Tema 7.-. Ecuaciones de tercer y cuarto grado.Teorema fundamental del Álgebra.

7.1. La ecuación de tercer grado: fórmula de Cardano-Tartaglia

El desarrollo de este tema está tomado del libro *Introducción al Álgebra*, de S. Xambó, F. Delgado y C. Fuertes, Ed. Complutense, Madrid, 1993.

Vamos a estudiar ahora la ecuación de tercer grado. Suponemos ahora que

$$f(X) = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 \in \mathbb{Q}[X].$$

A todos los efectos, el resolver $f(X) = 0$ equivale a hacer lo mismo para la ecuación $f(X - \frac{a_1}{3}) = 0$. Esta sustitución tiene la ventaja de que elimina el término en X^2, luego se puede suponer, de entrada, que

$$f(X) = X^3 + pX + q.$$

La sustitución anterior se llama *de Tchirnhausen*.

Estudiemos pues las soluciones de

$$f(X) = X^3 + pX + q = 0. \tag{1}$$

Podemos suponer que p y q son distintos de 0 (si $p = 0$, las soluciones de (1) son las raíces cúbicas de $-q$; si $q = 0$ las soluciones son 0 y las raíces cuadradas de $-p$).

Supongamos que α es una solución de (1). Hagamos la sustitución $\alpha = u + v$. Obtenemos:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Si tomamos u, v de manera que $3uv + p = 0$, i.e. u, v serían las raíces de la ecuación cuadrática $X^2 - \alpha X - \frac{p}{3} = 0$, obtenemos:

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Puesto que

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

tenemos que u^3, v^3 son las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{2}$$

Así pues para encontrar una solución de (1) tomamos una solución β de (2), tomamos u una raíz cúbica de β y ponemos $v = -\frac{p}{3u}$. Entonces v^3 es la otra solución de (2) y $\alpha = u + v$ es solución de (1). Simbólicamente, una solución de (1) es

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

debido a que las soluciones de (2) son

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Si $\omega \neq 1$ es una raíz cúbica de 1, $u_1 = u, u_2 = \omega u, u_3 = \omega^2 u$ son las tres raíces cúbicas de β. Pongamos $v_i = -\frac{p}{3u_i}$ de manera que $v_1 = v, v_2 = \omega^2 v, v_3 = \omega v$. Entonces las raíces de (1) son: $\alpha_i = u_i + v_i$, $i = 1, 2, 3$.

7.2. La ecuación de cuarto grado: método de Ferrari

Mediante una transformación de Tchirnhausen, podemos centrarnos en el caso en que nuestra ecuación de cuarto grado sea de la forma

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0. \tag{3}$$

En el caso en que $r = 0$, nuestra ecuación se reduce a una ecuación de grado 3. Si $q = 0$, se trata de una ecuación bicuadrática.

Podemos pues suponer $r, q \neq 0$.

Consideremos una variable auxiliar u y escribamos

$$f(X) = (X^2 + \frac{p}{2} + u)^2 - \left[2uX^2 - qX + \left(u^2 + pu - r + \frac{p^2}{4}\right)\right].$$

Para que el polinomio entre corchetes, que notaremos $g(X)$, sea un cuadrado ha de verificarse que

$$q^2 - 8u\left(u^2 + pu - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0. \tag{4}$$

Ahora bien, (4) es una ecuación de tercer grado y sabemos pues resolverla mediante radicales. Sea u_0 una raíz de (4). Entonces $\frac{q}{4u_0}$ es una raíz doble de $g(X)$ y se tiene

$$f(X) = \left(X^2 + \frac{p}{2} + u_0\right)^2 - 2u_0\left(X - \frac{q}{4u_0}\right)^2$$

de donde las raíces de $f(X)$ son las raíces de los siguientes polinomios de grado 2:

$$X^2 + \sqrt{2u_0}X + \left(\frac{p}{2} + u_0 - \frac{p}{2\sqrt{2u_0}}\right)$$

$$X^2 - \sqrt{2u_0}X + \left(\frac{p}{2} + u_0 + \frac{p}{2\sqrt{2u_0}}\right).$$

7.3. El teorema fundamental del Álgebra.

Este teorema garantiza la existencia de soluciones en el cuerpo de los números complejos de toda ecuación polinómica compleja. Fue enunciado por D'Alembert, pero demostrado por Gauss. Damos una demostración simple, basada en resultados de Análisis. Para una demostración totalmente algebraica, hay que esperar a desarrollar la teoría de Galois.

LEMA 7.3.1.– Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua, y D es un conjunto cerrado y acotado (compacto) de $\mathbb{R}^2$, entonces f tiene un mínimo y un máximo en D.

LEMA 7.3.2.– Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Entonces $|f(x)|$ alcanza un valor mínimo en algún $z_0 \in \mathbb{C}$.

Demostración. Es inmediato ver que $\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. Por tanto, como $|f(x)|$ se hace grande cuando $|x|$ crece, se deduce que la cota inferior de $|f(z)|$ para $z \in \mathbb{C}$ es también la cota inferiro en un dicso suficientemente grande $|z| \leq r$. Como $|f(x)|$ es una función continua con valores en $\mathbb{R}$, por el lema anterior tenemos que $|f(z)|$ alcanza su valor mínimo en el disco. □

LEMA 7.3.3.– Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $f(x)$ no constante. Si $f(x_0) \neq 0$ entonces $|f(x_0)|$ no es el valor mínimo de $|f(x)|$.

Demostración. Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ no constante, y supongamos que x_0 es un punto con $f(x_0) \neq 0$. Hagamos el cambio de variables $x + x_0$ por x. Con esto se mueve x_0 al origen, y podemos suponer $f(0) \neq 0$. Multiplicamos $f(x)$ por $f(0)^{-1}$, y conseguimos $f(0) = 1$. Vamos a probar que 1 no es el valor mínimo de $|f(x)|$.

Sea k el exponente más pequeño de x que aparece en $f(x)$. Entonces

$$f(x) = 1 + ax^k + \text{ términos de grado } > k.$$

Ahora sea α una raíz k-ésima de $-a^{-1}$, que existe por la fórmula de DeMoivre. Hacemos ahora el cambio de variable αx por x. Entonces $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = 1 - x^k + x^{k+1} g(x) \text{ para algún polinomio } g(x).$$

Sea $\epsilon < 1$ un número real y positivo. Entonces

$$|f(\epsilon)| \leq \left|1 - \epsilon^k\right| + \epsilon^{k+1} |g(\epsilon)| .$$

Como $\epsilon^k < 1$, podemos escribir

$$|f(\epsilon)| \leq 1 - \epsilon^k + \epsilon^{k+1} |g(\epsilon)| = 1 - \epsilon^k (1 - \epsilon |g(\epsilon)|).$$

Si $\epsilon \to 0$ entonces $\epsilon |g(\epsilon)| \to 0$, por lo que podemos escoger $x_0 < 1$ real y positivo tal que $x_0 |g(x_0)| < 1$. Entonces

$$x_0^k (1 - x_0 |g(x_0)|) > 0$$

y $|f(x_0)| < 1 = |f(0)|$. □

TEOREMA 7.3.4.– Teorema fundamental del Álgebra. Si $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio no constante, entonces tiene al menos una raíz compleja.

Demostración. Sea $f(x)$ un polinomio no constante. Entonces $|f(x)|$ tiene un valor mínimo en algún $x_0 \in \mathbb{C}$. Por el lema anterior, $|f(x_0)| = 0$, de donde $f(x_0) = 0$. □