición 7.1.4 Sean L y $\overline{L}$ variedades lineales de V. Se verifica que:

1. $\mathbf{a} \in L \Longleftrightarrow \overline{\mathbf{a}} \in \overline{L}$.

2. $\dim(\overline{L}) = \dim(L)$.

3. $\mathcal{L} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es una base de L si y sólo si $\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{\mathbf{v}}_1, \overline{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{v}}_r\}$ es una base de $\overline{L}$.

Las demostraciones de estas propiedades son triviales y se dejan como ejercicio.

7.2 Construcción de un bloque de Jordan real

Proposición 7.2.1 Sean V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, $f \in \mathrm{End}(V)$, $\mathcal{B}$ una base de V y $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, $\big(A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})\big)$. Se verifica:

1. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es un autovalor complejo de f cuya multiplicidad algebraica es m, entonces $\overline{\lambda}$ es un autovalor de f de multiplicidad m.

2. Si $V_1(\lambda), V_2(\lambda), \ldots, V_s(\lambda)$ es la sucesión de subespacios asociados al autovalor λ, los subespacios asociados al autovalor $\overline{\lambda}$ son
$$V_j(\overline{\lambda}) = \overline{V_j(\lambda)}, \quad (j = 1, \ldots, s).$$

3. El par de autovalores λ y $\overline{\lambda}$ tienen la misma partición de su multiplicidad.

4. Si $\mathcal{B}_\lambda = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 i, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 i, \ldots, \mathbf{u}_m + \mathbf{v}_m i\}$ es una base de $V_s(\lambda)$ calculada por el algoritmo de la proposición 6.2.1, entonces una base de $V_s(\overline{\lambda})$ es $\mathcal{B}_{\overline{\lambda}} = \{\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 i, \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 i, \ldots, \mathbf{u}_m - \mathbf{v}_m i\}$ y, por consiguiente, una base de $V_s(\lambda) \oplus V_s(\overline{\lambda})$ es
$$\mathcal{B}_\lambda \cup \mathcal{B}_{\overline{\lambda}} = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 i, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 i, \ldots, \mathbf{u}_m + \mathbf{v}_m i, \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 i, \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 i, \ldots, \mathbf{u}_m - \mathbf{v}_m i\}.$$

5. Si $\mathcal{B}_\lambda$ y $\mathcal{B}_{\overline{\lambda}}$ son, respectivamente, las bases de $V_s(\lambda)$ y de $V_s(\overline{\lambda})$, calculadas en el apartado anterior, se verifica que una base real de $V_s(\lambda) \oplus V_s(\overline{\lambda})$ es
$$\mathcal{B}_{\lambda\overline{\lambda}} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \ldots, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m\}.$$

6. Sea
$$E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$
una caja elemental de Jordan de orden $r \times r$ sobre $\mathbb{C}$ asociada a una columna de altura r $(r \leq s)$ en la base $\mathcal{B}_\lambda$. Entonces la caja elemental de Jordan asociada a la misma columna en la base $\mathcal{B}_{\overline{\lambda}}$ será la matriz de orden $r \times r$,
$$\overline{E} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 1 & & & \\ & \overline{\lambda} & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ & & & & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

7. Tomando $\mathcal{B}_{\lambda\overline{\lambda}}$ como base de $V_s(\lambda) \oplus V_s(\overline{\lambda})$ la caja elemental sobre $\mathbb{R}$ correspondiente a las cajas elementales de orden r E y $\overline{E}$ asociadas a los autovalores $\lambda = a + bi$ y $\overline{\lambda} = a - bi$ es de la forma:
$$E_{\lambda,\overline{\lambda}} = \begin{pmatrix} C & I & & & \\ & C & I & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & I \\ & & & & C \end{pmatrix},$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda,\overline{\lambda}} = \mathcal{M}(2r \times 2r, \mathbb{R}).$$

Demostración

1. Es consecuencia inmediata de la proposición 7.1.2 ya que si $p(x)$ es el polinomio característico de f y $\lambda \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(x)$, también lo es $\overline{\lambda}$ y si la multiplicidad algebraica de λ es m, también m la multiplicidad de $\overline{\lambda}$.

2. Sean $V_j(\lambda)$, $\quad (j = 1, \ldots, s)$ los subespacios invariantes asociados al autovalor λ. Sabemos que
$$V_j(\overline{\lambda}) \equiv (\overline{\lambda} I - A)\mathbf{x}^t = 0.$$
Además, teniendo en cuenta que las matrices I y A son reales, de acuerdo con las propiedades de la proposición 7.1.3, se tiene:
$$\overline{(\lambda I - A)^j} = (\overline{\lambda I - A})^j = (\overline{\lambda} I - A)^j.$$
Igualdades de las que deducimos que $\overline{V_j(\lambda)} = V_j(\overline{\lambda})$, $(j = 1, \ldots, s)$.

3. Como consecuencia del apartado 4) de la proposición 7.1.3 se tiene:
$$\mathrm{rg}\big((\lambda I - A)^j\big) = \mathrm{rg}\Big(\overline{(\lambda I - A)^j}\Big) = \mathrm{rg}\big((\overline{\lambda} I - A)^j\big),$$
de donde
$$\dim\big(V_j(\lambda)\big) = \dim\big(V_j(\overline{\lambda})\big).$$
Sabiendo que la partición de la multiplicidad m de λ o $\overline{\lambda}$ está determinada por las dimensiones de los subespacios asociados a dichos autovalores y que estos tienen la misma dimensión, se deduce inmediatamente la proposición.

4. Recuérdese, en primer lugar que $\dim\big(V_s(\lambda)\big) = m$ (multiplicidad de λ). Por lo demás, la proposición es consecuencia inmediata del apartado 3) de la proposición 7.1.4 y de ser directa la suma $V_s(\lambda) + V_s(\overline{\lambda})$. (Ver para esto último la demostración para $r = 2$ del lema 6.3.2)

5. Recordando que las transformaciones elementales de los tipos I y II, conservan la independencia lineal (ya que conservan el rango de la matriz de las coordenadas respecto de una base) es fácil probar que
$$\mathcal{B}_{\lambda\overline{\lambda}} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m\}$$
es una base de V.

6. Como la partición de la multiplicidad m de para ambos autovalores (λ y $\overline{\lambda}$) es la misma, los bloques de Jordan de ambos autovalores están compuestos por el mismo número de cajas elementales y del mismo orden de ahí, que si E es una caja elemental del bloque de Jordan asociado a λ, $\overline{E}$ lo será del asociado a $\overline{\lambda}$.

7. En efecto, supuesto que se ha calculado una base de $V_s(\lambda)$ mediante el algoritmo de la proposición 6.2.1, sea $\{\mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{u}^r + i\mathbf{v}^r\}$, $(r \leq s)$ una columna completa tomada de abajo hacia arriba. Por construcción, sabemos que:

$$\left.\begin{array}{c|l}
V_r & \mathbf{u}^r + i\mathbf{v}^r \\
 & \downarrow {\scriptstyle -(\lambda 1_V - f)} \\
V_{r-1} & \mathbf{u}^{r-1} + i\mathbf{v}^{r-1} \\
 & \downarrow {\scriptstyle -(\lambda 1_V - f)} \\
\vdots & \vdots \\
 & \downarrow {\scriptstyle -(\lambda 1_V - f)} \\
V_2 & \mathbf{u}^2 + i\mathbf{v}^2 \\
 & \downarrow {\scriptstyle -(\lambda 1_V - f)} \\
V_1 & \mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1 \\
 & \downarrow {\scriptstyle -(\lambda 1_V - f)} \\
 & \mathbf{0}
\end{array}\right\} \text{Es decir: } \left\{\begin{array}{rcl}
-(\lambda 1_V - f)(\mathbf{u}^r + i\mathbf{v}^r) & = & \mathbf{u}^{r-1} + i\mathbf{v}^{r-1} \\
-(\lambda 1_V - f)(\mathbf{u}^{r-1} + i\mathbf{v}^{r-1}) & = & \mathbf{u}^{r-2} + i\mathbf{v}^{r-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
-(\lambda 1_V - f)(\mathbf{u}^3 + i\mathbf{v}^3) & = & \mathbf{u}^2 + i\mathbf{v}^2 \\
-(\lambda 1_V - f)(\mathbf{u}^2 + i\mathbf{v}^2) & = & \mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1 \\
-(\lambda 1_V - f)(\mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1) & = & \mathbf{0}
\end{array}\right.$$

Sea pues $\mathbf{u}^k + i\mathbf{v}^k$, $(k = 1, \ldots, r)$ un vector de dicha columna. Caben dos casos:

a) $k = 1$. En este caso $\mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1 \in V_1(\lambda)$ con lo cual $\mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = a + bi$, de donde

$$f(\mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1) = \lambda(\mathbf{u}^1 + i\mathbf{v}^1) \Longrightarrow f(\mathbf{u}^1) + if(\mathbf{v}^1) = (a\mathbf{u}^1 - b\mathbf{v}^1) + i(b\mathbf{u}^1 + a\mathbf{v}^1).$$

Es decir,

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}^1) & = & a\mathbf{u}^1 - b\mathbf{v}^1, \\ f(\mathbf{v}^1) & = & b\mathbf{u}^1 + a\mathbf{v}^1. \end{array} \tag{7.1}$$

Con lo que la matriz de las relaciones 7.1 es

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

b) $1 < k \leq r$. En este caso $\mathbf{u}^k + i\mathbf{v}^k \in V_k(\lambda)$ y, por lo tanto,

$$-(\lambda 1_V - f)(\mathbf{u}^k + i\mathbf{v}^k) = \mathbf{u}^{k-1} + i\mathbf{v}^{k-1} \Longrightarrow f(\mathbf{u}^k + i\mathbf{v}^k) = \mathbf{u}^{k-1} + i\mathbf{v}^{k-1} + \lambda(\mathbf{u}^k + i\mathbf{v}^k).$$

Es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}^k) & = & \mathbf{u}^{k-1} + a\mathbf{u}^k - b\mathbf{v}^k, \\ f(\mathbf{v}^k) & = & \mathbf{v}^{k-1} + b\mathbf{u}^k + a\mathbf{v}^k, \end{array}\right. \tag{7.2}$$

de donde la matriz de las relaciones 7.2 respecto de $\{\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}^{k-1}, \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k\}$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{C}\right)$$

Con lo que queda probada la proposición.

Regla práctica

Sea $\lambda = a + bi$ un autovalor complejo de f de multiplicidad m.

1º) Comenzamos, como en el caso complejo, calculando los subespacios asociados a λ, $V_1, V_2, \ldots, V_s$, sus correspondientes dimensiones $n_1, n_2, \ldots, n_s$ y los números $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

2º) Con los datos anteriores ya podemos calcular el bloque complejo de Jordan asociado a λ. Ahora, para obtener el bloque real asociado a los autovalores λ y $\overline{\lambda}$ bastará sustituir el autovalor λ por la caja C definida en el apartado 7) de la proposición anterior, los "unos", si los hubiese, de la paralela a la diagonal por la matriz I y completar con ceros de modo que el orden de la nueva matriz se $2m \times 2m$.

3º) A continuación calculamos, por el método establecido en la proposición 6.2.1, una base compleja de V_s. Sea ésta

$$\mathcal{B}_\lambda = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$$

4º) El bloque de base canónica real asociado a los autovalores λ y $\overline{\lambda}$ será de la forma:

$$\mathcal{B}_{\lambda\overline{\lambda}} = \big\{\mathrm{Re}(\mathbf{v}_1), \mathrm{Im}(\mathbf{v}_1), \mathrm{Re}(\mathbf{v}_2), \mathrm{Im}(\mathbf{v}_2), \ldots, \ldots, \mathrm{Re}(\mathbf{v}_m), \mathrm{Im}(\mathbf{v}_m)\big\}$$

Ejemplo 1. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ y $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que:

$$A = \mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular las formas canónicas, compleja y real de f y unas bases canónicas, compleja y real de V para f.

Solución

- **Autovalores de** f

$$0 = |\lambda I - A| = (\lambda^2 - 2\,\lambda + 2)^2 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 + i,\ (m_1 = 2), \quad \lambda_2 = 1 - i,\ (m_2 = 2).$$

- **Subespacios asociados a** $\lambda_1 = 1 + i$

$$V_1(\lambda_1) \equiv \begin{pmatrix} -1+i & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 1 & -2 & i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Utilizando la forma reducida de la matriz de los coeficientes de $V1$, obtenemos:

$$V_1(\lambda_1) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

de donde deducimos que $\dim\big(V_1(\lambda_1)\big) = 2$, con lo cual los bloques de Jordan asociados a los autovalores $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$ son de la forma:

$$J_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, \qquad J_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Una base B_{λ_1} de $V_1(\lambda_1)$ es $B_{\lambda_1} = \{(-2, -1+i, 2, 0), (-2i, -1-i, 0, 2)\}$

- **Formas canónicas compleja y real de f**
  De lo anterior se deduce que

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1+i & & & \\ & 1+i & & \\ & & 1-i & \\ & & & 1-i \end{pmatrix}, \qquad J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Bases canónicas compleja y real de V para f**
  Estas son:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{(-2, -1+i, 2, 0), (-2i, -1-i, 0, 2), (-2, -1-i, 2, 0), (2i, -1+i, 0, 2)\},$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{(-2, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 2), (-2, -1, 0, 0)\}.$$

Ejemplo 2. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ y $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que:

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular las formas canónicas, compleja y real de f y unas bases canónicas, compleja y real de V para f.

Solución

- **Autovalores de f**

$$0 = |\lambda I - A| = (\lambda^2 - 2\,\lambda + 2)^2 \Longrightarrow \lambda_1 = 1+i,\ (m_1 = 2), \quad \lambda_2 = 1-i,\ (m_2 = 2).$$

- **Subespacios asociados a $\lambda_1 = 1+i$**

$$V_1(\lambda_1) \equiv \begin{pmatrix} -1+I & 0 & -1 & -1 \\ -1 & I & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1+I & -1 \\ 1 & 1 & 2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Utilizando la forma reducida de la matriz de los coeficientes de $V1$, obtenemos:

$$V_1(\lambda_1) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

de donde deducimos que $\dim\big(V_1(\lambda_1)\big) = 1$, con lo cual f no es diagonalizable y los bloques de Jordan asociados a los autovalores $\lambda_1 = 1+i$ y $\lambda_2 = 1-i$ son de la forma:

$$J_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, \qquad J_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Una base $B_{1\lambda_1}$ de $V_1(\lambda_1)$ es $B_{\lambda_1} = \{(-1-i, -1, 1, 1)\}$.

$$V_2(\lambda_1) \equiv \begin{pmatrix} -2-2\,i & 0 & -2-2\,i & 2-2\,i \\ -2\,i & 0 & -2\,i & 2 \\ 2\,i & -2-2\,i & -2+2\,i & -2-2\,i \\ 2\,i & -2+2\,i & 4\,i & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

, lo que es equivalente (utilizando, igualmente, la forma reducida por filas),

$$V_2(\lambda_1) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & i \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Una base $B_{2\lambda_1}$ de $V_2(\lambda_1)$ es

$$B_{2\lambda_1} = \{(-2, -1+i, 2, 0), (-2i, -1-i, 0, 2)\}.$$

- **Formas canónicas compleja y real de f**
  De lo anterior se deduce que:

$$J_{\mathbb{C}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & & \\ & 1+i & & \\ \hline & & 1-i & 1 \\ & & & 1-i \end{array}\right), \qquad J_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

- **Bases canónicas compleja y real de V para f**
  Calculemos un bloque de base compleja de Jordan asociada al autovalor λ_1.

  Como $p_1 = 1$ y $p_2 = 1$, tenemos

$$\begin{array}{c|c} V_2 & (-2, -1+i, 2, 0) \\ & \downarrow {\scriptstyle -(\lambda_1 I - A)} \\ \hline V_1 & (2i, 1+i, -1-i, -1-i) \end{array}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{(2i, 1+i, -1-i, -1-i), (-2, -1+i, 2, 0), (-2i, 1-i, -1+i, -1+i), (-2, -1-i, 2, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{(0, 1, -1, -1), (2, 1, -1, -1), (-2, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$