

# Estudio y representación gráfica de funciones

1º Bachillerato Ciencias y Tecnología



Pablo Barba Camacho  
Estrella Criado Gallego  
Covadonga Díaz Regodón  
Fco. Javier Doblás Charneco

- 1. Contextualización**
- 2. Justificación**
- 3. Contenidos**
- 4. Conceptos preliminares**
- 5. Objetivos**
- 6. Metodología**
- 7. Clima de clase**
- 8. Recursos a utilizar**
- 9. Temporización**
- 10. Atención a la diversidad**
- 11. Evaluación**
- 12. Bibliografía y Webgrafía**

# CONTEXTUALIZACIÓN

---

## Centro

- Situado en un barrio periférico de Sevilla
- Barrio humilde de clase media-baja
- Zona sin industria, exclusiva de residencia, por lo que hay una alta densidad de población
- Grado de conflictividad muy reducido
- Familias tradicionales, pocas familias desestructuradas
- Alta implicación de los padres en la educación de los alumnos
- Una línea por cada bachillerato
- Departamento de matemáticas formado por dos Ingenieros Industriales, un Arquitecto y un Ingeniero Informático

## Aula

- Clase de 30 alumnos
- Un alumno de altas capacidades
- Dos alumnos repetidores
- No hay alumnos con necesidades educativas especiales
- No hay alumnos con discapacidades físicas
- No hay alumnos con problemas de comprensión del español

## ➤ Normativa

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación
  - **Real Decreto 1647/2007, de 7 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas**
  - Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía
  - Decreto 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía
  - Orden de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía
- ❖ En Bachillerato no se evalúa por competencias, se evalúa la adquisición de contenidos por parte del alumnado.



## ➤ Histórica (I)

- Las primeras relaciones observadas entre dos variables se reflejan en las tablas de los astrónomos babilónicos (1800-1600 a.C.)
- A **Nicole Oresme** (1323-1382) se le atribuye la primera aproximación al concepto abstracto de función para describir las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes
- **Galileo Galilei** (1564-1642), une el estudio del movimiento al concepto de función ligado a la idea de dependencia de cantidades variables de Oresme
- **Gotfried W. Leibniz** (1646-1716) utilizó por primera vez el término “función”
- **Jean Bernoulli** (1667-1748) definió por primera vez el concepto de función: *"Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de la manera que sea, por esa variable y por constantes"*

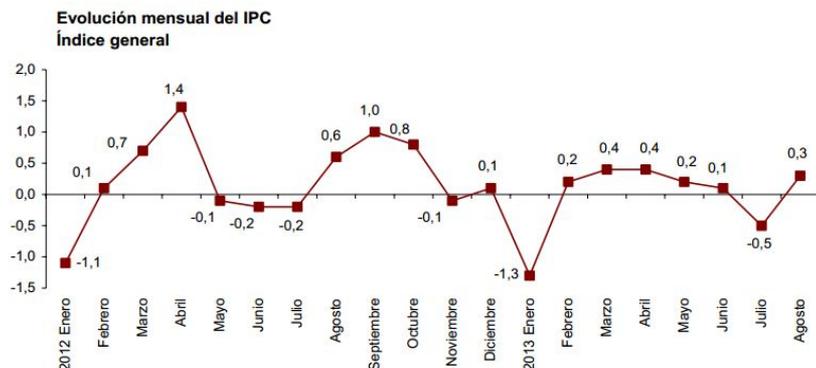
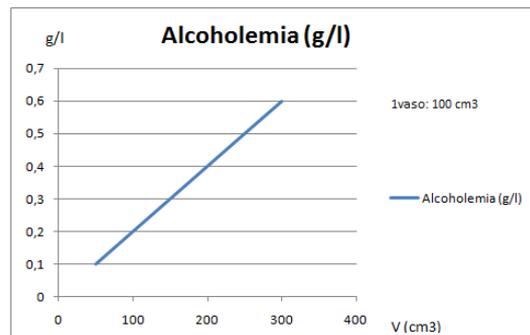


## Histórica (II)

- **René Descartes** (1596, 1650) mostró el camino para la introducción de la noción de función, dando a la geometría una visión analítica. Su principal aportación fue su visión de que un punto cualquiera del plano geométrico podría ser representado por medio de un par ordenado , llamadas luego en honor a él *“coordenadas cartesianas”*
- **Leonhard Euler** (1707, 1783) completó en 1748 la definición de función cambiando la palabra *“cantidad”* por *“expresión analítica”*
- En 1755 Euler, en su libro *“Institutiones calculi differentialis”*, dio una definición general del concepto función: *“Si algunas cantidades dependen de otras del tal modo que si estas últimas cambian, también lo hacen las primeras; entonces, las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas”*. También introdujo la notación  $f(x)$  para hacer referencia a la función aplicada sobre el argumento
- **Edouard Goursat** en 1923 definió la función tal y como aparece en la mayoría de los libros de texto de hoy día: *“Se dice que  $y$  es una función de  $x$  si a cada valor de  $x$  le corresponde un valor de  $y$ , esta correspondencia se indica mediante la ecuación  $y=f(x)$ ”*

## ➤ Aplicación a la vida real

- Fenómenos de cambio reflejados en los medios de comunicación: **sociales** (los crecimientos demográficos), **económicos** (la inflación, la evolución de los valores bursátiles), **deportivos, políticos...**
- Fenómenos **físicos** (la variación de la presión atmosférica, la velocidad y la aceleración, la gravitación universal, las leyes del movimiento, la función de onda de una partícula a escala cuántica), **químicos** (la desintegración de sustancias radiactivas), **naturales** (la reproducción de especies vegetales y animales)
- Vigilancia de la **salud** (la tasa de alcoholemia, los electrocardiogramas)
- Etc.





## Conceptuales

- Función real de variable real
- Formas de expresar una función
- Dominio y Recorrido
- Función definida a trozos
- Puntos de corte con los ejes de coordenadas
- Simetría. Función par e impar
- Periodicidad. Periodo
- Tasa de variación en un intervalo
- Continuidad y discontinuidad
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos relativos y absolutos
- Representación de funciones elementales





## Procedimentales

- Reconocer una función de variable real y distinguir la variable dependiente e independiente
- Manejar la traslación entre las diferentes formas de representación
- Caracterizar una función
- Representar funciones elementales
- Reconocer la simetría y periodicidad de una función
- Calcular e interpretar la tasa de variación y la tasa de variación media
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Comprobar la continuidad de una función en un punto
- Determinar los máximos y los mínimos relativos y absolutos
- Reconocer las características de una función sencilla utilizando el vocabulario y la nomenclatura adecuados
- Interpretar y analizar funciones sencillas que describan situaciones reales

## ➤ Actitudinales

- Apreciación de la precisión y utilidad de los lenguajes gráficos para representar y resolver problemas de la vida cotidiana
- Gusto por la resolución de situaciones científicas, usando la representación de funciones como un método preciso y práctico
- Sentido crítico ante los resultados obtenidos al representar una función
- Curiosidad y tenacidad en la búsqueda de relaciones entre magnitudes y fenómenos
- Valoración crítica frente a informaciones de carácter funcional que aparecen en los medios de comunicación
- Satisfacción y gusto por la presentación cuidadosa y ordenada de los trabajos

# CONCEPTOS PRELIMINARES

Esta UD será una introducción a todo el bloque de análisis de Matemáticas I, por lo que se repasan conceptos sobre funciones que deben haber adquirido durante la secundaria.

Por otro lado, los alumnos deben manejar los siguientes contenidos:

- Números reales
- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado
- Razones trigonométricas
- La recta en el plano
- Vectores
- Movimientos en el plano
- Cónicas



## ➤ **Generales** (RD 1647/2007 de 7 de noviembre)

- Comprender y aplicar conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas
- Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas
- Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas
- Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico
- Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales
- Utilizar el discurso racional
- Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática
- Expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente



## Particulares

- Entender el papel que desempeña una variable en una relación entre magnitudes
- Conectar el estudio de las relaciones funcionales con la realidad
- Interpretar adecuadamente una expresión funcional de cualquier tipo
- Determinar el dominio de una función y su recorrido
- Caracterizar una función: signo, monotonía, acotación, simetrías y periodicidad
- Resolver un problema con autonomía e iniciativa personal
- Interpretar fenómenos sociales y científicos susceptibles de ser expresados con funciones

- **Método constructivista para un aprendizaje significativo**
  - Construcción de nuevos conceptos matemáticos a partir de los ya conocidos
  - Deducción de relaciones entre los diferentes conceptos
  
- **Aprendizaje por descubrimiento**
  - Cada nuevo concepto matemático se muestra con un ejemplo antes de explicar el concepto teórico
  
- **Aplicación a la vida real**
  - Resolución de problemas existentes en su entorno social
  
- **Uso de nuevas tecnologías** (ordenadores, calculadoras, etc)
  - Desarrollo de determinados procedimientos rutinarios
  - Interpretación y análisis de situaciones diversas
  
- **Estimulación del trabajo autónomo y del trabajo en grupo**

# CLIMA DE LA CLASE

---

- En las **sesiones teórico-prácticas** los alumnos estarán sentados individualmente
- En las **sesiones de uso de GeoGebra** los alumnos se sentarán por parejas
- En la **sesión del examen** estarán sentados individualmente

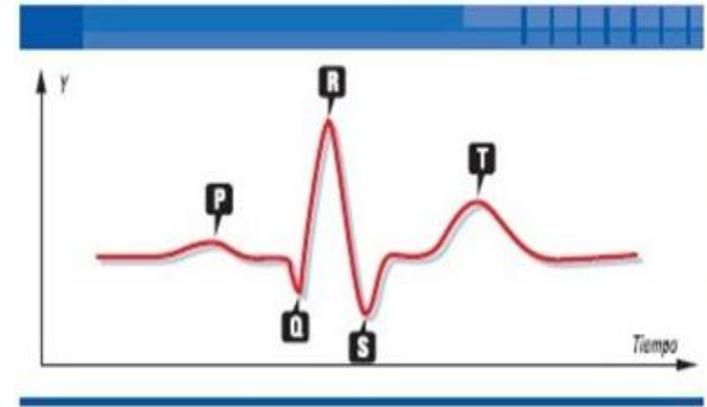
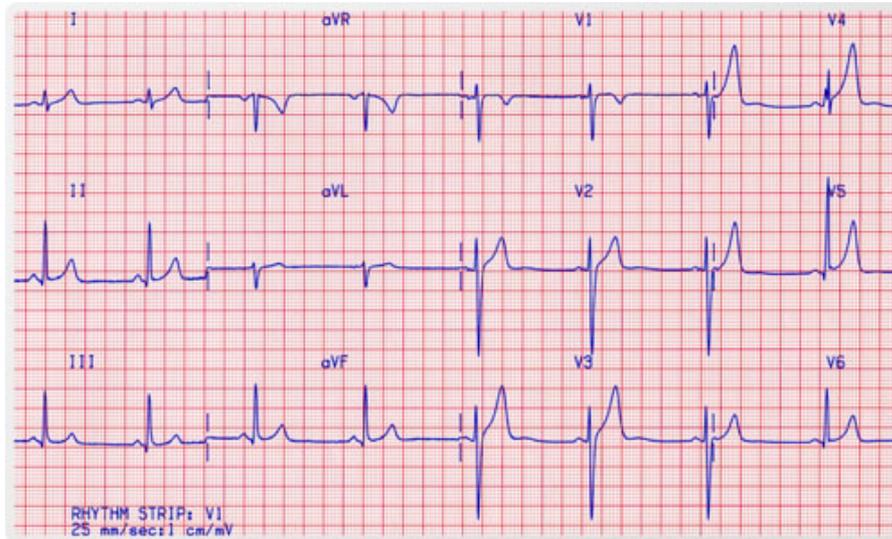
- Pizarra tradicional y tizas blanca y roja
- Calculadora científica
- Escuadra y cartabón, regla milimetrada
- Papel cuadriculado
- Proyector
- Ordenador del profesor
- Ordenadores del aula de informática con conexión a internet
- Software gratuito: GeoGebra
- El libro de texto consensuado por el departamento



## 11 sesiones de 60 minutos cada una

- **Sesión 1:** Ideas previas. Introducción al tema. Presentación del trabajo en grupo
- **Sesión 2:** Formas de expresar una función. Dominio y Recorrido de una función. Función inyectiva
- **Sesión 3:** Función definida a trozos
- **Sesión 4:** Signo y puntos de corte con los ejes de coordenadas
- **Sesión 5:** Simetría y periodicidad. Tasa de variación media
- **Sesión 6:** Continuidad de una función. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos
- **Sesión 7:** Función real de variable real. Función polinómica
- **Sesión 8:** Función racional. Función irracional
- **Sesión 9:** Función exponencial. Función logarítmica
- **Sesión 10:** Repaso
- **Sesión 11:** Examen

## Brainstorming (I)



## Preguntas para guiar las respuestas de los alumnos:

- ¿Sabéis qué es esta imagen?
- ¿Sabéis qué es un electrocardiograma?
- ¿Os han hecho alguna vez un electrocardiograma o habéis visto alguno?
- ¿Qué creéis que representa?
- ¿Cómo lo interpretaríais?

## Brainstorming (II)



### Preguntas para guiar las respuestas de los alumnos:

- Si sostienes un collar por los extremos, ¿qué se forma?
- Todas las curvas imaginables, ¿corresponden a la gráfica de una función? ¿A qué función corresponde la curva que forma un collar suspendido y sometido únicamente a su propio peso?
- ¿En qué otros sitios has visto esta curva?
- ¿Es esa curva una parábola? ¿Por qué?

## El origen del concepto función

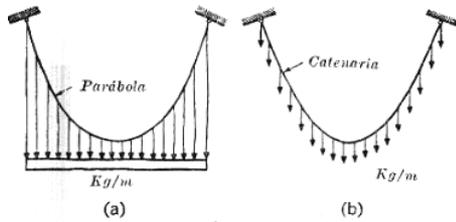
En el mundo antiguo, los astrónomos babilonios representaron **funciones tabuladas** con las que pretendían, por métodos cuantitativos, buscar regularidades **para predecir fenómenos que se repetían periódicamente, como los movimientos lunares y planetarios.**

A lo largo de la historia **el concepto función nació ligado a la idea de dependencia de cantidades variables, en unión al estudio del movimiento**, en época de Galileo Galilei (1564-1642), y con la caracterización dada por Nicolás de Oresme (s. XIV) : *"Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento"*. Esta concepción de carácter físico y geométrico antecedió a la **noción cartesiana de dependencia numérica.**

Este concepto resultó demasiado restrictivo para las necesidades de la física matemática, por lo que la idea de función debió pasar por un largo proceso de generalización y clarificación.

## Presentación trabajo grupal del trimestre

- **Diseña un puente con arco en forma de catenaria invertida.**



*"... la catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad a la construcción entera".*  
*"... evita contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguanta sin raros accesorios ortopédicos".*

### Guión orientativo del trabajo:

- Investiga la historia de la catenaria
- Describe las propiedades de la catenaria y demuestra alguna de ellas
- Representa verbal, gráfica y algebraicamente una catenaria
- Explica por qué una catenaria no es una parábola
- Investiga en qué elementos de la ingeniería ó la arquitectura se emplea la catenaria. Pon ejemplos
- Diseña un puente con arco en forma de catenaria
- Justifica tu diseño y represéntalo en GeoGebra

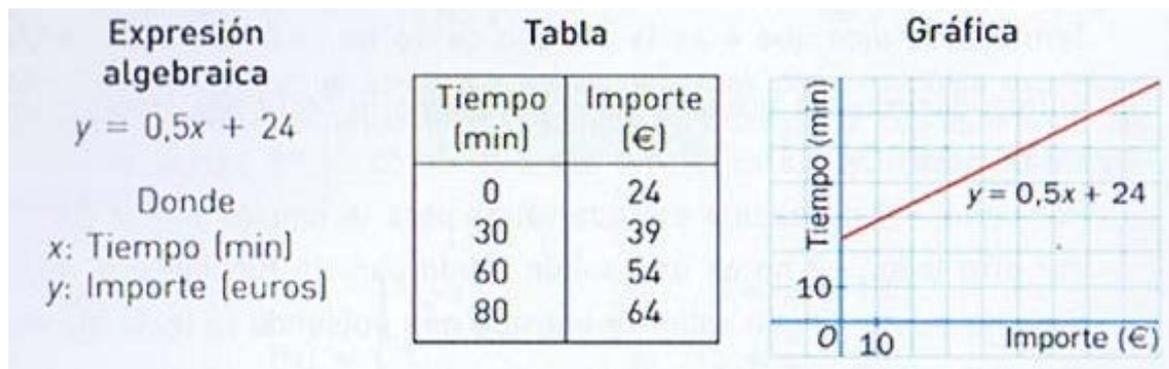
## Formas de expresar una función

**Ejemplo 1:** El servicio de reparaciones de una empresa de ordenadores cobra 24€ por el desplazamiento del técnico al domicilio del cliente y 0,50 € por minuto de reparación.

A cada tiempo de reparación, en minutos, le corresponde un determinado importe, en euros. Este es un ejemplo de **función**.

Al tiempo, en minutos, de reparación se le llama **variable independiente**, y al **importe**, en euros, se le denomina **variable dependiente**.

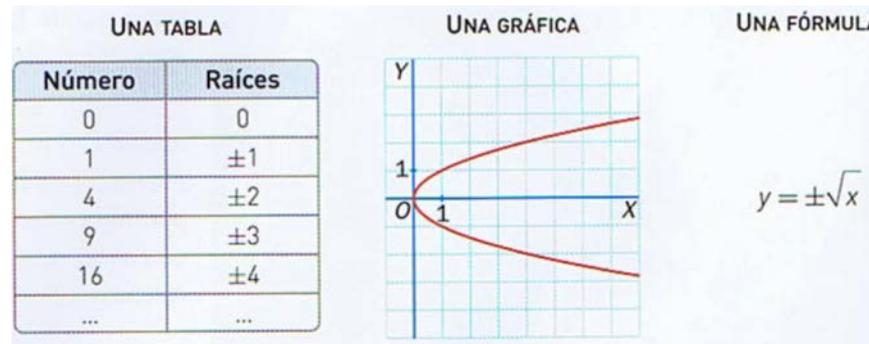
Esta función se puede representar en forma de expresión algebraica, de tabla o de gráfica, del siguiente modo:



Una **correspondencia** entre dos conjuntos es cualquier relación que se establece entre los elementos de esos dos conjuntos.

Esta relación se puede expresar con un enunciado, con una tabla, con una gráfica ó con una fórmula o expresión algebraica.

**Ejemplo 2:** La correspondencia que asocia a cada número real sus dos raíces cuadradas reales también se puede expresar como:



Las teclas de la calculadora definen funciones mediante fórmulas. La tecla de la raíz cuadrada  $\sqrt{\quad}$  define la función  $y = +\sqrt{x}$ . Comprobamos que el conjunto de entradas válidas está formado por el conjunto de los números reales positivos. A este conjunto de valores lo llamamos **dominio de la función**.

El conjunto de salidas válidas está constituido también por los números reales positivos. A este conjunto lo denominamos **recorrido de la función**.

## Concepto de función.

**Función real de variable real.** Es una correspondencia que asocia a cada elemento de un determinado conjunto de números reales un único número real que se designa como  $y=f(x)$ .

**Variable independiente,  $x$ .** Es aquella cuyo valor se fija previamente.

**Variable dependiente,  $y$ .** Es aquella cuyo valor se deduce del de la variable dependiente.

**Dominio de la función.** Es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente (**originales**). Se representa por  $D(f)$ .

**Recorrido o imagen.** Es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente (**imágenes**). Se representa por  $Im(f)$ .

**Ejemplo 3:** El coste anual, en miles de euros del mantenimiento de una potabilizadora en función de los años que lleva operativa viene dado por la relación  $f(x)=x^2+x+1$ . En este caso:

- La variable independiente,  $x$ , es el número de años
- La variable dependiente  $y$  ó  $f(x)$ , es el coste en miles de euros
- El dominio de la función es el intervalo  $(0, +\infty)$
- La imagen ó recorrido es  $(1, +\infty)$

## Función inyectiva

**Ejemplo 4:** En la función  $f(x)=x^2$  puntos diferentes del dominio tienen la misma imagen:  $f(1)=f(-1)=1$ .

Una función es **inyectiva** si cada elemento del conjunto imagen tiene un solo elemento original del dominio.

**Ejercicio 1:** Halla el dominio y el recorrido de cada una de estas funciones:

a)  $f(x) = \sqrt{x - 2}$

d)  $g(x) = \frac{1}{x-4}$

b)  $f(x) = 3x - 1$

e)  $h(x) = x^3$

c)  $g(x) = |x|$

f)  $i(x) = \frac{2}{x^2}$

**Ejercicio 2:** Investiga si son o no inyectivas las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \text{sen } x$

d)  $g(x) = x^3$

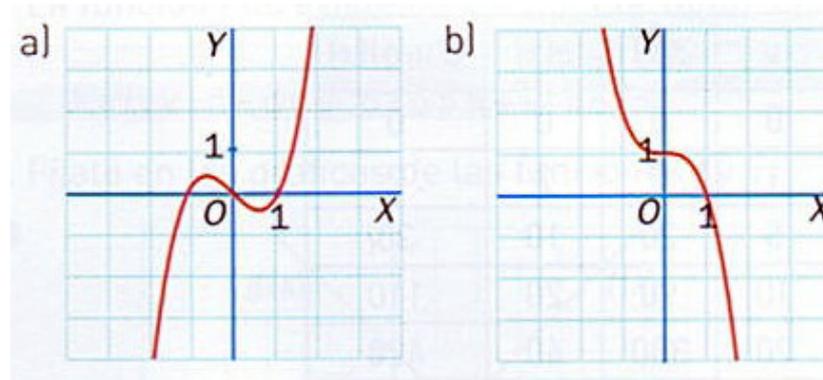
b)  $f(x) = 5x + 3$

e)  $h(x) = x^2 - x$

c)  $g(x) = \text{cos } x$

f)  $i(x) = x^4$

**Ejercicio 3:** Di si las siguientes correspondencias dadas en forma de gráficas son o no son funciones y, si lo fueran, si son o no son inyectivas.



**Ejercicio 4:** El área  $A$  de un cuadrado es función de la longitud del lado  $x$ .

- Escribir la expresión matemática de dicha función
- ¿Cuál es su dominio de definición?
- Construir una tabla de valores para  $0 < x < 4$ , incrementando el valor de  $x$  de 0,5 en 0,5 y representar  $A(x)$  en esa región
- Hallar  $A(\sqrt{-3})$  y  $A(\sqrt{6})$
- ¿Cuál es la imagen de 1.000? ¿Para qué valor de lado del cuadrado el área vale  $A = \frac{4}{8}$  ?
- ¿Para qué valores del lado el área está comprendida entre 10 y 100?

## Función definida a trozos

**Ejemplo 1:** Una compañía de telefonía propone a los nuevos clientes la siguiente oferta para SMS:

- Los 10 primeros mensajes del mes son gratis
- Pueden mandar hasta 50 mensajes más pagando 3 €
- Si envían más de 50, cada uno costaría 10 céntimos

¿Cómo representarías gráfica y algebraicamente esta función?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 3 & \text{si } 10 \leq x \leq 50 \\ 0,1x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Una **función definida a trozos** es aquella que se describe con distintas expresiones algebraicas dependiendo del valor del intervalo.

Para **representar una función a trozos**, estudiamos separadamente cada trozo en su dominio de definición. Posteriormente, juntamos en una única gráfica todas las obtenidas individualmente.

**Ejercicio 1:** Representa gráficamente las siguientes funciones e indica, después de dibujarlas, su dominio y recorrido:

$$f(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{si } x < 0 \\ 2x+4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2-1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 2:** Laura tarda 15 minutos en llegar a casa de Rocío, que está a un kilómetro de distancia, donde se queda 40 minutos charlando con ella. Cuando vuelve a su domicilio, emplea sólo 10 minutos, ya que el camino de vuelta es cuesta abajo. Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el tiempo y la distancia recorrida.

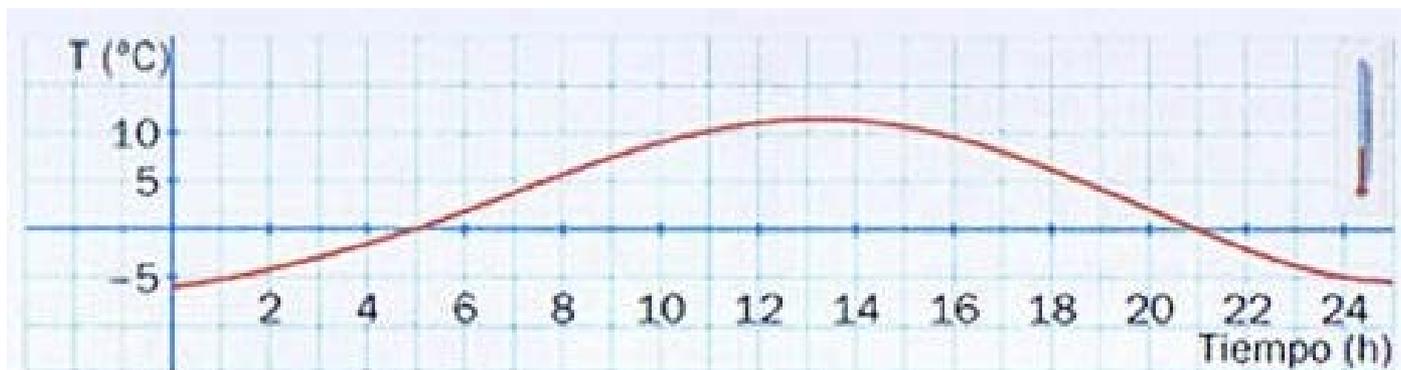
**Ejercicio 3:** Representa gráficamente la función:  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{x}{3} & \text{si } x \leq -1 \\ 3x + 9 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

y calcula  $f(3)$ ,  $f(10)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-1)$  y  $f(3/4)$ .

**Ejercicio 4:** Isabel y Julia tienen instalada la ADSL en casa. Isabel paga 10 € al mes, más medio euro por cada hora que esté conectada, con un precio máximo de 40 euros. Julio abona una cantidad fija mayor, 15 €, pero cada hora le cuesta sólo 25 céntimos, hasta un máximo de 40 €. Investiga qué compañía ofrece mejor contrato dependiendo de las horas de conexiones mensuales.

## Signo y puntos de corte con los ejes de coordenadas

**Ejemplo** : La siguiente gráfica proporciona la temperatura en grados centígrados de una ciudad a lo largo del día. Señala los períodos en los cuáles las temperaturas fueron positivas, negativas.



Observa que las **temperaturas son negativas** para las horas del día en las que la gráfica de la función está **por debajo de eje OX**.

Por el contrario, las **temperaturas son positivas** para las horas en las que la gráfica de la función se encuentra **por encima del eje OX**.

La temperatura es de **0°C** en el punto donde la función **corta al eje OX**.

Dada una función  $y = f(x)$ , se verifica que:

$f(x)$  tiene **signo positivo** en  $x=a$  si  $f(a) > 0$

$f(x)$  tiene **signo negativo** en  $x=a$  si  $f(a) < 0$

Para hallar los **puntos de corte con el eje OX**, resolvemos la ecuación que resulta de igualar a cero la función:  **$f(x) = 0$**

Para hallar el **punto de corte con el eje OY**, resolvemos la ecuación que resulta de sustituir la variable  $x$  por cero:  **$y = f(0)$**

**Ejercicio 1:** Estudia el signo y los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$f(x) = -x^2 - 6x - 8$$

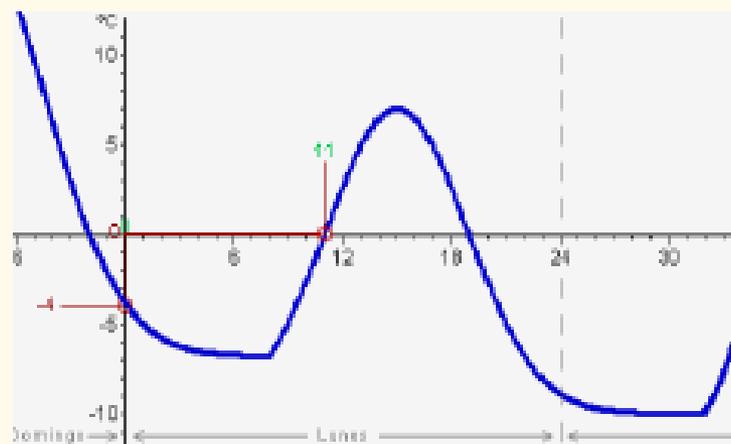
$$f(x) = 3x - 6$$

## TEMPERATURA

Estos días han sido fríos en la ciudad.



El gráfico muestra la temperatura en función de la hora del día, partiendo de la medianoche del domingo al lunes.



### Ejercicio 2:

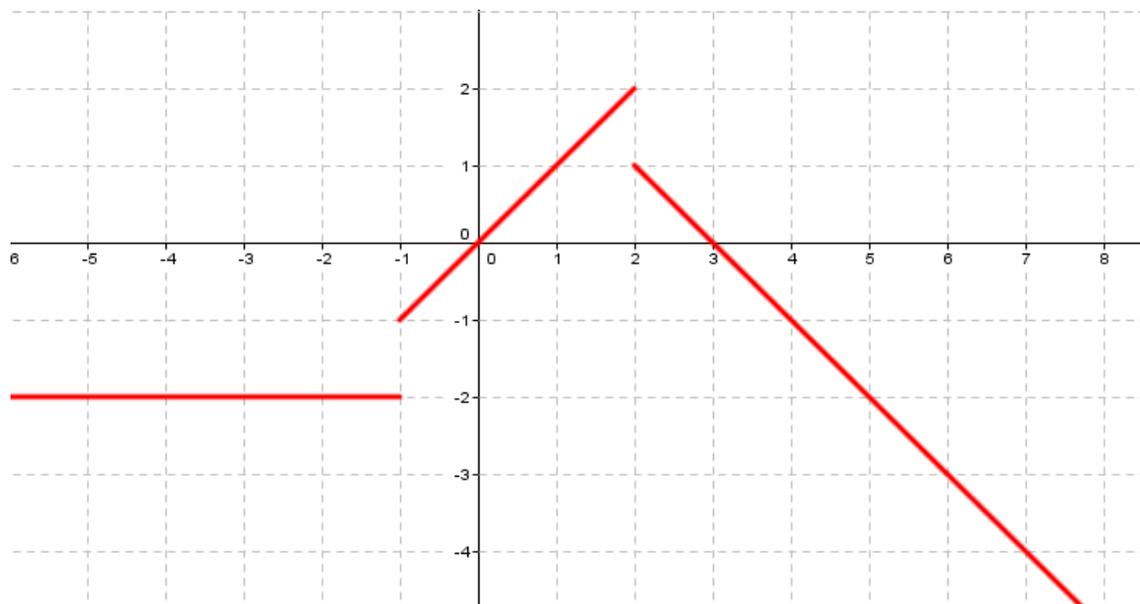
- ¿A qué hora del lunes la temperatura era de  $0^{\circ}\text{C}$ ?
- ¿Entre qué horas del lunes la temperatura estuvo bajo cero?
- ¿Entre qué horas la función es positiva?

**Ejercicio 3:** Dada la función  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$ .

Halla los puntos de corte con los ejes y estudiar el signo de la función.

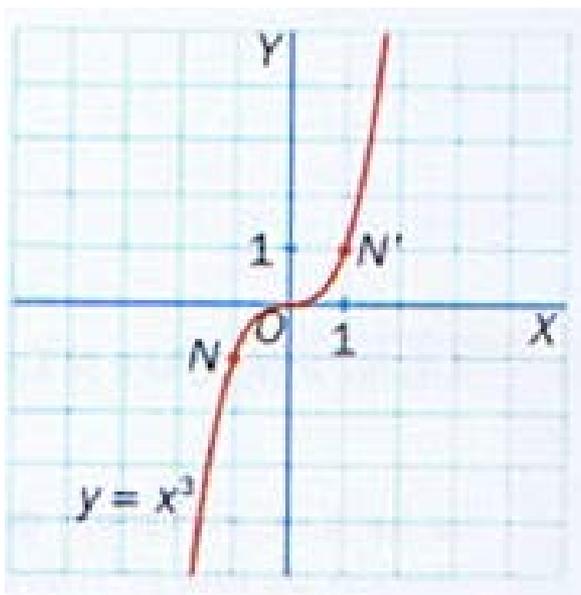
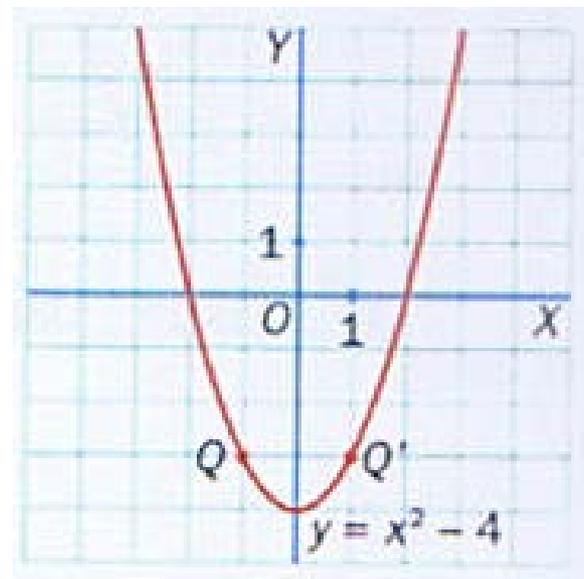
Representala gráficamente y comprueba todo lo anterior.

**Ejercicio 4:** Indica cuando la siguiente función tiene signo positivo y cuándo signo negativo, así como los puntos de corte con los ejes:



## Simetría

**Ejemplo 1:** Representa en GeoGebra la función  $y=x^2-4$ . Comprueba que para esta función se cumple que  $f(-1)=f(1)$ . Obtén el punto de la curva  $Q'(-1,-3)$  a partir del punto  $Q(1,+3)$  aplicando una simetría axial. Repite esta construcción con otros puntos de la curva.



**Ejemplo 2:** Representa en GeoGebra la función  $y=x^3$ . Comprueba que para esta función se cumple que  $f(-1)=-f(1)$ . Obtén el punto de la curva  $Q'(-1,-1)$  a partir del punto  $Q(1,1)$  aplicando una simetría central. Repite esta construcción con otros puntos de la curva.

Una función  $f$  es par o simétrica respecto al eje de ordenadas cuando, para cualquier valor de  $x$  de su dominio, se verifica que  $f(-x)=f(x)$ .

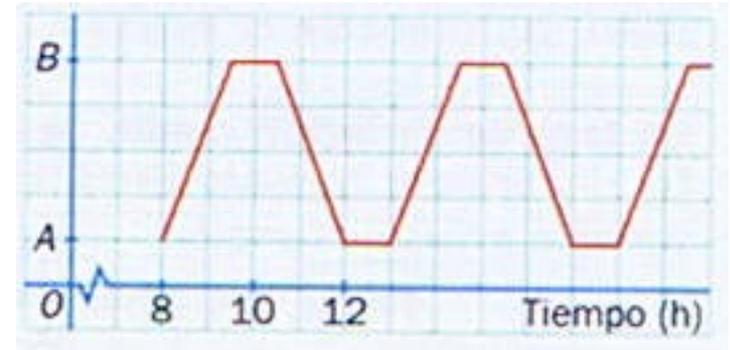
Una función  $f$  es impar o simétrica respecto del origen cuando, para cualquier valor de  $x$  de su dominio, se verifica que  $f(-x)=-f(x)$ .

**Ejercicio 1:** Representa en GeoGebra la rama de la función  $y=x^2-4$  correspondiente a  $x \geq 0$ . Obtén la rama correspondiente a  $x \leq 0$  aplicando una simetría axial.

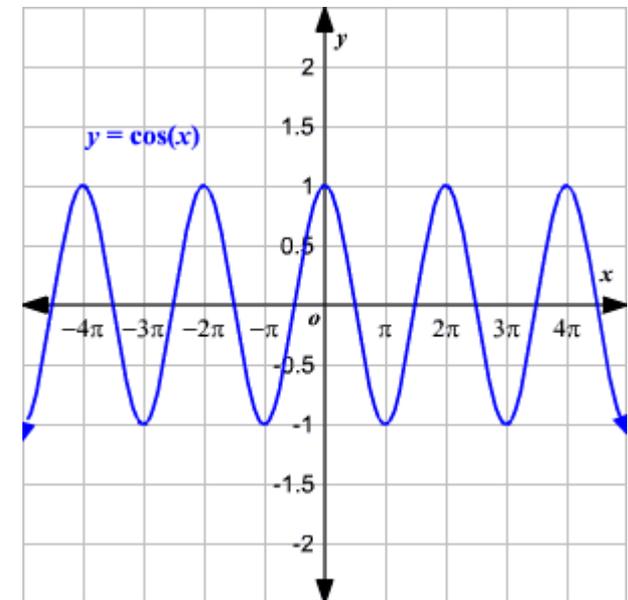
**Ejercicio 2:** Representa en GeoGebra la rama de la función  $y=x^3$  correspondiente a  $x \leq 0$ . Obtén la rama correspondiente a  $x \geq 0$  aplicando una simetría central.

## Periodicidad

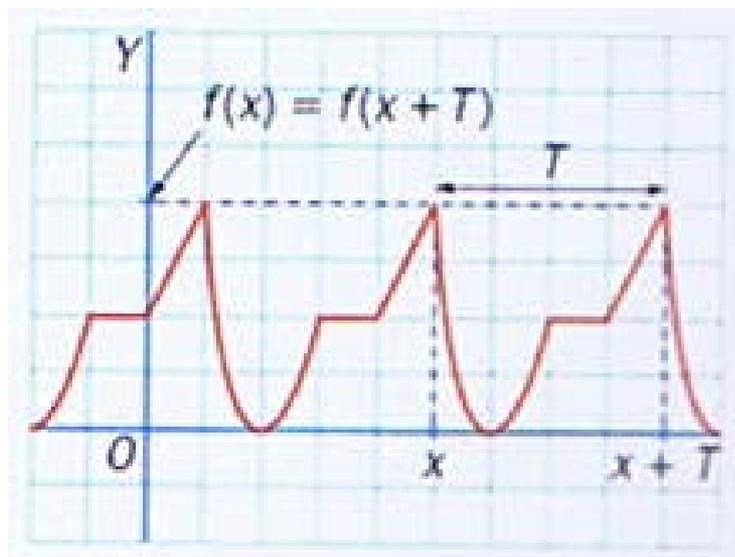
**Ejemplo 3:** Un tren sale de A a las 8:00 y llega a B a las 9:30. Allí permanece 1 hora y realiza el viaje de vuelta de la misma forma. Cada hora repite el viaje.



**Ejemplo 4:** Al estudiar las vibraciones que se produce en algunas máquinas, aparecen funciones del tipo  $x(t) = A \cos(\omega t)$ .



Una función es periódica cuando los valores que toma se van repitiendo cada cierto intervalo  $T$ , llamado período; es decir, se cumple que  $f(x+T)=f(x)$ .



**Ejercicio 3:** Representa en GeoGebra la rama de la función  $y=\text{sen } x$ . Obtén gráficamente el período de esta función.

## Tasa de variación media

**Ejemplo 5:** La gráfica muestra la evolución de la audiencia de radio en España desde 1991 hasta 2006, en millones de personas.



La **tasa de variación** de una función continua  $f(x)$  en el intervalo  $[x, x+h]$  es el aumento o disminución que experimenta dicha función en ese intervalo.

$$TV[x, x+h] = f(x+h) - f(x)$$

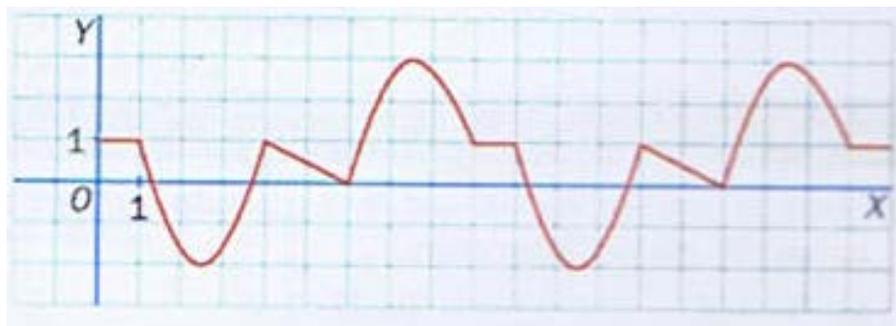
La **tasa de variación media** de una función continua  $f(x)$  en el intervalo  $[x, x+h]$  es el cociente entre la tasa de variación y el incremento de la variable en ese intervalo.

$$TV[x, x+h] = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Ejercicio 4:** Representa en GeoGebra la función  $y=x^2$  y obtén gráficamente la tasa de variación y la tasa de variación media en los intervalos  $[1;1,5]$  y  $[2;3,5]$ .

**Ejercicio 5:** Estudia la simetría de las funciones  $f(x)=-4x^3 + 2x$ ,  $f(x)=|x^2 -4|$ .

**Ejercicio 6:** Indica si es periódica la siguiente función  $y$ , en caso afirmativo, determina cuál es su período.



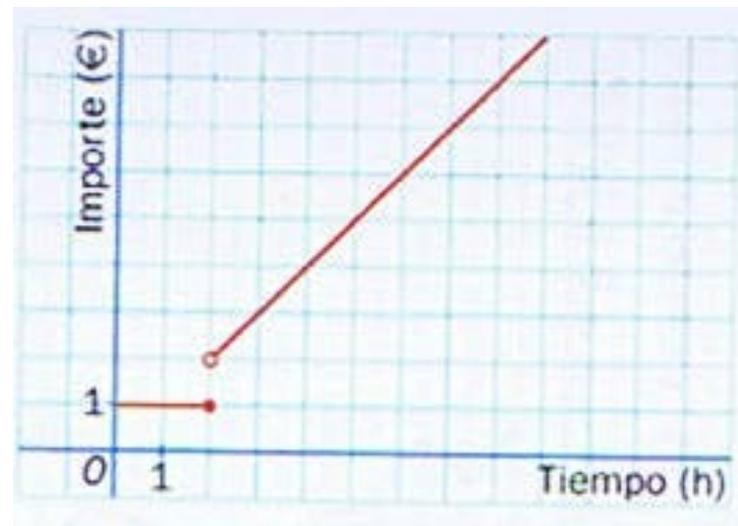
**Ejercicio 7:** Calcula la tasa de variación media de la función  $f(x)=-x^2+1$  en los intervalos  $[1;1,3]$  y  $[2;2,4]$ .

**Ejercicio 8:** Calcula la tasa de variación media de la función  $f(x)=2x^2+2$  en los intervalos  $[0,5;1]$  y  $[2;3,5]$ .

## Continuidad

**Ejemplo 1:** Un aparcamiento cobra a sus clientes 1€ por la estancia durante las dos primeras horas. A partir de la segunda, factura 1€ por hora.

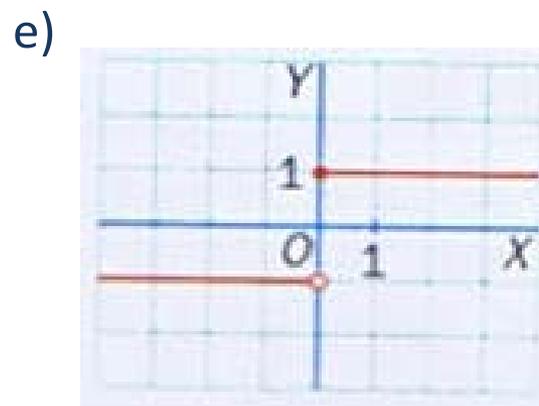
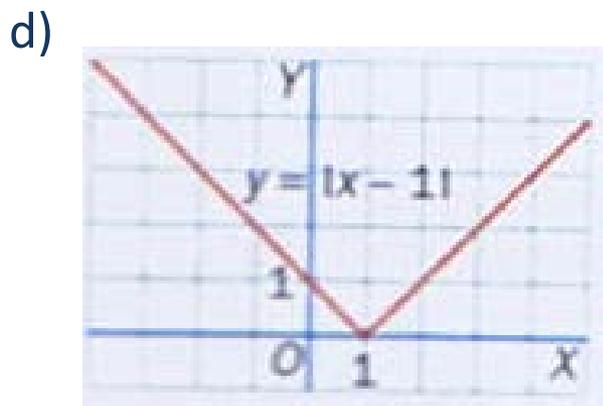
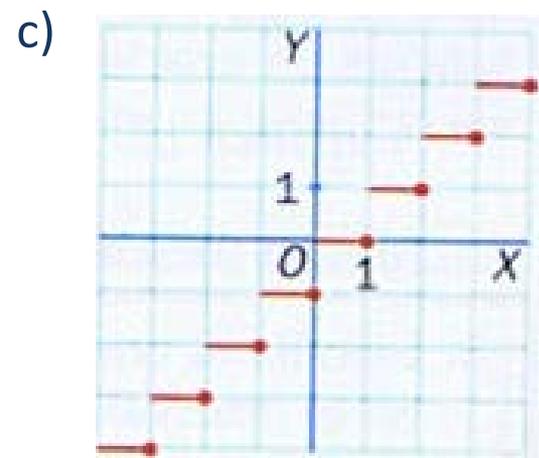
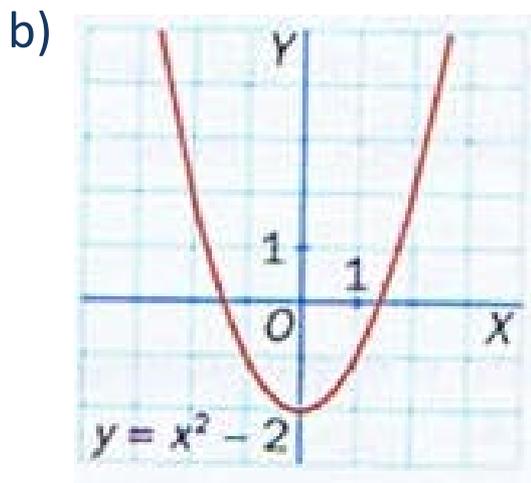
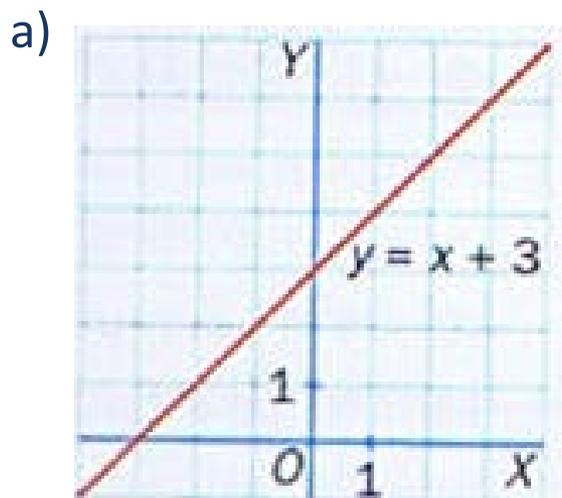
- Calcula la variación de la función en el intervalo  $[2, 2+h]$ . ¿A qué valor se acerca si  $h$  es un número próximo a cero?
- Calcula la variación de la función en el intervalo  $[3, 3+h]$ . ¿A qué valor se acerca si  $h$  es un número próximo a cero?



Una función  $f$  es **continua en  $x = a$**  si la variación  $f(a + h) - f(a)$  se aproxima a cero cuando  $h$  tiende a cero.

Una función es **continua en el intervalo  $[a, b]$**  cuando es continua en todos los puntos de ese intervalo.

**Ejercicio 1:** Estudia la continuidad de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



## Crecimiento y decrecimiento

**Ejemplo 2:** La gráfica muestra la evolución del número de espectadores de representaciones teatrales en España desde 1987 hasta 2005.

¿Cuándo crece el número de espectadores?  
¿Y cuándo decrece?



## Relación con la tasa de variación

Para cada par de valores  $[x_1, x_2]$  pertenecientes al intervalo  $[a, b]$  se cumple:

$$TV [x_1, x_2] > 0 \rightarrow \text{Creciente en } [a, b]$$

$$TV [x_1, x_2] = 0 \rightarrow \text{Constante en } [a, b]$$

$$TV [x_1, x_2] < 0 \rightarrow \text{Decreciente en } [a, b]$$

**Ejercicio 2:** Representa con GepGebra la función  $f(x) = -x^2 + 2x$  y estudia su crecimiento o decrecimiento en el intervalo  $[-1, 4]$ .

## Máximos y mínimos

**Ejemplo 3:** La gráfica muestra la evolución del número de aprobados en las pruebas de acceso a la Universidad desde 1997 hasta 2006, en tantos por ciento.

¿En qué momentos ha habido un máximo en el número de aprobados?

¿En qué años ha existido un mínimo?



## Recordatorio

Entorno abierto y cerrado  
de un punto



Máximo relativo  
Mínimo relativo  
Máximo absoluto  
Mínimo absoluto

**Ejercicio 3:** Estudia la continuidad de las siguientes funciones dadas por su expresión algebraica: a)  $f(x)=x-2$  y b)  $f(x)=x$ , si  $x \geq -1$  y  $f(x) = -x$ , si  $x < -1$ .

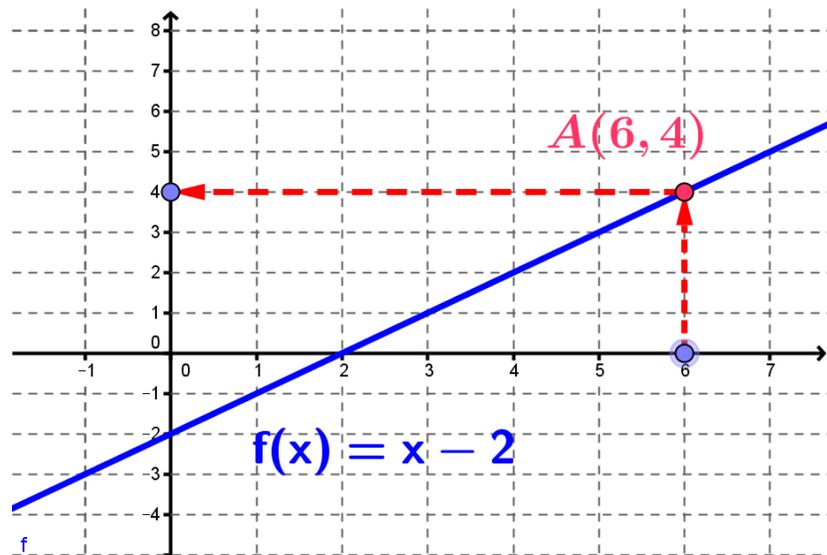
**Ejercicio 4:** Estudia el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo  $[0,1/2]$ : a)  $f(x)=-2$  y b)  $f(x)=x-3+4$ .

**Ejercicio 5:** Explica cómo es el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo  $[-2,0]$ : a)  $f(x)=-x^2+1$  y b)  $f(x)=-x^3$ .

**Ejercicio 6:** Dibuja una función continua que tenga las siguientes características:

- Presenta un mínimo relativo en  $x=1,5$
- Tiene un máximo relativo en  $x=3$
- Posee un máximo absoluto en  $x=0$
- No presenta ningún mínimo absoluto
- Corta al eje OX en cuatro puntos

## Función real de variable real



Función:  $f(x) = x - 2$

Dominio:  $\mathbf{R}$

Recorrido:  $\mathbf{R}$

Gráfica:  $P(x, f(x))$

$A(6, 4)$

$B(0, -2)$   $C(2, 0)$

Es una **correspondencia** que asocia a cada elemento de un determinado conjunto de números reales (**dominio**) un único número real (**recorrido o imagen**).

### Gráfica de una función

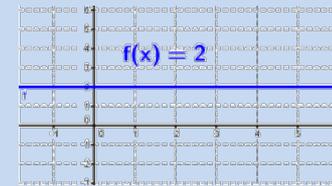
El conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas son  $P(x, f(x))$  donde  $x$  toma los valores del dominio.

**Función polinómica:**  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Dominio es todo  $\mathbf{R}$ . Continua en todo su dominio.  
No tiene asíntotas.

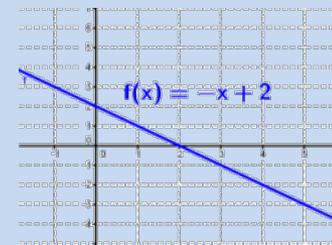
**Constante:**  $f(x) = a$

Su gráfica es una recta paralela al eje OX.



**Lineal:**  $f(x) = mx + b$

Su gráfica es una recta con pendiente constante.  
Corta al eje OY en el punto.



**Cuadrática:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a \neq 0$

Su gráfica es una parábola.

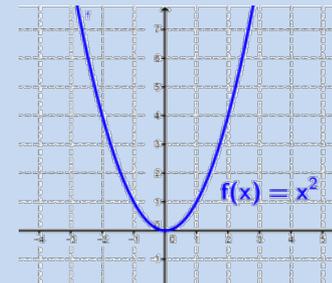
Curvatura: Si  $a > 0$  se abre hacia arriba  
Si  $a < 0$  se abre hacia abajo

Vértice: el punto  $P\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Eje simetría:  $x = \frac{-b}{2a}$

Puntos de corte: tiene 0, 1 ó 2 puntos de corte con el eje OX.

son soluciones de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ .

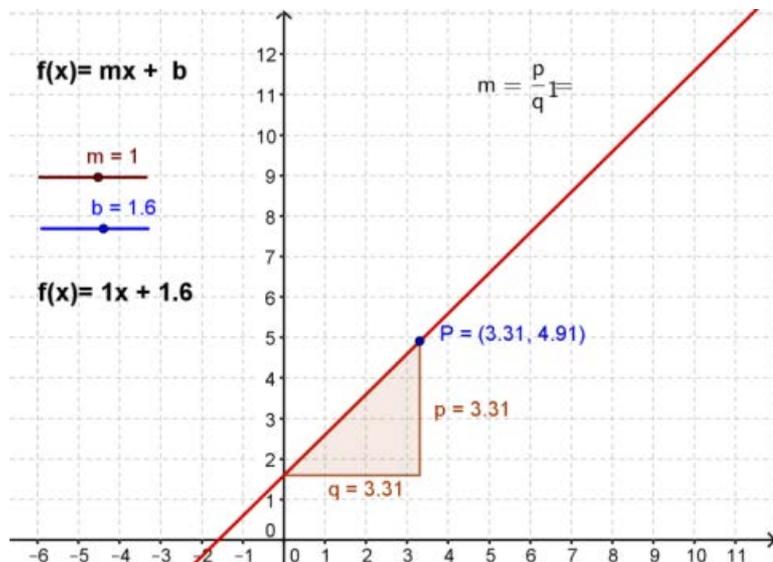


Análisis de la función cuadrática:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a \neq 0$

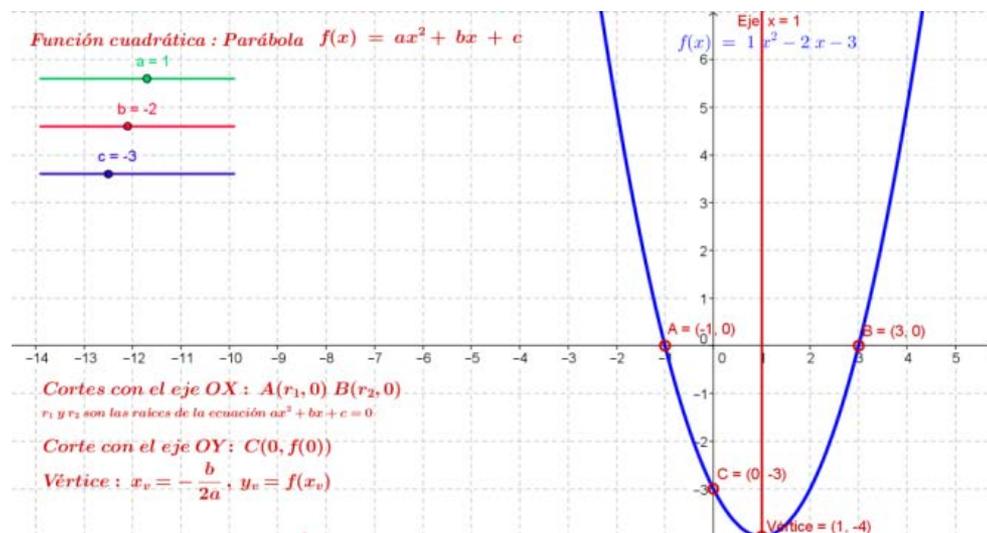
Con el uso de Geogebra, en grupos de dos personas:

- Observa cómo varía la gráfica al modificar los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$
- Descubre la influencia de  $a$  y  $c$  en la gráfica y en la ecuación algebraica
- Elabora un informe en soporte informático con capturas de pantalla

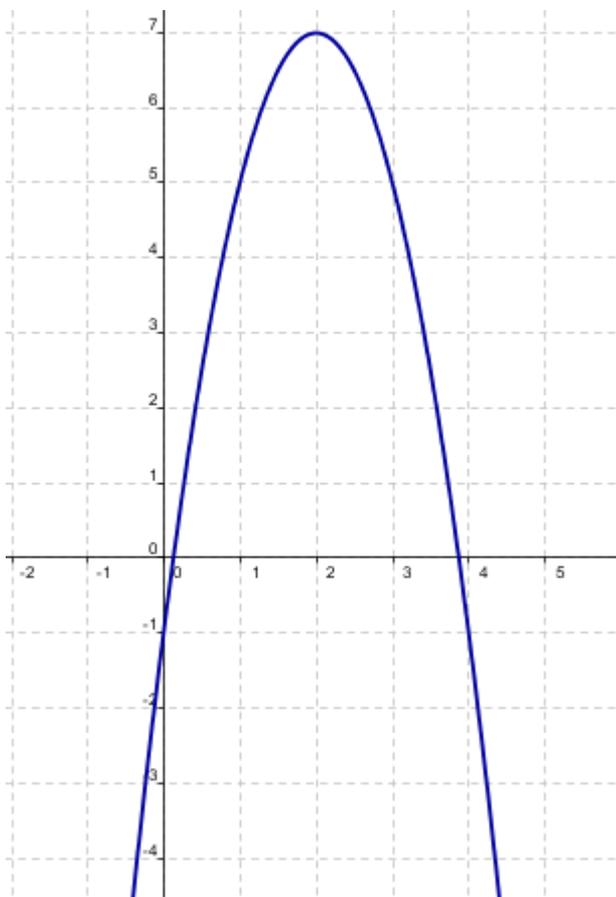
Ejemplo función lineal:



Función cuadrática:



**Ejercicio 1:** Descubre la función de la siguiente parábola:



**Ejercicio 2:** Conociendo la siguiente función responde a las siguientes cuestiones:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

- ¿De qué tipo de función se trata?
- Determina las características de la función: dominio, recorrido, curvatura, vértice, puntos de corte con ejes
- Dibuja la gráfica de la función

*Estos dos primeros ejercicios corresponden con un nivel básico de comprensión de la función cuadrática y su gráfica.*

**Ejercicio 3:** Conociendo las siguientes funciones, responde a las cuestiones planteadas:

1)  $f(x)=x^2$

2)  $f(x)=x^2+2x+3$

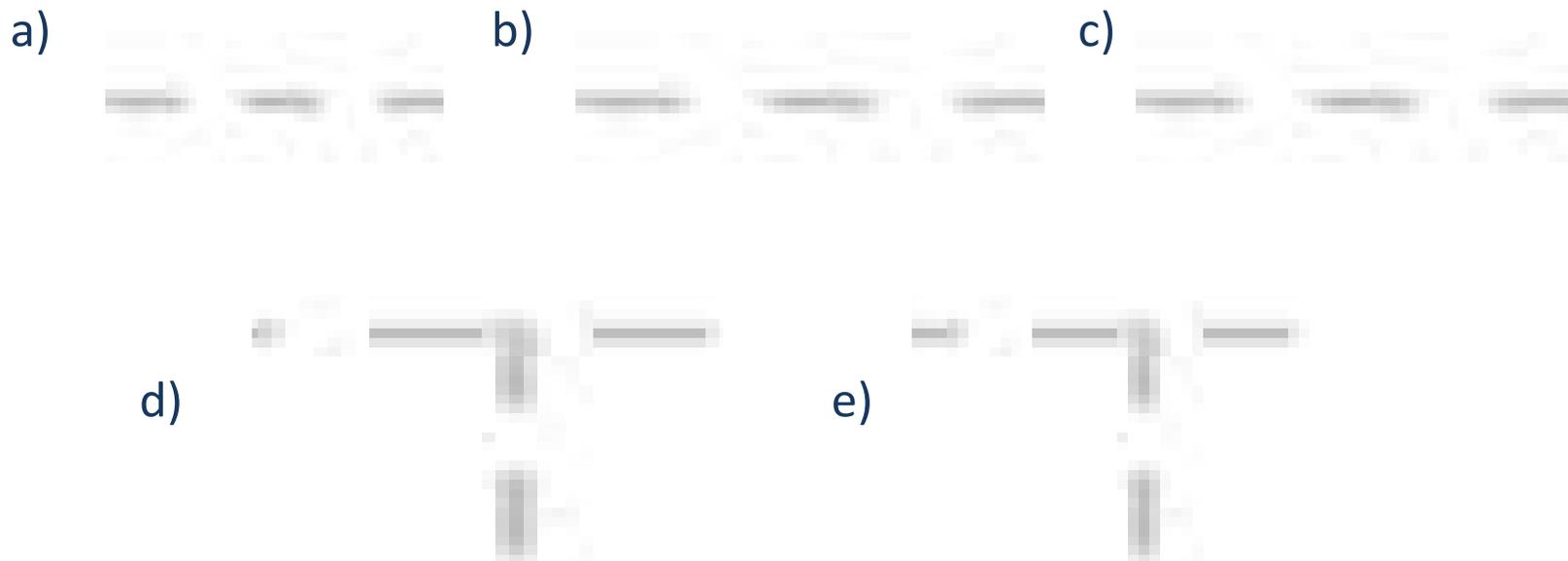
3)  $f(x)=-x^2+2x+1$

- ¿De qué tipo de función se trata?
- Determina las características de la función: dominio, recorrido, curvatura, vértice, puntos de corte con ejes
- Dibuja la gráfica de la función

**Ejercicio 4:** Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula donde  $t$  es el tiempo en segundos y  $h$  es la altura desde el suelo en metros.

- Dibuja la gráfica en el intervalo
- Halla la altura del edificio
- ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

**Ejercicio 5:** Descubre y expresa cual es la función algebraica de las siguientes parábolas :



Las gráficas representadas son:

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

b)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 5$

c)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$

d)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

e)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

**Función racional:**  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios

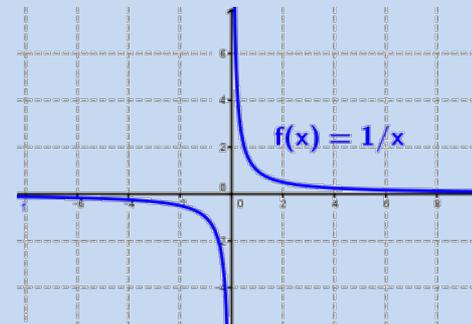
Dominio es todo  $\mathbf{R}$ , salvo los puntos que anulan  $Q(x)$ .  
Continua salvo en los puntos anulan el denominador.

**Inversa:**  $f(x) = \frac{a}{x}$  donde  $a \neq 0$

Su gráfica es una hipérbola.

Dominio es todo  $\mathbf{R}$ , salvo  $x=0$ .

Asíntota vertical en  $x=0$ .

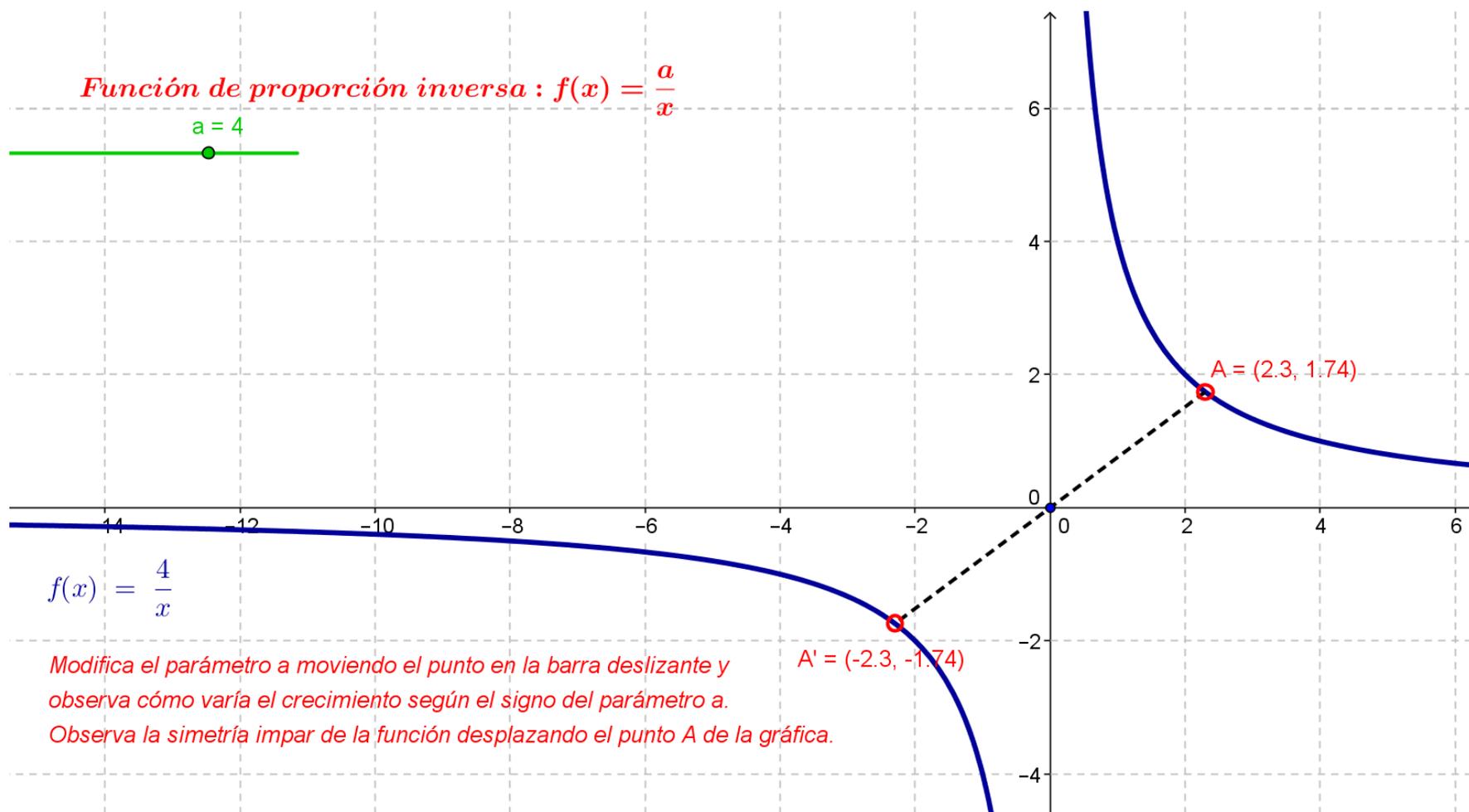


## Análisis de la función inversa:

Con el uso de Geogebra, en grupos de dos personas:

- Observa cómo varía la gráfica al modificar  $a$
- Descubre la influencia de  $a$  en el gráfica y en la expresión algebraica
- Elabora un informe en soporte informático con capturas de pantalla

## Análisis de la función inversa: continuación



inv

**Ejercicio 1:** Dibuja la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{-4}{x+3}$$

**Ejercicio 2:** Dibuja en los mismos ejes la gráfica de las siguientes funciones. Coméntalas.

$$a) f(x) = \frac{4}{x}$$

$$b) f(x) = \frac{10}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{30}{x}$$

**Ejercicio 3:** Dibuja la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{x}$  y a partir de ella dibuja las siguientes funciones. Coméntalas.

$$a) f(x) = \frac{2}{x}$$

$$b) f(x) = -\frac{2}{x}$$

$$c) f(x) = -\frac{2}{x} - 3$$

**Ejercicio 4:** Dibuja la gráfica de la función :  $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$

¿Existen simetrías?

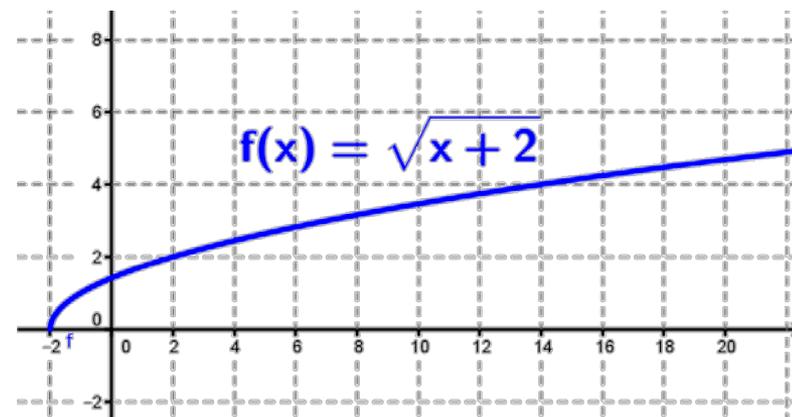
## Función irracional:

Dominio:

todos los valores de  $x$   
para los que el radicando  
sea positivo ( $x \geq h$ ).

Continua en todo su dominio.

$$f(x) = a\sqrt{x+h} + k$$



## Análisis de la función irracional:

Con el uso de Geogebra, en grupos de dos personas:

- Observa cómo varía la gráfica al modificar los parámetros  $a$ ,  $h$  y  $k$
- Elabora un informe en soporte informático con capturas de pantalla

## Análisis de la función irracional: continuación



irracional.ggb

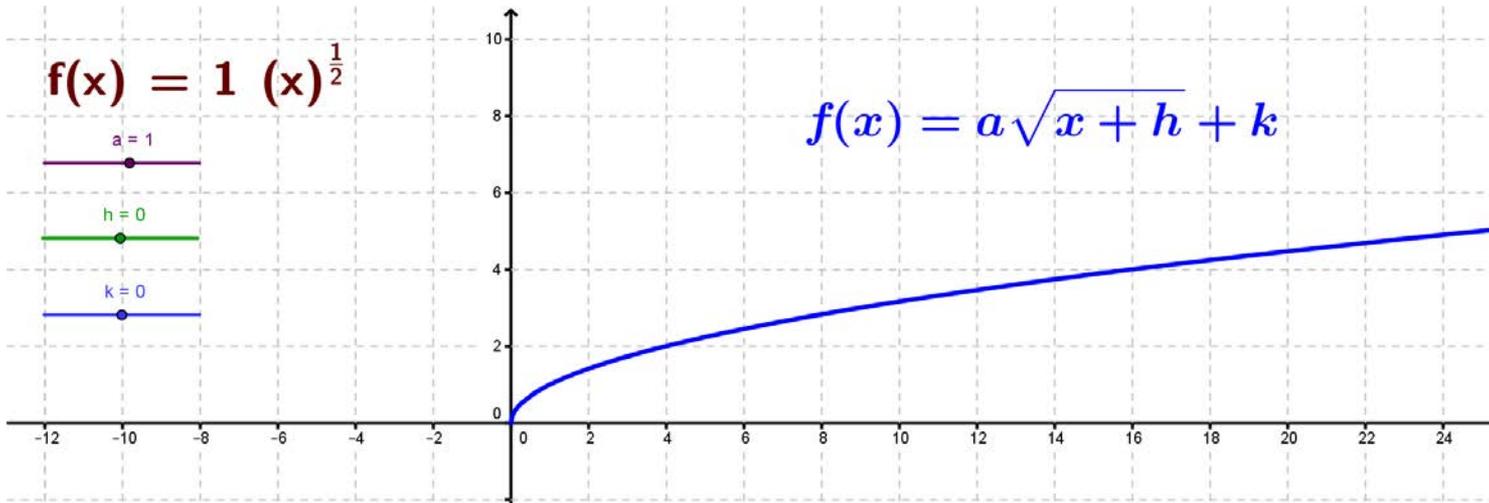
<http://www.geogebra.org/studেন্ট/m66368>

$$f(x) = 1(x)^{\frac{1}{2}}$$

$$a = 1$$

$$h = 0$$

$$k = 0$$



### Ejercicio 5:

Dada la función  $f(x) = 2 + \sqrt{x+4}$

- Estudia su dominio
- Calcula el valor de  $x$  para el cual  $f(x)=0$
- Calcula el valor de  $f(x)$  para  $x=6, 10$  y  $20$
- Dibuja la gráfica de la función

### Ejercicio 6:

Dada la función  $f(x) = \sqrt{x-4} - 2$

- Estudia su dominio
- Calcula el valor de  $x$  para el cual  $f(x)=0$
- Calcula el valor de  $f(x)$  para distintos valores de  $x$
- Dibuja la gráfica de la función

**Función exponencial:**  $f(x) = a^x$

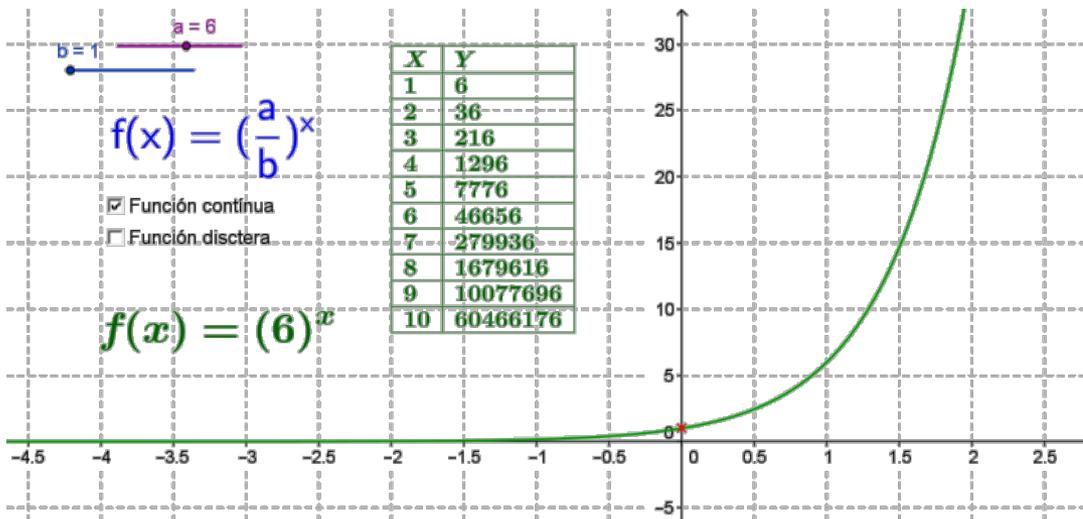
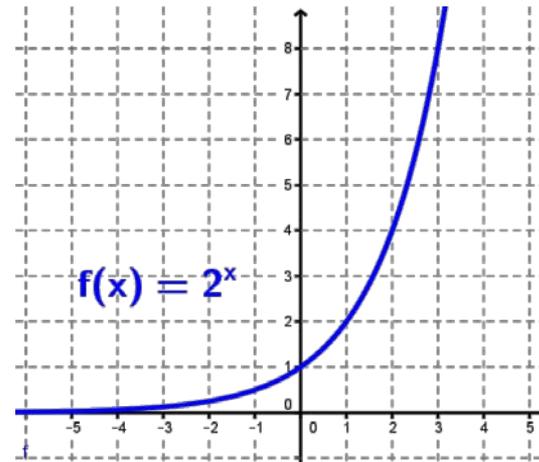
Dominio: los números reales.

Recorrido: los números reales positivos.

Cortará al eje OY en el punto (0,1).

Si  $a > 1$  es creciente.

Si  $0 < a < 1$  es decreciente.



**Análisis de la función exponencial:**

Con el uso de Geogebra, en grupos de dos personas:

- Variando  $a/b$  ¿qué ocurre?
- Incremento en la imagen al incrementar  $x$
- Elabora un informe en soporte informático

**Función logarítmica:**  $f(x) = \log_a(x)$  donde  $a > 0$  y  $a \neq 1$

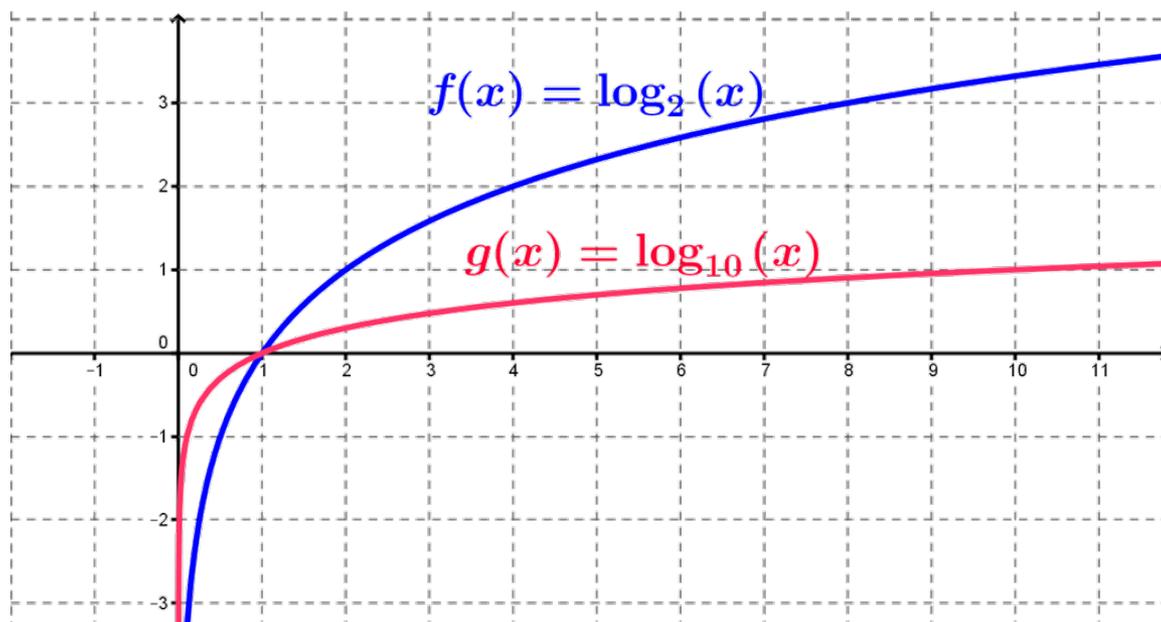
La función logarítmica es la inversa de la función exponencial.

Dominio: los números reales positivos.

Recorrido: los números reales .

Siempre cortará al eje OX en el punto (1,0).

Eje OY, la recta  $x=0$ , es una asíntota vertical.



## Análisis de la función logarítmica:

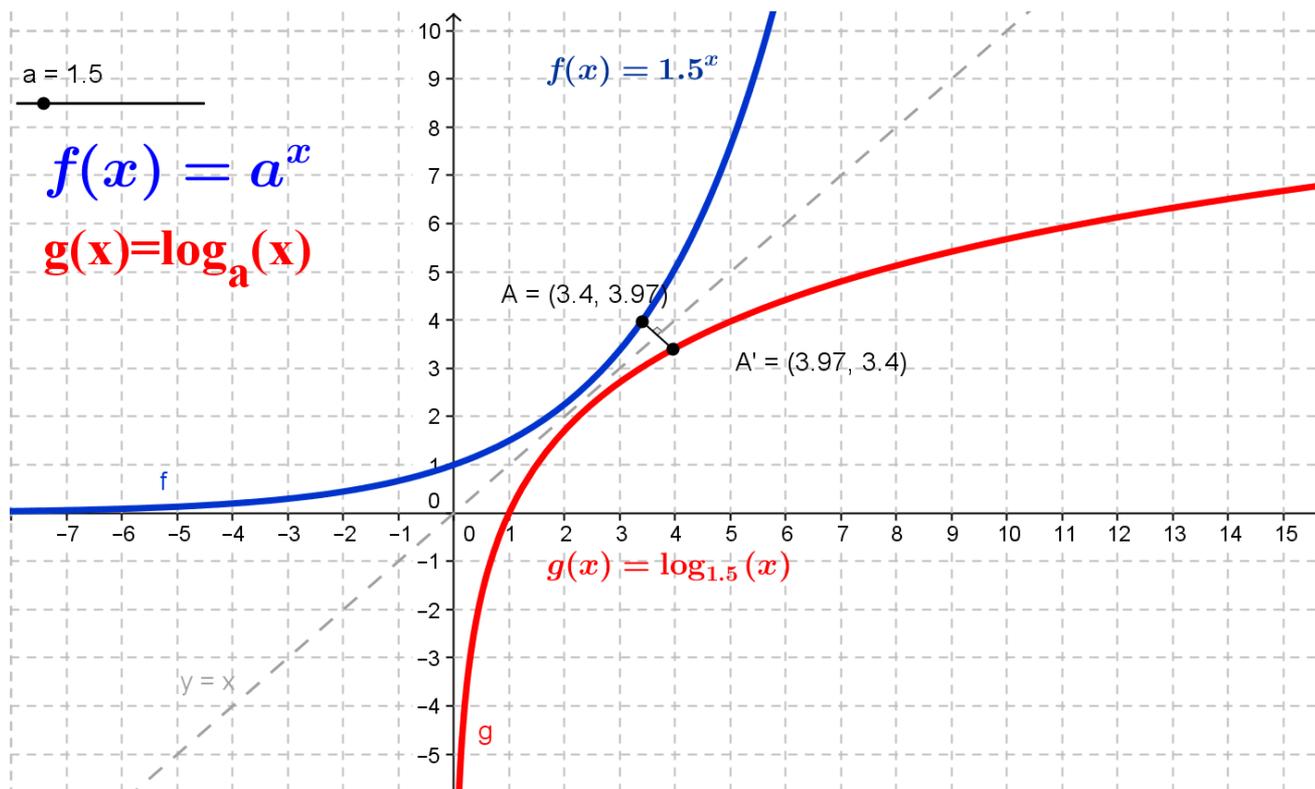
Con el uso de Geogebra, en grupos de dos personas:

- Mira cómo evoluciona el valor de la función cuando aumenta  $x$
- Función logarítmica es la función inversa de la exponencial
- Mira que ocurre con la gráfica cuando parámetro  $a$



exp-log.ggb

<http://www.geogebra.org/student/m48998>



**Ejercicio 1:** Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si este cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo  $y=ka^t$  (en minutos):

- Calcula  $k$  y  $a$
- Representa la función
- ¿Cuánto tiempo tardaría en llegar a 5.000 bacterias? ¿Y a 10.000 bacterias?

**Ejercicio 2:** La sensación auditiva de un sonido,  $\beta$ , se mide en decibelios (dB), y se relaciona con la intensidad de la onda sonora,  $I$ , que se mide en vatios por metro cuadrado:  $\beta=120+\log I$

- La intensidad de las ondas sonoras que son audibles sin producir dolor está entre  $10^{-12}$  y 1 vatio por metro cuadrado. ¿Entre que valores se halla la sensación auditiva que producen?
- Si estás escuchando música en un reproductor con 20 decibelios, ¿cuál es la intensidad de las ondas al salir de los auriculares?

**Ejercicio 3:** Amor matemático. (motivación uso del Geogebra)

Si te enamoras de alguien aficionado a las matemáticas, la mejor manera de declararte puede ser enviarle el siguiente mensaje:

$$f(x) = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2} \quad \text{Valores positivos del eje Y}$$

$$g(x) = \arccos(1 - |x|) - \pi \quad \text{Valores negativos del eje Y}$$

Cuando lo resuelva, esto es lo que aparecerá. Inténtalo.



## Repaso

### Pautas para el esquema conceptual

Función			
Concepto	Dominio	Recorrido	Formas de expresión
Función inyectiva		Función definida a trozos	

Características de una función							
Signo	Puntos corte ejes		Simetría		Periodicidad	Tasa variación media	
	OX	OY					
Continuidad	Crecimiento	Constante	Decrecimiento	Máximos		Mínimos	
				Absoluto	Relativo		

Tipos de funciones. Gráficas.			
	Algebraica	Gráfica	Características
F. polinómica			
F. constante			
F. lineal			
F. cuadrática			
F. racional			
F. inversa			
F. irracional			
F. exponencial			
F. logarítmica			

## Examen

1. En cierto colectivo de familias, el gasto mensual en ocio  $G(x)$ , en euros, está relacionado con el ingreso mensual,  $x$ , también en euros, a través de la siguiente función:

$$G(x) = \begin{cases} 0,002x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 600 \\ \frac{30x}{2x+2300} & \text{si } x > 600 \end{cases}$$

- Estudia la discontinuidad del gasto. ¿El gasto en ocio de una familia es sensiblemente distinto si sus ingresos son ligeramente inferiores o superiores a los 600 €?
- Justifica que el gasto en ocio es siempre creciente con los ingresos
- Justifica que ninguna familia realiza un gasto en ocio superior a las 90 € mensuales

2. Una discoteca situada a las afueras de Sevilla abre sus puertas para sus distinguidos clientes a las 10 de la noche. La ocupación de la discoteca viene dada por la expresión  $-10t^2+80t$ , donde  $t$  es el tiempo expresado en horas desde la apertura de la discoteca.

Un grupo de amigos quiere acudir este sábado antes de que se comience a vaciar la discoteca. ¿Podrías ayudarles?

- a) Representa la gráfica de la función correspondiente a la ocupación de la discoteca
- b) ¿Cuál es la ocupación máxima de clientes que se produce en la discoteca?
- c) ¿Antes de qué hora deben acudir el grupo de amigos si ellos quieren entrar antes de que se comience a vaciar la discoteca?
- d) Si el grupo de amigos entra a las dos horas de haber abierto la discoteca y se queda hasta el cierre de la misma, ¿cuánto tiempo pasarán en el interior?

3. Un laboratorio quiere saber en cualquier instante el número de bacterias presentes en su estudio en función de las horas transcurridas. Para ello, en el laboratorio saben que en el instante inicial solo tienen una bacteria y que ésta se duplica por mitosis en una hora ( $2^x$ ). Determina:
- ¿ Cuántas bacterias habrán al cabo de una hora?
  - ¿Y al cabo de 3 horas? ¿Y al cabo de 5 horas?
  - ¿Podrías dar la función que expresa el número de bacterias que habrá en el laboratorio al cabo de  $x$  horas?
4. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones en los intervalos que se indican
- $f(x) = x + x^2$  en  $[-1,5;-1]$  y en  $[0,2; 1]$
  - $f(x) = 2x - 9$  en  $[-2;-1,8]$

# ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

## Actividades de refuerzo:

**Ejercicio:** Calcula  $f(-3)$ ,  $f(0)$  y  $f(4)$  en la función:

$$f(x) = \begin{cases} 9x - x^2, & x < 4 \\ 3x, & x \geq 4 \end{cases}$$



**Ejercicio:** Calcula la tasa de variación media de la función  $h(x)=8-4x$  en el intervalo  $(-3,-1)$ .

**Ejercicio:** Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función en los intervalos  $(-2,2;-2)$  y  $(-2;-1,8)$ .

**Ejercicio:** Escribe la expresión algebraica de la función que asocia a cada número real su cuadrado menos su doble. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función.

[Boletín de refuerzo](#)

# ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

---

## Actividades de ampliación:

- Se propondrá al alumno actividades de acuerdo con sus aptitudes
- Actividades voluntarias con la tutela del profesor
- Elección por el alumno de la actividad o actividades a realizar
- Se trabajará la motivación hacia la investigación y el auto aprendizaje

### A. Visión teórica:

- ✓ Conceptos en la unidad
- ✓ Investigación de su historia y desarrollo

### B. Visión aplicada:

- ✓ Aplicación a situaciones reales
- ✓ Investigación de cómo se lleva a cabo estas aplicaciones

### C. Actividades de ampliación: listado de ejercicios y problemas

- ✓ Principalmente de carácter global y cualitativo

# ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

## A. Actividad aspectos teóricos:

Se le proporcionará un texto de forma que reflexione sobre el concepto de función y su evolución.

Definición de Euler y definición basada en conjuntos



*Leonhard Euler (1707, 1783): “Si algunas cantidades dependen de otras de tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas”*

En qué año y en que obra aparece esta definición. Podrías investigar en que ciudad se publicó esta obra.

Indica si con esta definición crees que se puede dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿cómo es esa dependencia?, ¿cómo expresarla, calcularla o representarla?, ¿cómo deben cambiar los valores de las variables?, ¿cuántas variables pueden intervenir?

Seguramente tu podrías contribuir con Euler a concretar su definición de función. ¿Qué definición de función crees que es acertada hoy día? ¿Qué matemático es el responsable de esa definición?

# ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

## B. Actividad aplicaciones (Aproximación mediante funciones polinómicas)

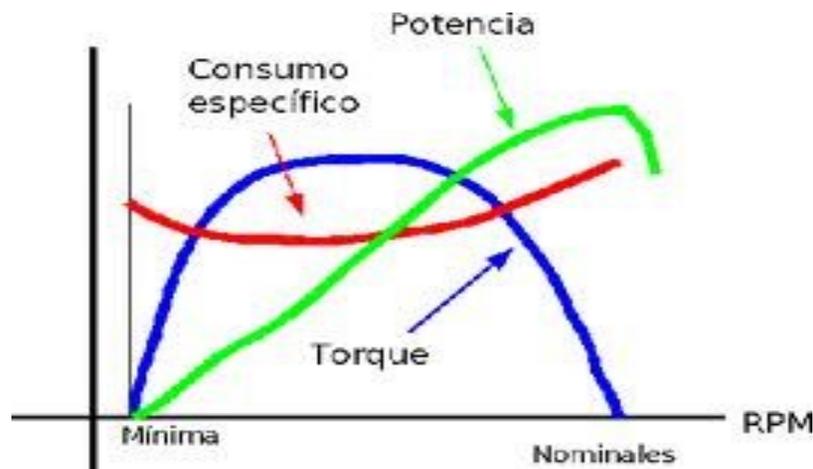
Se le proporcionará un artículo sobre la interpretación de la ficha técnica de una moto.

Mediante el uso de Geogebra se aproximará la **curva par motor** mediante una función conocida, la parábola.

Se investigarán las causas de los errores en la aproximación realizada.

Se invitará a buscar otras funciones que se aproximen a la curva de consumo específico.

Investigación gráfica mediante el uso de Geogebra sobre la aproximación de estas curvas mediante funciones polinómicas de mayor grado.



# ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

---

## C. Actividades de ampliación ([listado de ejercicios y problemas](#))

Este listado, además de ejercicios, incluirá problemas de carácter global y cualitativo

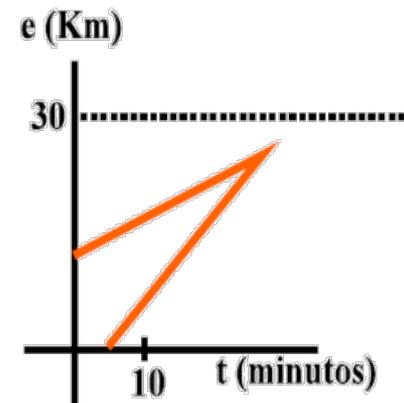
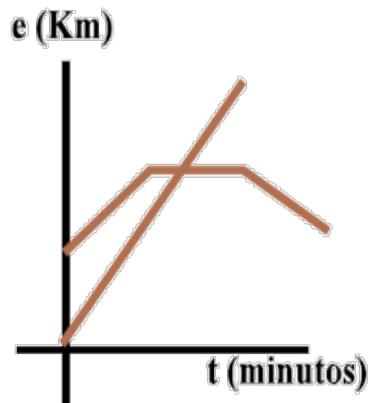
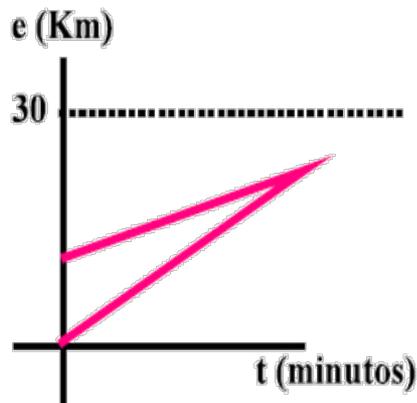
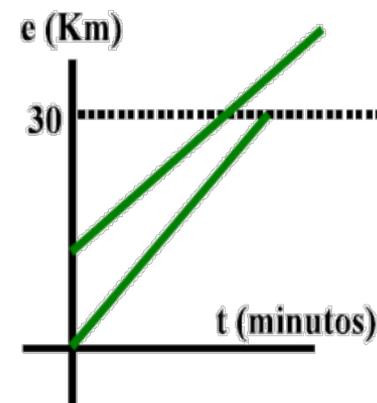
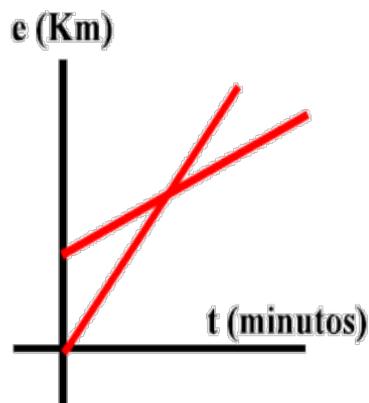
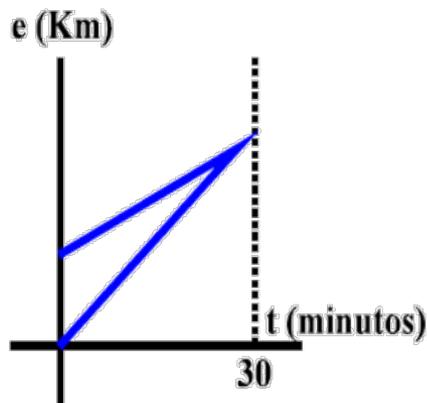
### ***Problema:***

Asociar a cada enunciado su gráfica correspondiente:

- a) Unos ladrones asalta un banco. Cuando emprenden la fuga, simultáneamente la policía, ya avisada, comienza su persecución. Al llegar a un punto, los ladrones se apartan del camino y esperan a que la policía pase, retrocediendo después
- b) Los ladrones comienzan como en el apartado anterior, pero después no se paran y son alcanzados por la policía antes de llegar a la frontera situada a 30 Km
- c) Empiezan como en el apartado b), pero después no son alcanzados antes de la frontera
- d) Comienzan como en a), pero luego los ladrones no se paran y son alcanzados por la policía antes de media hora

# ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- e) Unos ladrones asaltan un banco. A los 5 minutos de darse a la fuga, la policía emprende su persecución, alcanzándolos antes de llegar a la frontera
- f) Como en el apartado b), pero no son alcanzados, ya que la policía va por un camino equivocado



## ➤ Evaluación del alumno

- Tras cada U.D. del bloque de análisis se realizará un examen que contribuirá con un 10% a la nota del trimestre (cuatro U.D. aportan el 40% de la nota)
- El examen final del bloque contribuirá un 50% de la nota del trimestre
- El trabajo en grupo contribuirá con un 10% a la nota del trimestre

## ➤ Evaluación de la unidad

- Se evaluará el número de alumnos que aprueban el examen de la unidad
- Se estudiará la temporización definida en la unidad
- Se detectarán los conceptos que los alumnos encuentran más complejos
- Se analizará si los recursos empleados son los adecuados



# BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

## Bibliografía

- Algoritmo Matemáticas 1º Bachillerato. Ediciones SM. 2004
- Pitágoras Matemáticas 4º ESO, opción A y B. Ediciones SM. 2011
- Matemáticas de bolsillo. Vol. Fundamentos de Matemáticas. EZA ediciones S.L. 2013. Vicente Martínez Zamalloa

## Webgrafía

- [www.geogebraTube.org](http://www.geogebraTube.org) (Consultado por última vez el 06/03/2014)
- [www.mutua.es/cuelpoportal/motos.es](http://www.mutua.es/cuelpoportal/motos.es) (Consultado por última vez el 06/03/2014)
- <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matemáticas/bachiller.htm> (Consultado por última vez el 06/03/2014)
- <http://www.monografias.com/trabajos88/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx.shtml> (Consultado por última vez el 06/03/2014)
- <http://www.profesorenlinea.cl/Ciencias/Electrocardiograma.html> (Consultado por última vez el 06/03/2014)
- <http://www2.camino.upm.es/departamentos/matemáticas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%C3%A9trico/Catenaria.pdf> (Consultado por última vez el 06/03/2014)

Si tienes dudas...  
¡¡¡Pregunta!!!

