APENMAT

Estudio Analítico de Rectas y Planos en el Espacio

Unidad 11 - Matemáticas II

Marta López Marcos - Nieves Oltra Rodríguez - Rocío Rodríguez Rivas - Gabriel Salas Cabezas

Contextualización

_ De la localidad

- Sevilla Capital.
- Distrito Nervión.

_ Del Centro

- Amplia oferta educativa, tanto en el centro como en el distrito Nervión.
- Beatriz de Suabia - Tradicionalmente era un centro de FP.
- Muy alto porcentaje de docentes con destino definitivo - Estabilidad.
- Centro de integración de hipoacúsicos.

_ Del Departamento de Matemáticas

- Departamento muy numeroso.
- Reuniones de Departamento semanales, buen clima dentro del mismo.

_ Del Aula

- 22 Alumnos de 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, todos preparando la Prueba de Acceso a la Universidad (P.A.U.).
- Alta competencia en este tramo educativo con IES Martínez Montañés y con IES Ciudad Jardín.
- Alumnos con casos especiales:
  - Alumno repetidor de 2º de Bachillerato.
  - Alumna repetidora de 2º de Bachillerato, procedente de un Centro Concertado.
  - Alumno con hipoacusia.
  - Alumna con altas capacidades.

Justificación

_ **Coherencia interna + transversalidad.**

_ **Justificación normativa:**

- Bloque de Geometría de la asignatura Matemáticas II (artículo 13 del Decreto 416/2008 y Real Decreto 1467/2007).

_ **Justificación histórica:**

- Geometría como rama histórica de las Matemáticas.
- Geometría analítica (Edad Moderna, Descartes (1596-1650) vs. Fermat (1601-1665)).
- Base para notables avances matemáticos y científicos (geometría diferencial, no euclidiana, etc.).

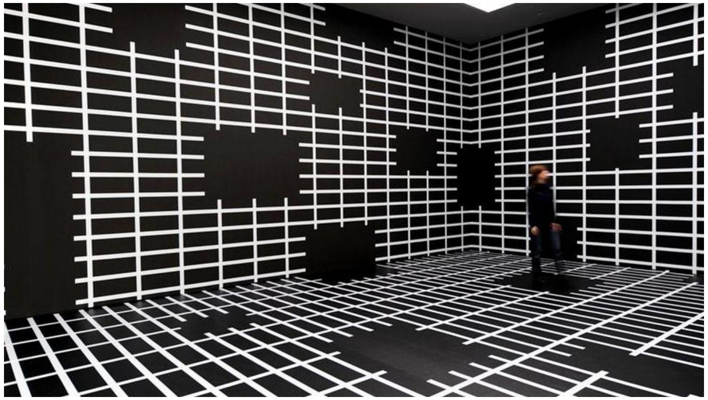
Justificación

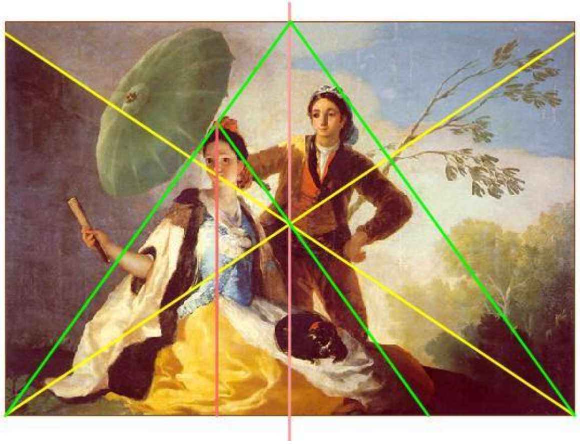
_ Aplicación a la vida real:

- Uso cotidiano (orientación, mediciones, reconocimiento de objetos…).
- Desarrollo de la percepción espacial, lectura de representaciones.
- Racionalización del diseño y construcción de objetos.
- Presencia en la naturaleza.
- Presencia en casi todas las disciplinas (artísticas, técnicas, científicas, deportivas…).

_ Otros:

- Base para la construcción de nuevos conocimientos.
- Contenido de la P.A.U.
- Ámbito ideal para el trabajo de competencias.
- Desarrollo de múltiples capacidades: organización, creatividad, visión espacial, resolución de problemas, razonamiento deductivo-inductivo...





Objetivos

_Generales.

Los objetivos generales son los descritos por la legislación educativa en el RD 1467/2007.

- **Comprender** y **aplicar** los conceptos y **procedimientos matemáticos** a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber.

- Considerar las **argumentaciones razonadas** y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos.

- Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un **proceso cambiante y dinámico**, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.

_Generales.

Los objetivos generales son los descritos por la legislación educativa en el RD 1467/2007.

- Utilizar las **estrategias** características de la **investigación científica** y las **destrezas propias de las matemáticas** (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.

- Emplear los **recursos** aportados por las **tecnologías** actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.

_Generales.

Los objetivos generales son los descritos por la legislación educativa en el RD 1467/2007.

- Utilizar el **discurso racional** para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, encadenar coherentemente los argumentos, comunicarse con eficacia y precisión, detectar incorrecciones lógicas y cuestionar aseveraciones carentes de rigor científico.

- Mostrar **actitudes** asociadas al **trabajo científico** a la **investigación matemática**, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.

- **Expresarse verbalmente y por escrito** en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas.

_Particulares.

Los objetivos particulares de esta unidad son que al término de la misma los alumnos sean capaces de:

- Identificar los elementos que permiten **determinar una recta** en el plano y en el espacio.
- Identificar los elementos que permiten **determinar un plano** en el espacio.
- Conocer e interpretar las diferentes **formas que adoptan las ecuaciones** de las rectas y los planos en el espacio.
- **Transformar** de unas a otras las diferentes formas que adoptan las ecuaciones de rectas y planos en el espacio.
- **Resolver problemas de incidencia** entre puntos, rectas y planos en el espacio.
- **Aplicar conceptos de álgebra lineal** a los problemas de incidencia y paralelismo entre elementos del espacio.
- **Resolver problemas métricos**:
    - Calcular ángulos entre rectas, planos y rectas y planos.
    - Calcular distancias entre rectas, planos y rectas y planos.
    - Calcular áreas y volúmenes de figuras sencillas.

_ Relación de conceptos de cursos anteriores relacionados con la Unidad.

Tanto en la enseñanza secundaria obligatoria como en Bachillerato, los alumnos/as han trabajado el tema de la geometría desde distintos ámbitos.

- El alumno/a ha identificado, interpretado y utilizado **elementos geométricos**, regularidades y propiedades en las figuras planas y en las formas espaciales.
- Ha aprendido a medir **longitudes** y **áreas de figuras planas** por medio de métodos empíricos.
- Se ha iniciado en el estudio de **razones trigonométricas**, en su significado, en las relaciones entre ellas y en su aplicación a la resolución de **triángulos rectángulos**.

Conceptos previos

- Ha completado el estudio de las razones trigonométricas para **ángulos cualesquiera**. Ha aplicado sus definiciones y relaciones en la resolución de triángulos.

- Ha utilizado las múltiples relaciones entre las razones trigonométricas referidas a la **suma** y **diferencia de ángulos**, a los **ángulos dobles**, a los **ángulos mitad**, etc,. Se ha iniciado en la resolución de **ecuaciones trigonométricas**.

- Ha utilizado los conceptos asociados a la **geometría cartesiana del plano** para resolver problemas de incidencia y métricos entre los elementos del plano: **puntos y rectas**.

- Se ha iniciado en el estudio de los **vectores**, así como las diferentes operaciones que pueden realizarse con ellos.

- Ha desarrollo de conceptos del álgebra lineal como **matrices**, **determinantes** y **sistemas lineales**.

_ Prueba de diagnóstico a principio de curso.

- Art 4.3. de la Orden del 15 de Diciembre de 2008 de la Junta de Andalucía establece durante el primer mes una observación de ideas y conocimientos previos.
- Permite ajustar el rendimiento del alumnado (nivel de competencia logrado) a las exigencias, buscando un nivel óptimo de desarrollo de las mismas.
- Permite objetivar el análisis e impulsar una reflexión colectiva de los resultados, facilitando la implicación del alumnado y del profesorado en propuestas de mejoras.

1. Dada la recta del plano de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial e implícita

La recta $2x - 6y + 3 = 0$ pasa por el punto $(0, 1/2)$ y un vector direccional es $\overline{v} = (3, 1)$. Por tanto, las ecuaciones pedidas son:

- Ecuación continua $\frac{x}{3} = \frac{y - 1/2}{1}$
- Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3t \\ y = t - 1/2 \end{cases}, \quad t \in R$
- Ecuación vectorial $(x, y) = (0, 1/2) + t\,(3, 1)$, con $t \in R$
- Ecuación implícita $y = 1/3\,x + 1/2$

2. Calcula el valor de a en la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$, para que:

***a)* Pase por el punto (3, 1).**

***b)* Tenga de pendiente –1.**

***c)* Uno de sus vectores directores sea $\mathbf{v} = (6, -4)$.**

a) $a = 2$ *b)* $a = 3$ *c)* $a = 2$

Contenidos

_ Conceptuales:

- Sistemas de referencia.
- Ecuaciones de la recta.
- Ecuaciones del plano.
- Determinación principal del plano.
- Posiciones relativas de dos rectas.
- Posiciones relativas de una recta y un plano.
- Posiciones relativas de dos y tres planos.

- Problemas métricos.
  - Ángulos.
  - Proyecciones.
  - Distancias.

- Áreas y volúmenes de figuras.
  - Área de triángulos y paralelogramos.
  - Volumen del tetraedro y del paralelepípedo.

_ Procedimentales:

- Transformación, de unas a otras, entre las diferentes formas que adoptan las ecuaciones de rectas y planos en el espacio.
- Determinación de la posición relativa de rectas, de planos y de rectas y planos.
- Incidencia y paralelismo de rectas y planos en el espacio.
- Cálculo de ángulos entre rectas, planos, y entre rectas y planos.
- Proyecciones de puntos sobre rectas y planos y de rectas sobre planos.
- Cálculo de distancias entre puntos, rectas y planos.
- Cálculo de áreas y volúmenes de figuras sencillas (triángulos, paralelogramos, tetraedros y paralelepípedos).

_ Actitudinales:

- Participación activa en los trabajos y respeto al trabajo y las opiniones de los demás.
- Valoración de la utilidad y la presencia de la geometría en la vida cotidiana.
- Reconocimiento de la aplicación de métodos gráficos para resolver problemas de tipo geométrico.
- Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos.
- Precisión en la utilización de la expresión oral y el lenguaje matemático.
- Valoración de la utilidad de las TICs para la representación geométrica.

_ Actividades:

- ***Actividades de Diagnóstico:*** Al principio del curso.

- ***Actividades de Enseñanza/Aprendizaje:***

    - Preinstruccionales.
    - De aplicación de los nuevos conocimientos (Algoritmos).
    - Problemas de aplicación de la nueva materia dentro de contexto (incluyendo en este apartado dos Proyectos en grupo).

- ***Actividades con Apoyo Gráfico:*** Buscando transversalidad con Dibujo Técnico (Uso de imágenes y Geogebra).

_ Organización temporal de una sesión tipo:

Inicio: Corrección en la pizarra de ejercicios propuestos en la sesión anterior, por parte de profesor y alumnos.

Parte central de la sesión: Se dedicará al avance en nuevos contenidos de la materia. Los contenidos se presentarán mediante casos particulares en los que se demandará la participación de los alumnos y que se visualizarán en imágenes o en Geogebra, buscando el aprendizaje por descubrimiento y la traslación entre distintos modos de representación. A continuación se mostrará la generalización teórica en la pizarra.

Final: Se harán ejercicios de aplicación de la nueva materia en la pizarra, de forma que el alumno pueda ver su aplicación y tener la oportunidad de preguntar las dudas. Se propondrán ejercicios del boletín.

Hay que resaltar que éste es un esquema **flexible.**

_ Organización Temporal de las sesiones dentro de la U.D:

- ***Nuevos contenidos:*** La introducción de nuevos contenidos tendrá lugar en las primeras sesiones de cada semana.

- ***Viernes:*** Los viernes los alumnos están más cansados y se ha buscado expresamente que siempre estén dedicados a ejercicios y proyectos.

- ***Examen:*** También se ha dispuesto que la sesión de examen sea un lunes para que los alumnos estén más descansados y hayan tenido la posibilidad de estudiar el fin de semana.

_ **Primera parte de la Unidad: PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.**

- ***Sesión 1:*** Contextualización, justificación histórica, repaso de ideas previas.
- ***Sesión 2:*** Manipulación de las ecuaciones de la recta. Transformación de vectorial a paramétrica. Transformación de paramétrica a continua. Transformación de continua a implícita.
- ***Sesión 3:*** Manipulación de las ecuaciones del plano. Transformación de vectorial a paramétrica. Transformación de paramétrica a implícita. Ecuación segmentaria.
- ***Sesión 4:*** Resolución de ejercicios.
- ***Sesión 5:*** Ecuación normal del plano. Ecuación del plano que contiene 3 puntos. Plano determinado por recta punto exterior.

Temporización

_ Primera parte de la Unidad: PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

- ***Sesión 6:*** Resolución de ejercicios.
- ***Sesión 7:*** Posición relativa de 2 planos (secantes, paralelos, coincidentes). Posición relativa de tres planos. Haces de planos.
- ***Sesión 8:*** Posiciones relativas de recta y plano (secantes, paralelos, contenida en el plano). Posiciones relativas de dos rectas (secantes, paralelas, cruzadas, coincidentes).
- ***Sesión 9:*** Ejercicio por grupos.
- ***Sesión 10:*** Recapitulación. Resolución de ejercicios y dudas.

_ Segunda parte de la Unidad: PROBLEMAS MÉTRICOS.

- ***Sesión 1:*** Contextualización y ángulos (entre dos rectas, entre dos planos, entre plano y recta).
- ***Sesión 2:*** Proyecciones entre elementos del espacio (de un punto sobre un plano, de un punto sobre una recta, de una recta sobre un plano).
- ***Sesión 3:*** Distancias (entre dos puntos, de un punto a un plano, de un punto a una recta, entre rectas que se cruzan).
- ***Sesión 4:*** Ejercicio práctico.
- ***Sesión 5:*** Áreas (de paralelogramos y triángulos) y volúmenes (de paralelepípedos y tetraedros).

_ **Segunda parte de la Unidad: PROBLEMAS MÉTRICOS.**

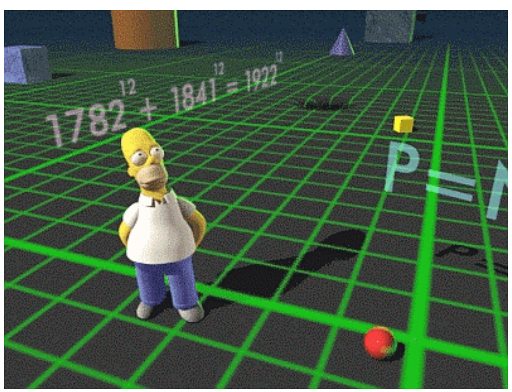
- ***Sesión 6:*** Repaso y corrección de ejercicios.
- ***Sesión 7:*** Prueba tutelada.
- ***Sesión 8:*** Proyecto en grupo.
- ***Sesión 9:*** Examen primera y segunda parte de la unidad.
- ***Sesión 10:*** Corrección de examen primera y segunda parte de la unidad.

Temporización- Cronograma

<table>
<tr><td>Sesión 1 (L)</td><td>A1</td><td>A2</td><td colspan="2">A3</td><td>Ejercicios</td></tr>
<tr><td>Sesión 2 (M)</td><td>Corrección</td><td colspan="2">A4</td><td colspan="2">Ejercicios</td></tr>
<tr><td>Sesión 3 (J)</td><td>Corrección</td><td>A5</td><td>A6</td><td colspan="2">A7</td></tr>
<tr><td>Sesión 4 (V)</td><td>Corrección</td><td colspan="4">A8</td></tr>
<tr><td>Sesión 5 (L)</td><td>Corrección</td><td>A9</td><td>A10</td><td colspan="2">Ejercicios</td></tr>
<tr><td>Sesión 6 (M)</td><td colspan="5">Repaso y corrección de ejercicios</td></tr>
<tr><td>Sesión 7 (J)</td><td colspan="5">Prueba tutorizada</td></tr>
<tr><td>Sesión 8 (V)</td><td colspan="5">A12-13 (Proyecto en grupo)</td></tr>
<tr><td>Sesión 9 (L)</td><td colspan="5">Examen</td></tr>
<tr><td>Sesión 10</td><td colspan="5">Corrección conjunta del examen</td></tr>
</table>

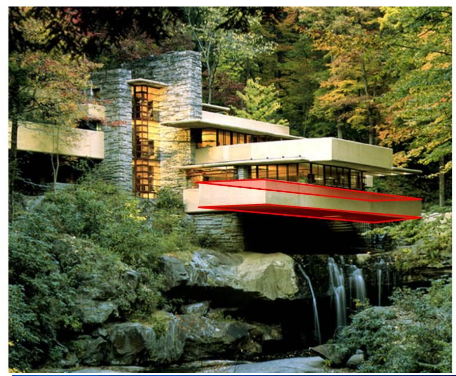
Actividad 1. Homer se pasa al 3D.

Introducción al tema. Motivación. Proyección de un extracto del capítulo de Los Simpsons en el que Homer pasa a las tres dimensiones.



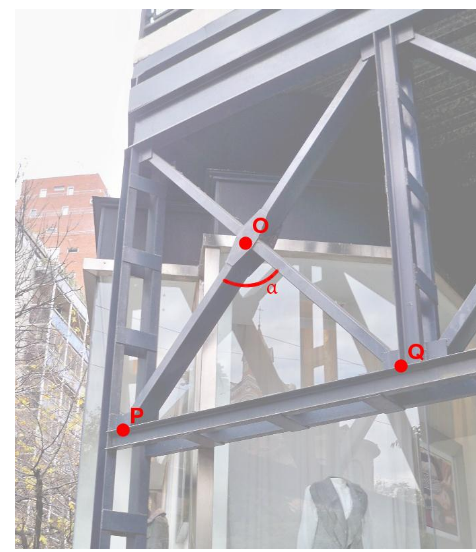
Actividad 2. Geometría cotidiana.

Reconocimiento de planos y rectas en la vida cotidiana.



Actividad 3. Ángulos.

Concepto de ángulo en el espacio. Cálculo de ángulos entre dos rectas, dos planos y recta y plano.



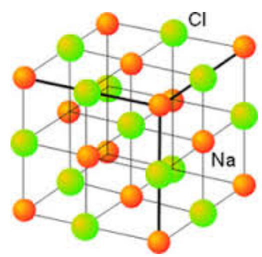
Actividades de contextualización

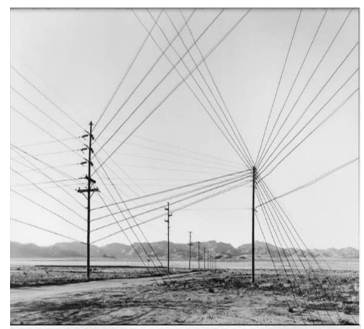
Actividad 1. **Homer se pasa al 3D.**

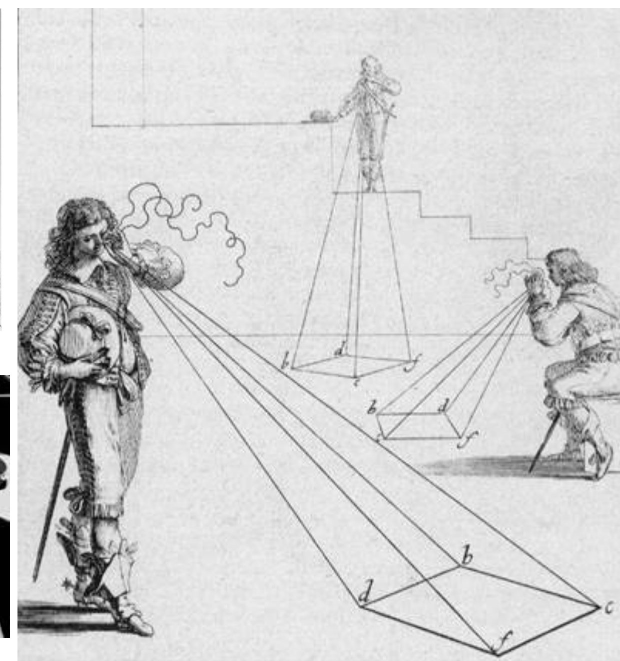
Esta actividad sirve como introducción al tema y para captar la atención del alumnado. Se proyectará un extracto del capítulo de Los Simpsons en el que el protagonista Homer pasa a las tres dimensiones.

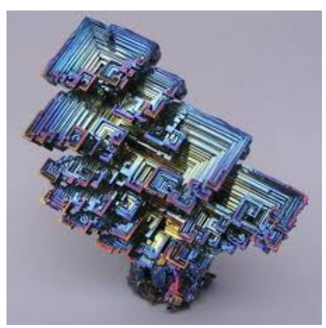
Actividad 2. **Geometría cotidiana.**

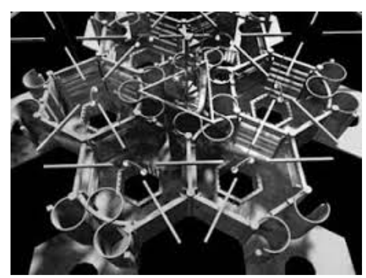
A través de imágenes y fotografías se buscará identificar la presencia de los elementos matemáticos estudiados en situaciones y ámbitos reales: arquitectura, arte, ingeniería, naturaleza… De esta forma se dará un paso más en la comprensión de la geometría tridimensional, que ya se ha estudiado de forma más teórica en la unidad anterior.











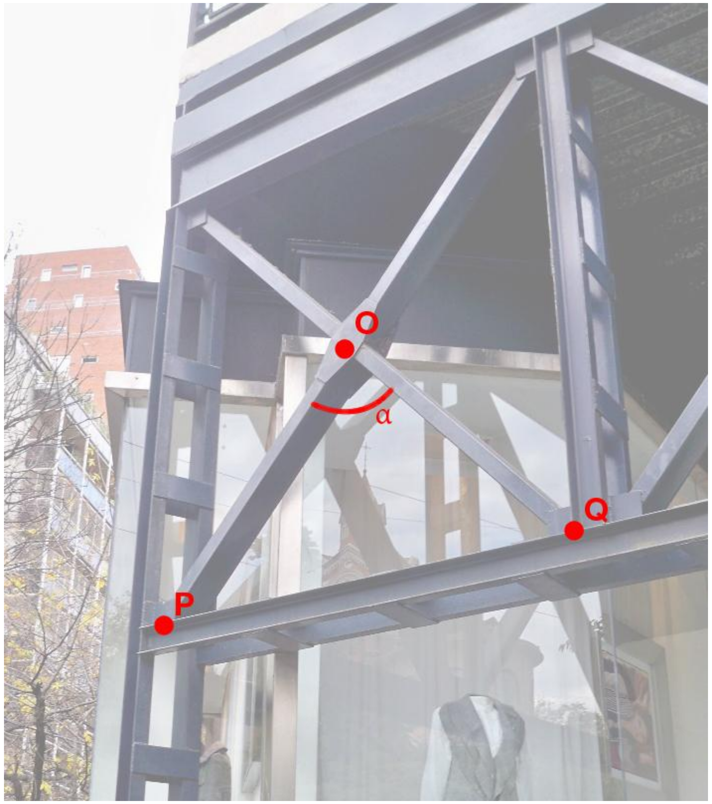
Presentación.

En esta actividad se presentarán los conceptos a estudiar a través de la imagen y la introducción del problema para que los alumnos piensen y propongan posibles estrategias para abordarlos. Después se pasará a resolverlos entre todos, dibujando sobre las imágenes y anotando las expresiones en la pizarra.

Ángulo entre dos rectas:

a. "Conocemos las coordenadas de los puntos inferiores de las diagonales (P y Q) y del cruce entre ambas (O). ¿Podemos saber qué ángulo forma la Cruz de San Andrés?"

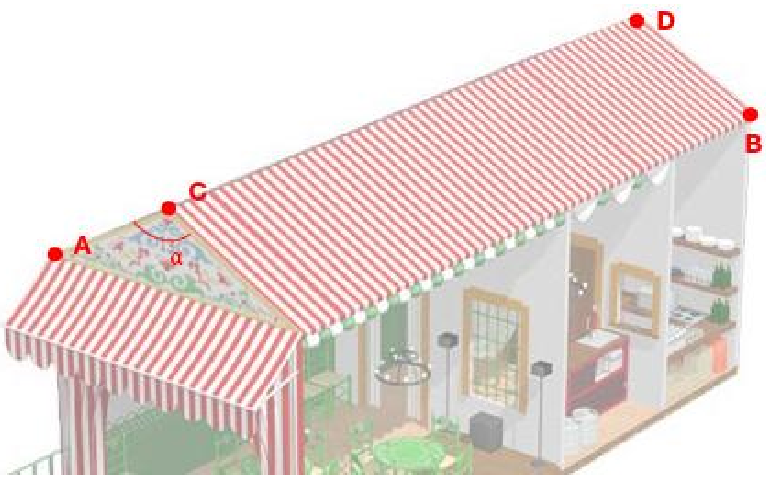
$$\cos(\widehat{r,s}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}})| = \frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}$$



Ángulo entre dos planos:

b. "Estamos diseñando una caseta para la feria. Desde la ordenanza se nos da la diagonal que debe tener el rectángulo de la planta (determinada por los puntos A y B) y la posición de la cumbrera (puntos C y D). ¿Cuál será el ángulo formado por los dos paños de cubierta?"

$$\cos(\widehat{\alpha,\beta}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}})| = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|}$$



Ángulo entre un plano y una recta:

c. "Para diseñar algunas piezas de unión, debemos saber cuál es el ángulo formado por la diagonal AB y cada uno de los paños de la cubierta."

$$\operatorname{sen}(\widehat{r,\alpha}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{n_\alpha}})| = \frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{n_\alpha}|}$$

Ejercicio 5:

Un cubo tiene los vértices de una de sus caras en los puntos de coordenadas (cartesianas regulares): *A(3,0,0); B(0,3,0); C(-3,0,0); D(0,-3,0)*, y los otros cuatro vértices *A', B', C' y D'* tienen su tercera coordenada positiva (siendo *AA', BB', CC' y DD'* aristas del cubo). Se pide:

(a) Determinar razonadamente las ecuaciones de las seis caras del cubo y la de los planos *ACB' y BDA'.*

(b) Determinar el coseno del ángulo diedro formado por los dos últimos planos citados.

Ejercicio 6:

Dada la recta de ecuación: $$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = z+1$$

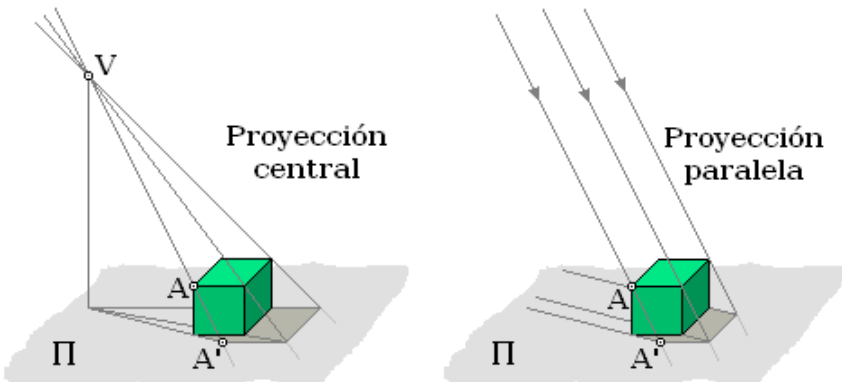
y los puntos *A(1, 1, 0) y B(2, 0, -3),* se pide determinar razonadamente:

(a) Las ecuaciones de los planos α y β que pasan por la recta *r* (es decir, la contienen) y, respectivamente, por el punto *A* y por el punto *B*.

(b) El coseno del ángulo formado por las rectas *r* y *AB*.

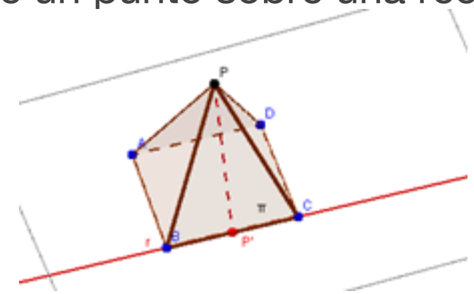
Actividad 4. **Proyecciones.**

Introducción a la idea de proyección a través de ejemplos.

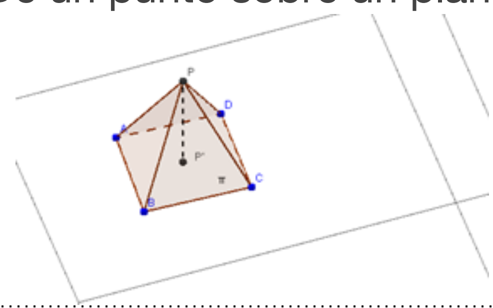


Tras los ejemplos, se abrirá la discusión sobre un caso concreto de cómo se podría obtener la proyección ortogonal.
El procedimiento se visualizará en geogebra para el caso concreto del ejemplo.
Finalmente, se generalizará el procedimiento de forma teórica en la pizarra.

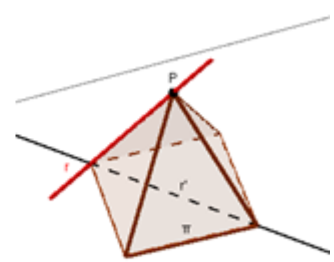
De un punto sobre una recta.



De un punto sobre un plano.



De una recta sobre un plano.



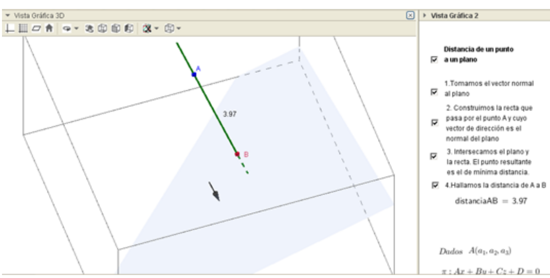
Ejercicio 8:
Dado el plano de ecuación 2x-y+2z=4 y el punto A(1,3,-2), determinar:
a) Las coordenadas de la proyección ortogonal de A sobre el plano (es decir, el punto de intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por A con el propio plano).

Ejercicio 12:
(b) Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ sobre los planos 3x + 4y- 1 = 0 y 4x - 3z - 1 = 0

Ejercicio 22:
Dado el punto P (1 , 2, 1) y la recta: $r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$
calcular:
(a) Las ecuaciones de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.
(b) El punto de intersección de las rectas r y s.
(e) Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

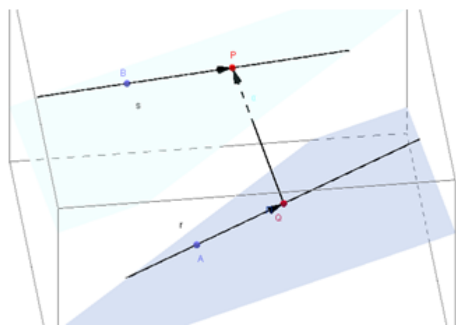
Actividad 5. **Distancias I.**

Entre dos puntos, de un punto a un plano, entre planos paralelos.



Actividad 6. **Distancias II.**

De un punto a una recta, entre rectas paralelas, entre rectas que se cruzan.



Actividad 7. **Problema de la pirámide.**

Aplicación de los conocimientos adquiridos hasta el momento sobre un problema de aplicación en el que hay que interpretar el significado del enunciado para poder trasladarlo a lenguaje algebraico y resolverlo obteniendo las expresiones analíticas y resultados pedidos.

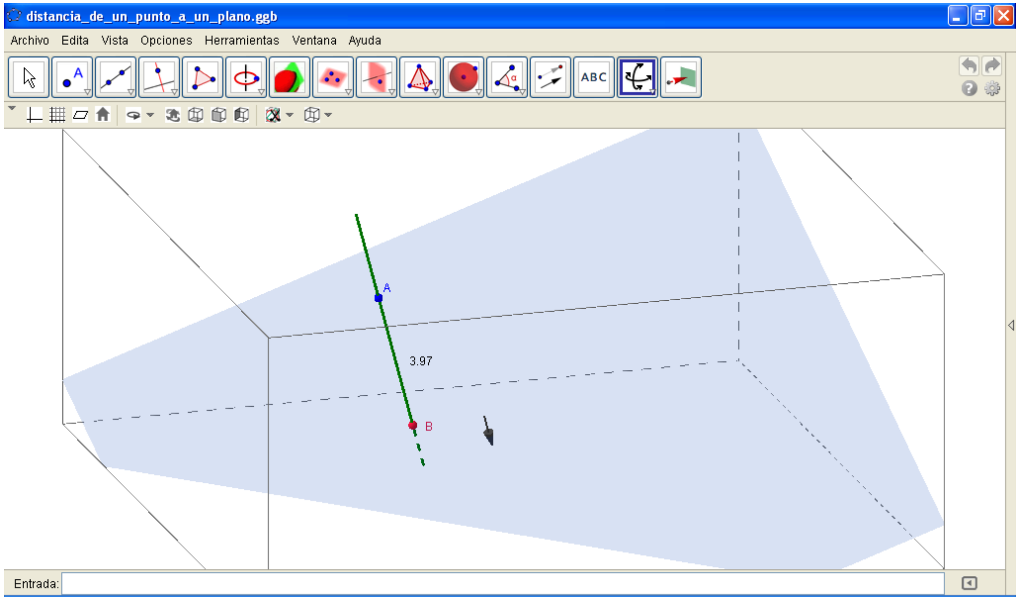
Actividad 5. Distancias

Entre dos puntos, de un punto a un plano, entre planos paralelos.

Se abrirá la discusión sobre cómo se podría obtener la distancia de un punto a un plano.

El procedimiento se visualizará en geogebra para el caso concreto del ejemplo.

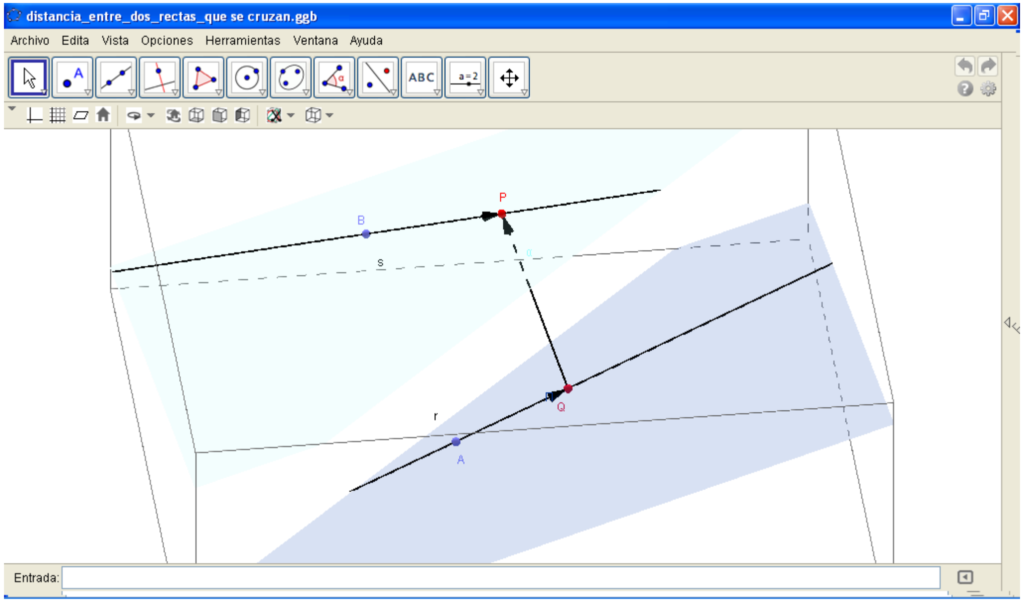
Finalmente, se generalizará el procedimiento de forma teórica en la pizarra.



Actividad 6. Distancias

De un punto a una recta, entre rectas paralelas, entre rectas que se cruzan.

Se abrirá la discusión sobre cómo se podría obtener la distancia de un punto a una recta y los otros.
El procedimiento se visualizará en geogebra para el caso concreto del ejemplo.
Finalmente, se generalizará el procedimiento de forma teórica en la pizarra.



Actividad 7. Problema de la pirámide de Keops.

Alrededor del año 2600 a. C., en la época de mayor apogeo del imperio egipcio, el faraón de la cuarta dinastía Keops ordenó al gran arquitecto Hemiunu que construyera una necrópolis digna de su grandeza, la que hoy conocemos como la pirámide de Keops. Esta construcción fue la más alta del mundo hasta el siglo XIV en que fue superada por el chapitel de la catedral de Lincoln en Inglaterra.
El gran arquitecto dispuso que la base de la pirámide fuese cuadrada y tuviese 52900 m2 para alojar todas las imponentes cámaras funerarias que había diseñado.

Para que los esclavos y las mulas pudiesen arrastrar los bloques de piedra arriba de la pirámide, Hemiunu dispuso que la pendiente de las caras de la pirámide no excediera el 57%. Suponiendo que colocamos un vértice de la base de la pirámide en el origen de coordenadas y que dos de sus lados están situados en la parte positiva de los ejes OX y OY:

Actividad 7. Problema de la pirámide de Keops.

a) Dibuja la pirámide y halla las coordenadas de los vértices de la base.

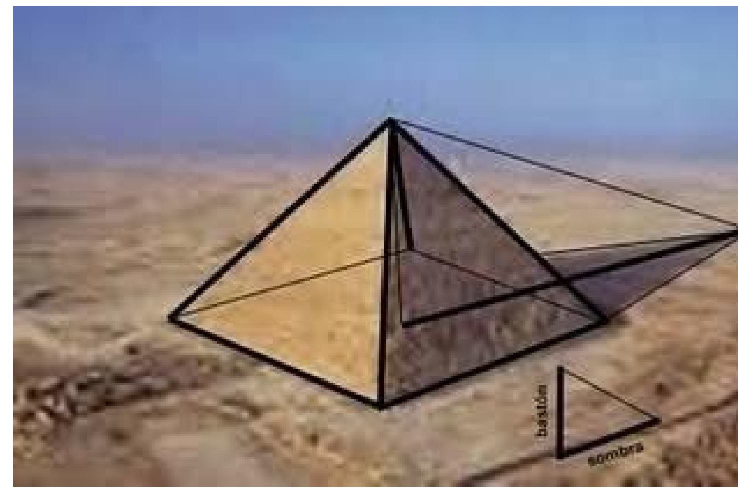
b) Halla las ecuaciones de los cuatro planos que contienen las cuatro caras de la pirámide.

c) Halla las ecuaciones de las ocho aristas de la pirámide.

d) Halla las coordenadas del vértice de la pirámide y su altura sobre la base.

e) Calcula la distancia desde el centro de la base de la pirámide a cada una de las cuatro caras.

f) Calcula la distancia entre cada uno de los lados de base de la pirámide y entre ellos y cada una de las cuatro caras opuestas.



Ejercicio 11:

Dados los planos α y β de ecuaciones respectivas: $\alpha \equiv 2x - y + 2z = 2$

$$\beta \equiv -4x + 2y - 4z = 1$$

se pide:

(a) Probar que son paralelos y determinar la distancia entre ellos.

(b) Determinar la ecuación del plano perpendicular a ambos que pasa por el punto A en que el plano α corta al eje OX y por el punto B en que el plano β corta al eje OY.

Ejercicio 16:

Calcular la distancia entre las rectas

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \qquad s \equiv \begin{Bmatrix} z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{Bmatrix}$$

Ejercicio 17:

(b) Encontrar la distancia entre las rectas de ecuaciones:

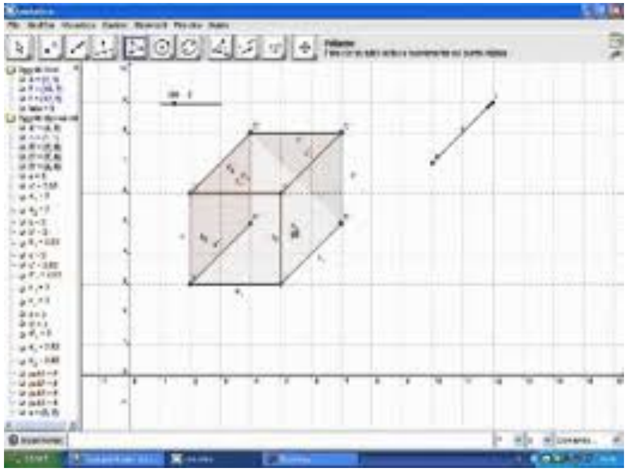
$$r \equiv \begin{Bmatrix} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{Bmatrix} \qquad s \equiv \begin{Bmatrix} z = 3 \\ y + z = 1 \end{Bmatrix}$$

Actividad 8. Midiendo la piscina.

Sesión de trabajo por parejas.

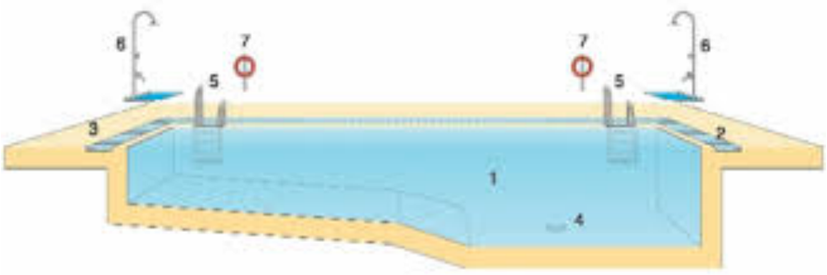
Aplicación de los conocimientos adquiridos de forma gráfica y analítica con apoyo de Geogebra 3D.

Se pondrán en práctica los conceptos estudiados hasta ahora, tanto los relativos a ecuaciones de rectas y planos, como sus posiciones relativas y las distancias y ángulos entre los diferentes elementos.



Presentación.

Esta actividad, que requiere una sesión completa para llevarse a cabo, se realizará por parejas y consistirá en la resolución de una serie de cuestiones acerca del diseño de una piscina, que deberá realizarse de forma gráfica y analítica con apoyo de Geogebra 3D. Se pondrán en práctica los conceptos estudiados hasta ahora, tanto los relativos a ecuaciones de rectas y planos, como sus posiciones relativas y las distancias y ángulos entre los diferentes elementos. También se pretende valorar la capacidad de organización y trabajo en equipo de los alumnos. Al final de la clase se recogerá un documento en papel con los ejercicios resueltos y un croquis de la piscina.



A8.- Midiendo la piscina

“Se nos pide tomar una serie de medidas de la piscina del centro deportivo, cuya superficie es rectangular. Conocemos las coordenadas (en metros) de tres de sus cuatro esquinas: A (4,0,0), B(22,0,0) y C(22,29,0). La piscina está dividida longitudinalmente en dos mitades: una para ocio y otra para natación. La de natación cuenta con dos balizas, cada una de ellas a cinco metros de los bordes y a 1,80 metros sobre la superficie de la piscina. También existe un trampolín situado en el punto medio del borde que delimita la zona de natación sobre el segmento AB, elevado 0,5 metros. También tenemos las coordenadas de tres esquinas del fondo de la piscina: A’(4,0,-1.5), B’(22,0,-1.5) y C’(22,29,-1.5).”

A8.- Midiendo la piscina

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la piscina?

b) ¿Cuál es la ecuación de las rectas que determinan las balizas? ¿Y los puntos sobre los que se apoyan en los mástiles?

c)¿Cuál es la distancia del trampolín a la baliza más cercana? Si un nadador está en el trampolín, ¿bajo qué ángulo ve las dos esquinas opuestas de la piscina?

d) ¿Qué ángulo forman los planos de la superficie y el fondo de la piscina?

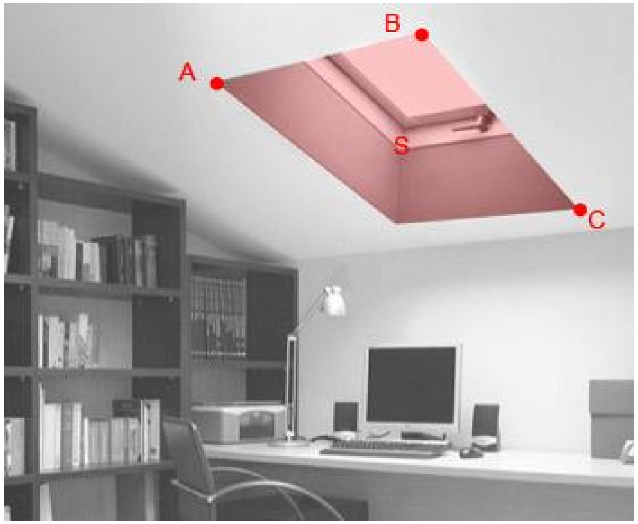
e) Describe con la ecuación de una recta la trayectoria que seguiría un nadador que bucease desde la esquina D' a la B.

f) ¿Cuál es la capacidad de la piscina?

g) Para una competición en la que se va a usar la piscina completa, nos piden que la dividamos en carriles iguales. Sabiendo que cada carril debe medir de ancho entre 2,5 y 3,5 metros, ¿cuántos nadadores podrán participar en la competición? ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que determinan los carriles?

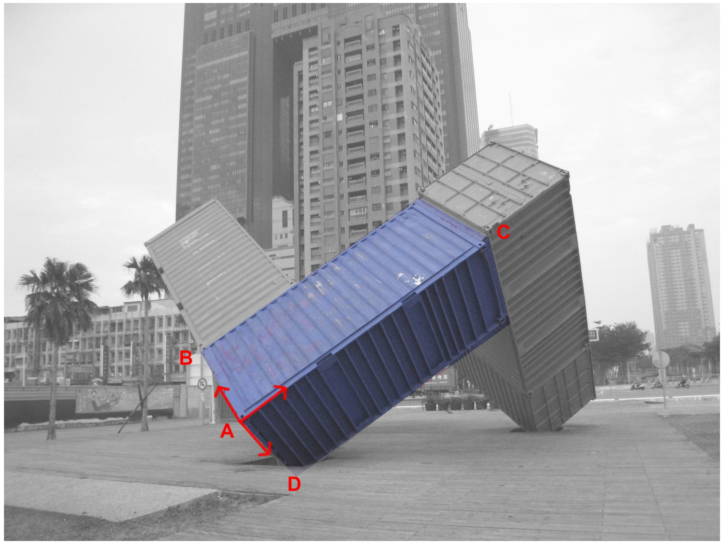
Actividad 9. **Áreas.**

Cálculo de áreas de paralelogramos y triángulos y su correspondencia con el módulo del producto vectorial entre los dos vectores correspondientes a sus lados.



Actividad 10. **Volúmenes.**

Cálculo de volúmenes de paralelepípedos y su correspondencia con el producto mixto entre tres vectores correspondientes a tres lados convergentes. Razonamiento del proceso para hallar el volumen de un tetraedro. Volúmenes de figuras compuestas.



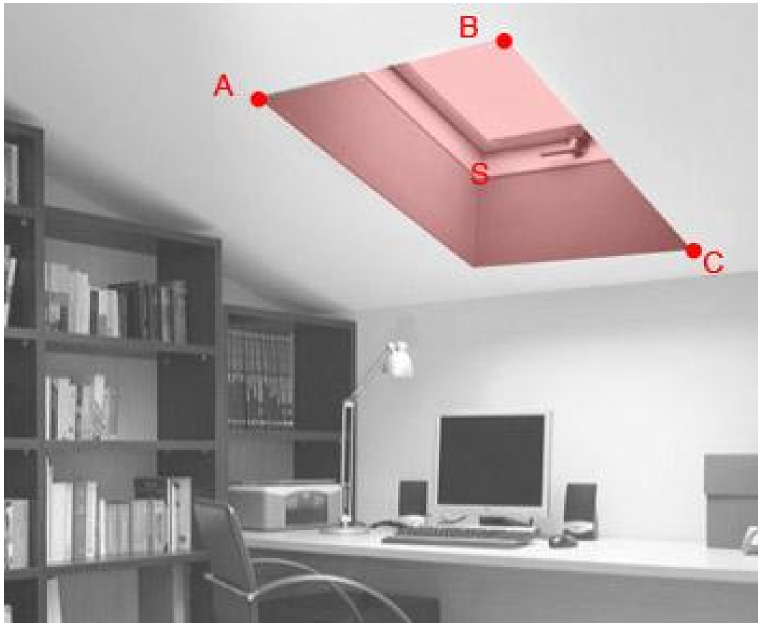
Presentación:

En esta actividad presentaremos cada uno de los conceptos a través de la imagen y la introducción del problema para que los alumnos piensen y propongan posibles estrategias para abordarlos. Después pasaremos a resolverlos entre todos, dibujando sobre las imágenes y anotando las expresiones en la pizarra.

Área de un paralelogramo:

"Conocemos las coordenadas de las esquinas A, B y C de un hueco de ventana en una buhardilla. ¿Podemos calcular el área del hueco conociendo únicamente dichos puntos?"
"¿Y si el hueco fuera el triángulo ABC?"

$$S(ABCD) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$



$$S(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

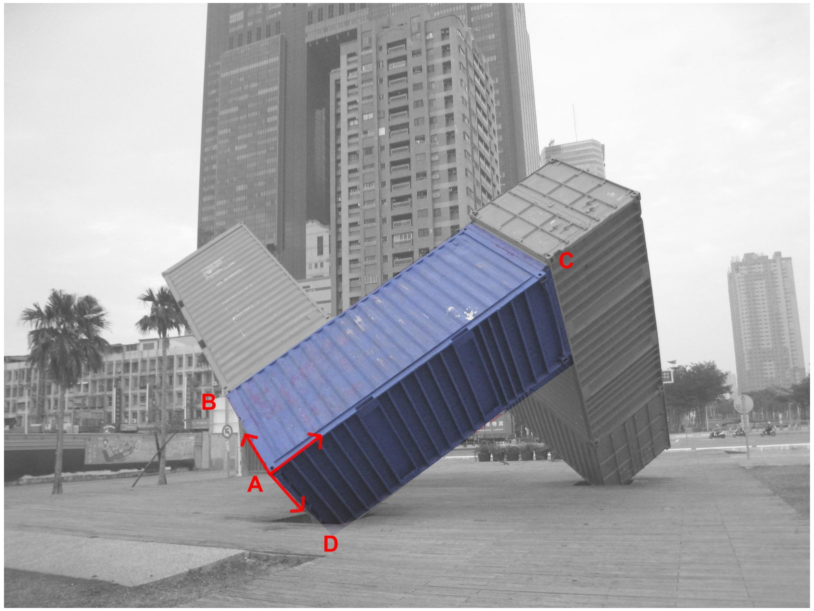
Presentación:

De forma similar, a la actividad anterior, plantearemos un par de cuestiones para deducir los conceptos relativos al cálculo de volúmenes.

Volumen de una figura compuesta por paralelepípedos:

"Queremos calcular el volumen de esta pieza. Sólo conocemos las coordenadas del punto A, puesto que los demás son inaccesibles para nuestras herramientas de medida, pero nos han proporcionado los vectores AB, AC y AD. ¿Cómo podríamos hacerlo?"

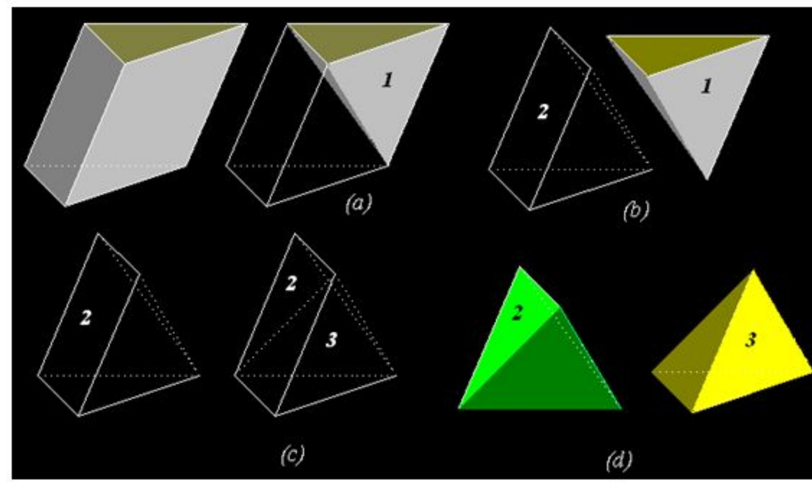
$$V = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$



Deducción del volumen de un tetraedro a partir del de un paralelepípedo:

Sabemos que la base de un tetraedro es un triángulo ABC y, si conocemos dos vectores (AB y AC), podemos hallar su área tal a partir del módulo del producto vectorial de ambos. En el caso de las pirámides, que son cuerpos geométricos cuyas bases son polígonos y sus caras triángulos, tantos como lados tiene el polígono de la base, hay que tener en cuenta que, de un prisma triangular se pueden obtener tres pirámides de base triangular o tres tetraedros de igual volumen. Por eso, el volumen de un tetraedro equivale a la tercera parte del volumen del prisma.

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|\right) = \frac{1}{6}\,\left|\det(AB, AC, AD)\right|$$



Ejercicio 30:

Hallar un plano que pasando por A (0, 2, 0) y B (0, 0, 2) corte al eje OX en un punto C, tal que el área del triángulo ABC valga 4.

Ejercicio 35:

Dado el plano de ecuación $2x + 4y + z- 8 = 0$, sean A. B y C sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide determinar razonadamente:

(a) El área del triángulo ABC.

(b) Las ecuaciones de la recta perpendicular a ese plano y que pasa por el origen de coordenadas.

(c) Volumen del tetraedro determinado por el plano dado y los tres planos coordenados.

Ejercicio 37:

Calcular el volumen del tetraedro de vértices 0(0, 0, 0), A (1, 0, 0), C (0, 1, 0) y D (0, 0, 1) vectorialmente. Dibujar este tetraedro y comprobar el resultado utilizando la fórmula geométrica.

Sesión 6 - Repaso y corrección de ejercicios

La sesión se dedicará a la corrección de ejercicios y resolución de dudas de aquellos ejercicios del boletín (u otros, propuestos por los alumnos y alumnas) que no haya dado tiempo a tratar en las sesiones anteriores.

BOLETÍN DE EJERCICIOS

Actividad 11. Prueba Tutelada.

Actividad de repaso, ejercicio “tipo examen” tutelado por el docente.

Objetivos de la actividad:

- Familiarizar al alumno con la estructura de la prueba.
- Desarrollar los ejercicios en un tiempo limitado.
- Resolver las dudas finales.

Ejercicios:

- P.A.U. 2013
- Teoría

Modelo de Examen para hacer en clase, Bloque II, Geometría _ 2º de Bachillerato C y T

Alumno: ____Fecha:___________

Ejercicio 1.- (TEORÍA) Demostrar que el conjunto de vectores $\{(1,2,0), (2,-1,1), (1,0,1)\} \subset R^3$ es una base de R^3 (R).

Ejercicio 2.- (TEORÍA) Hallar la ecuación del plano paralelo a $x + 2y - z + 1 = 0$ y que diste $\sqrt{6}$ del origen.

Actividad 12. Construcción Torre de espaguetis.

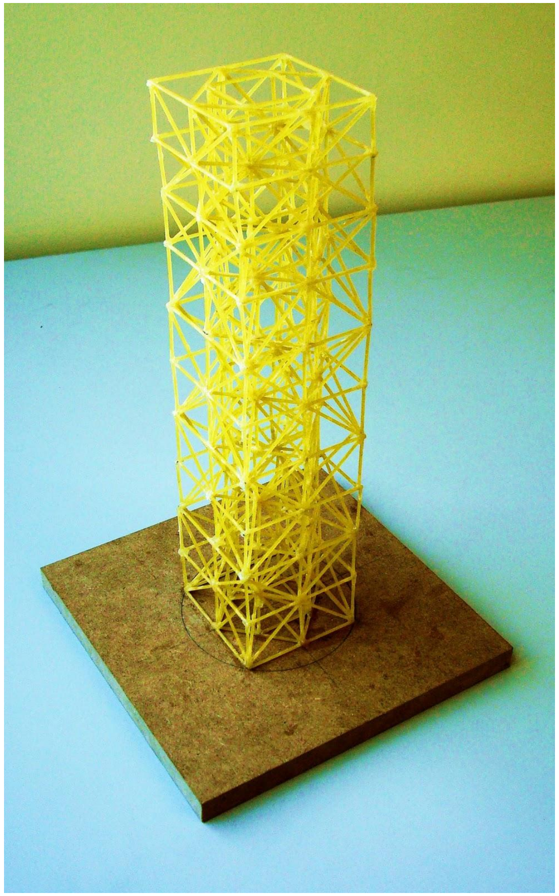
<table>
<tr><td>Objetivos</td><td colspan="3">Construir una torre con espaguetis estable.
Proporcionar experiencia compartida que exige la implicación de todos los miembros del grupo.
Desarrollar ideas y aplicarlas.
Colaborar entre los miembros del grupo.
Aprender patrones geométricos, tales como las triangulaciones como base para la construcción.</td></tr>
<tr><td>Contenidos</td><td>Conceptuales</td><td>Procedimentales</td><td>Actitudinales</td></tr>
<tr><td></td><td>Estructuras.
Geometría.
Prototipos.</td><td>_Construcción de la estructura con los requisitos que se explicitan.
_Visualización de un vídeo relacionado con la actividad.
_Visualización de imágenes relacionadas con la actividad.</td><td>_Colaboración dentro del grupo.
_Respeto de las diferentes ideas.</td></tr>
</table>

A12.- Torre de espaguetis

Presentación

“Construye en grupo de cuatro personas una torre de espaguetis que sea lo suficientemente estable para soportar una nube de golosina. Esta actividad supone un reto, el cual, exige la implicación de todos para conseguir el mejor resultado”.

1. **Construcción de la torre** durante 18 minutos.
2. **Comprobación de altura, estabilidad** y resistencia de la estructura así como ver las diferentes estructuras de otros grupos.
3. Recogida de datos a través de **un croquis**.
4. **Visualización de un vídeo** e imágenes relacionadas con la actividad.
5. Aplicaciones a la **vida real**.
6. Comprobación en **Geogebra**.



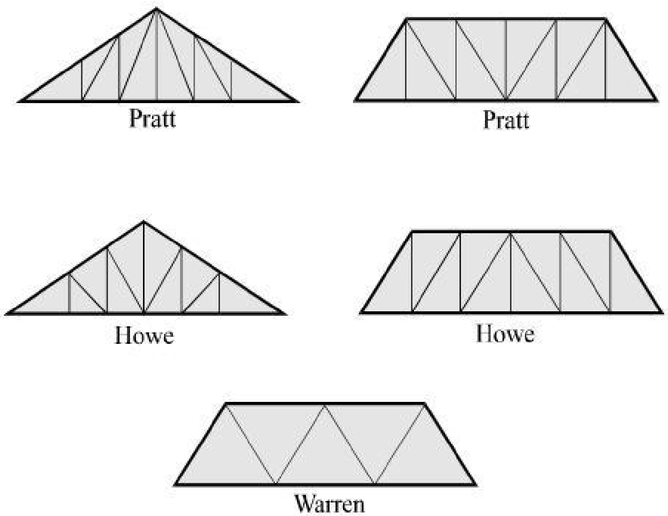
A12.- Torre de espaguetis

4. Visualización de vídeo.

http://www.ted.com/talks/tom_wujec_build_a_tower?language=es

5. Aplicación a la vida real.

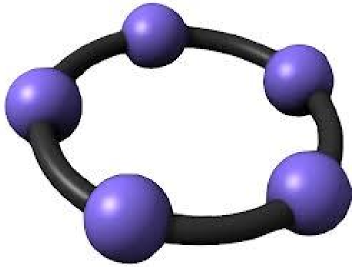
Información sobre las distintas tipologías de cerchas y su aplicación a la vida real en obras de construcción tanto de ingeniería como de arquitectura.



6.Geogebra.

Los alumnos/as ayudados de sus croquis, establecerán un sistema de coordenadas en los que su estructura queda enmarcado. Plantearán las ecuaciones de la rectas que contienen a cada uno de sus espaguetis, así como los puntos que serán los nudos de unión (nubes).

Se recogerá el documento en papel del croquis de la estructura y los datos obtenidos del programa Geogebra 3D.

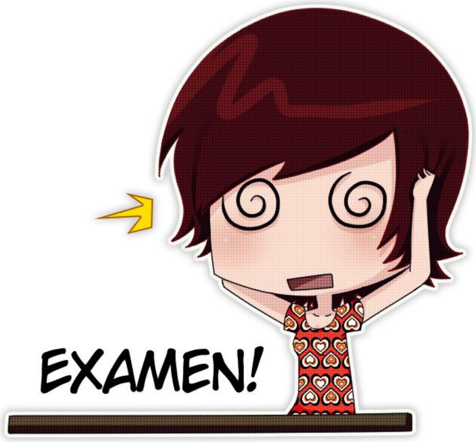


Examen Final.

Estructura:

- Modelos A y B, equivalentes en dificultad y contenido.
  - Preguntas 1 y 2: TEORÍA (2 Puntos).
  - Pregunta 3: Cuestión práctica corta, más sencilla (Atención a la Diversidad) (2 Puntos).
  - Preguntas 4 y 5: Cuestiones prácticas P.A.U. (6 Puntos).

Opción A **Opción B**



Sesión 10 - Corrección conjunta del examen

Corrección Conjunta del Examen. Estimación de la nota por parte de los alumnos.

- Corrección pública en la pizarra.
- El alumno tiene un rato posteriormente para ver su propio ejercicio corregido.
- Resto de la sesión: Atención personalizada a cada estudiante. Dudas finales.

SOLUCIÓN OPCIÓN A

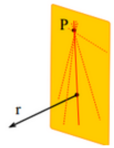
Ejercicio 1.- (1 Punto)

¿Puede ser una recta perpendicular a una recta de un plano sin que lo sea al plano? Justifica tu respuesta.

( ) No

(X) Sí

Por un punto P exterior a una recta r, se pueden trazar infinitas perpendiculares a r. Todas ellas están contenidas en un plano que pasa por P y es perpendicular a la recta r.



Hay que tener en cuenta que dos rectas perpendiculares no tienen que cortarse necesariamente. Basta que sus vectores sean ortogonales.

Ejercicio 2.- (1 Punto)

Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(1,5,0)$ y $\vec{v}(-3,0,2)$

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$cos(\alpha) = \frac{1\cdot(-3)+5\cdot 0+0\cdot 2}{\sqrt{1^2+5^2+0^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+0^2+2^2}}$$

SOLUCIÓN OPCIÓN B

Ejercicio 1.- (1 Punto)

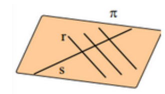
Por un punto P exterior a una recta r, ¿cuántas rectas perpendiculares a r se pueden trazar desde P? Justifica tu respuesta.

(X) Infinitas

( ) Una

( ) Dos

Hay infinitas rectas perpendiculares a s y que están contenidas en el plano, como se puede apreciar con el dibujo.



Ejercicio 2.- (1 Punto)

Halla el valor de *m* para que los vectores $\vec{u}(m,2,3)$ y $\vec{v}(2,-3,5)$ sean ortogonales.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

$$m\cdot 2+2\cdot(-3)+3\cdot 5 = 0 \implies m = -\frac{9}{2}$$

Ejercicio 3.- (2 Puntos)

Se sabe que las rectas:

$$r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = b+t \end{array}\right\} \quad s \equiv \left.\begin{array}{l} x-y+z=3 \\ 6x+2z=2 \end{array}\right\}$$

están contenidas en un mismo plano.

Atención a la diversidad

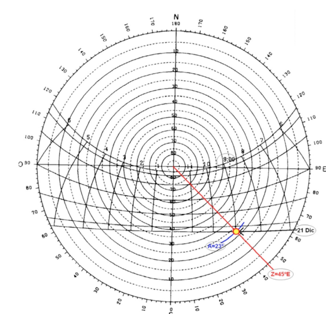
_ Medidas ordinarias

- Diseño de tareas para realizar en grupo para favorecer la cooperación y la ayuda mutua.
- Diseño de actividades abiertas para favorecer el diálogo y el contraste.

_ Alumnos con necesidades educativas especiales

- **Alumnos con dificultades de aprendizaje**: actividades de refuerzo destinadas a la adquisición de los contenidos mínimos. Se recogerán en el boletín para aquéllos que quieran realizarlas de forma voluntaria.

- **Alumnos con altas capacidades o que dominen los contenidos de la unidad:** actividades de ampliación en las que aparecerán figuras geométricas diferentes a las estudiadas. De forma voluntaria, se propondrá un pequeño trabajo de investigación sobre la carta estereográfica.



[ACTIVIDADES DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD]

Atención a la diversidad

Alumnos con hipoacusia (con Adaptación Curricular elaborada por el Departamento de Orientación del centro): además del apoyo de la traductora, se procurará apoyo gráfico para todos los problemas y conceptos explicados en clase: imágenes, proyecciones, croquis… Se entregará a cada alumno un guión previo con el contenido de las sesiones y los conceptos más relevantes.

Clima de clase

_ Trabajo en diferentes modalidades (parejas, grupos, individual…)

- Fomento de la cooperación y la organización.
- Desarrollo de hábitos de trabajo colectivo, muy frecuente en las disciplinas científicas y técnicas.

_ Distribución del aula de clase

- Distribución de mesas de dos en dos (distribución habitual).
- Los alumnos que se distraigan deben pasar a las primeras filas.
- Tareas por parejas: aula de clase o aula de Informática.
- Tareas por grupos (4 integrantes): taller de Tecnología.

_ Clima activo-participativo

- Formulación de preguntas directas en clase.
- Desarrollo de las capacidades de expresión y participación.

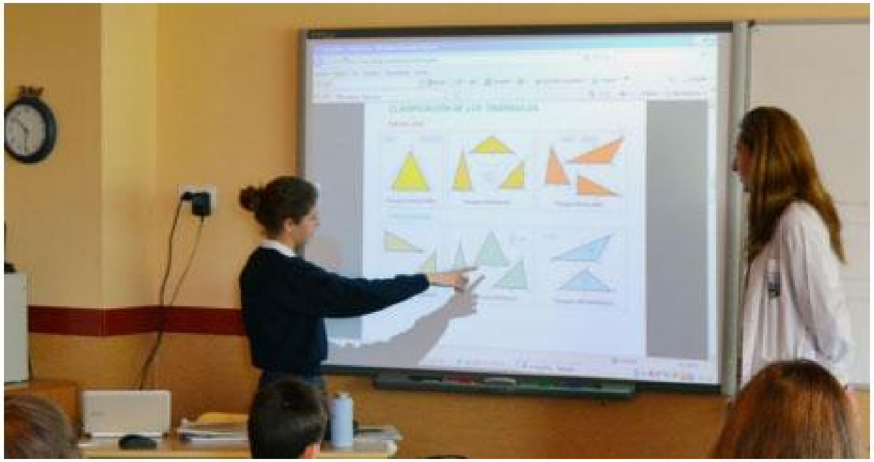
Recursos

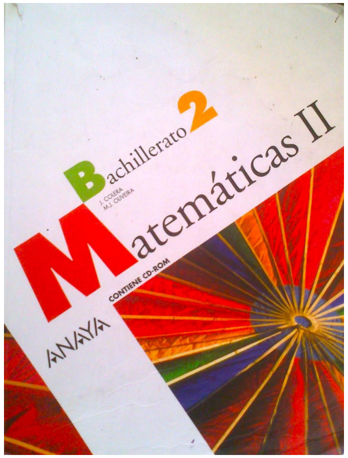
_ Informáticos

- Pizarra digital.
- Ordenadores portátiles.
- SW Geogebra.
- Internet y video.

_ Otros

- Libro de texto elegido por el departamento.
- Boletín de ejercicios.
- Espaguetis y nubes para el trabajo de grupo.
- Pizarra tradicional.
- Guión de las sesiones para el alumno con hipoacusia.
- Calculadora.





_ Del alumnado

Criterios dados por el RD 1467/2007:

2. Transcribir situaciones de la geometría a un **lenguaje vectorial** en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores.

3. Transcribir problemas reales a un **lenguaje gráfico o algebraico**, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto.

- Comienzo de curso con una **evaluación inicial** (Artículo 4.3 de la Orden de 15 de diciembre de 2008 de la Junta de Andalucía).
- **Evaluación conjunta de objetivos y contenidos** al finalizar la denominada primera parte de la unidad (puntos, rectas y planos en el espacio) y segunda parte de la unidad (problemas métricos), siendo éste un único examen. (80% de la calificación obtenida).

A las calificaciones obtenidas en las pruebas se les sumará:

- El 15% de la calificación obtenida en: **trabajo en clase**, **proyectos**, ayuda/**colaboración** con los compañeros/as, etc...
- El 5% de la calificación obtenida en **asistencia** y **puntualidad**, **atención** y **participación** en clase.
- + 10% Extra por la finalización de actividades (pirámide y piscina) **en casa.**

_ De la unidad

Evaluación participativa, esto implica una autoevaluación que supone una mejora permanente.

Criterios de evaluación de los objetivos.

- Están encuadrados en el Proyecto Curricular de Centro.
- Se construyen a partir de:
  - Los Objetivos Generales de Etapa, de Ciclo, de Área.

Criterios de evaluación de los contenidos/secuenciación.

- ¿Se han tenido en cuenta los diferentes tipos de contenidos?
  - Conceptuales, Procedimentales, Actitudinales.
- ¿Los contenidos seleccionados posibilitan alcanzar los objetivos didácticos?

Criterios de evaluación de la temporización.

- Situación de la Unidad Didáctica dentro del curso/ciclo.
- ¿Se determina en número de días (horas) dedicados a la Unidad Didáctica?

Criterios de evaluación de las actividades.

Criterios de evaluación de los recursos materiales.

Criterios de evaluación de la evaluación a los alumno.

_ Bibliografía

- Matemáticas II, 2º de Bachillerato, Ed. Anaya (J. Colera y M.J. Oliveira.)
- *Algoritmo*. Libro de texto para 2º Bachillerato de Ciencias Naturales y de la Salud y Tecnología. Editorial SM. (José Ramón Vizmanos et al.)

_ Webgrafía

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/index.htm
- http://personales.unican.es/gonzaleof/
- http://issuu.com/manueljesusquidiello/docs/2bto
- http://www.quidiello.es/web/?q=2btociencias
- http://euclides.us.es/da/apuntes/met/TEMA-10.pdf
- http://www.juntadeandalucia.es/boja/2008/149/2
- http://www.boe.es/boe/dias/2007/11/06/pdfs/A45381-45477.pdf
- http://www.juntadeandalucia.es/boja/2009/2/5
- http://recursos.cepindalo.es/mod/book/tool/print/index.php?id=1131
- http://www.catedu.es/matematicas_blecua/index_ciencias.htm
- http://www.geogebratube.org/student/m2891
- http://www.geogebratube.org/student/m4929

¡Fin!


THANK
YOU
GRACIAS
ARIGATO
SHUKURIA
DANKSCHEEN
TASHAKKUR ATU
YAQHANYELAY
SUKSAMA
EKHMET
GRAZIE
MEHRBANI
PALDIES
BOLZÏN
MERCI
BİYAN
SHUKRIA
TINGKI
GOZAIMASHITA
EFCHARISTO
JUSPAXAR
KOMAPSUMNIDA
MAAKE