



Aprendizaje y Enseñanza de las materias de Matemáticas

Resolución de problemas

Antonio Aranda Plata

Departamento de Álgebra
Universidad de Sevilla

7 de febrero de 2011

<http://asignatura.us.es/apenmates/>

La propuesta de G. Pólya

George Pólya

13 / diciembre / 1887 Budapest (Hungria)

7 / septiembre / 1985 Palo Alto, California (USA)



“Si no puedes resolver un problema, es porque existe un problema más fácil que tú no sabes resolver: encuéntralo”

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

G. Pólya. “*Cómo plantear y resolver problemas*”. Trillas. México, 1976.

I) Comprender el problema

- Desear resolver el problema.
- Entender el enunciado.
- Responder a las preguntas:
 - ¿Qué nos piden? ¿Cuál es la incógnita?
 - ¿Cuáles son los datos?
 - ¿Cuáles son las condiciones?
- Notación adecuada.
- Dibujar la figura, si hay alguna relacionada con el problema.

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

II) Concebir un plan

- ¿Conocemos algún problema relacionado?
- Si tenemos un problema relacionado con el nuestro, ya resuelto, ¿podemos hacer uso de él?
- ¿Puede enunciarse el problema de forma diferente?
- ¿Hemos empleado todos los datos? ¿Hemos hecho uso de todas las condiciones?

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

III) Ejecución del plan

- Verificar cada paso del plan.
- Efectuar las operaciones que nos llevan a la solución.

La propuesta de G. Pólya

Fases en la resolución de un problema

III) Ejecución del plan

- Verificar cada paso del plan.
- Efectuar las operaciones que nos llevan a la solución.

IV) Examinar la solución obtenida

- Verificar el resultado.
- Número de soluciones.
- ¿Puede obtenerse el resultado de un modo distinto?
- ¿Puede utilizarse el resultado, o el método, para resolver algún otro problema?

Algunos ejemplos

Áreas de cuadriláteros

Algunos ejemplos

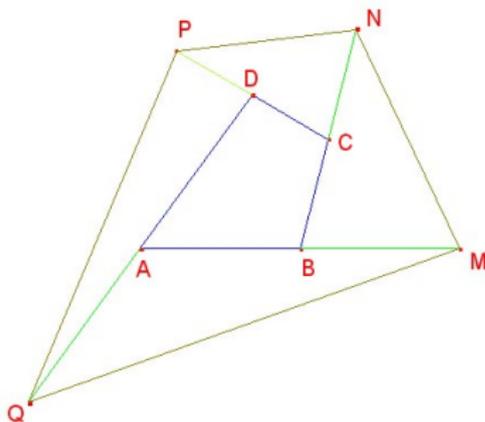
Áreas de cuadriláteros

A partir de un cuadrilátero $ABCD$ que mide k unidades de área se alargan los lados, todos “en el mismo sentido”, hasta que la longitud sea el doble de la inicial y se unen los puntos que resultan: M, N, P, Q . ¿Cuál es el área del cuadrilátero $MNPQ$?

Algunos ejemplos

Áreas de cuadriláteros

A partir de un cuadrilátero $ABCD$ que mide k unidades de área se alargan los lados, todos “en el mismo sentido”, hasta que la longitud sea el doble de la inicial y se unen los puntos que resultan: M , N , P , Q . ¿Cuál es el área del cuadrilátero $MNPQ$?

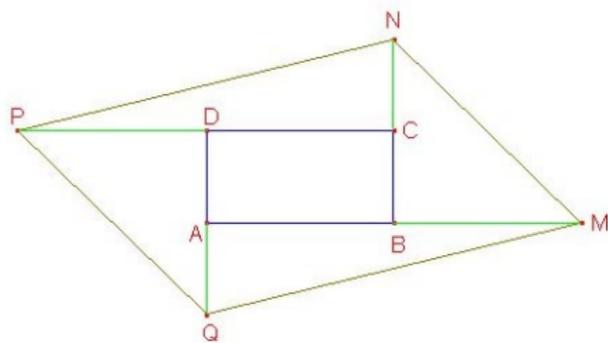


Un caso más sencillo

¿Será más fácil en un caso particular?

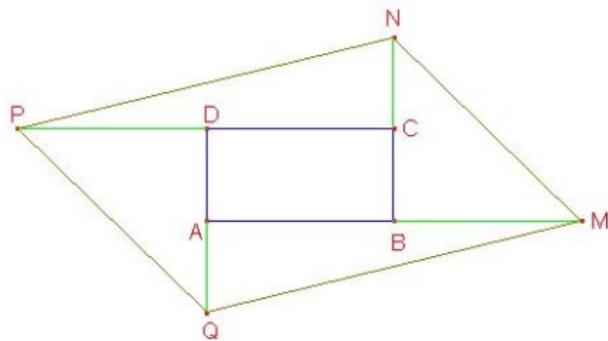
Un caso más sencillo

¿Será más fácil en un caso particular?



Un caso más sencillo

¿Será más fácil en un caso particular?



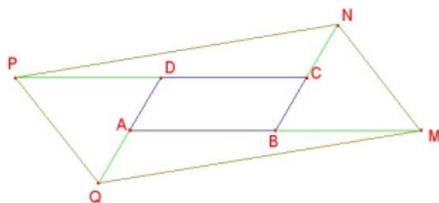
Las áreas de los triángulos son iguales a la del rectángulo. Por lo tanto el área total es $5k$.

Vamos a complicarlo un poco

¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?

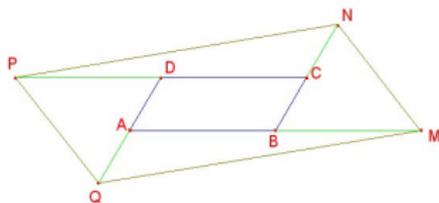
Vamos a complicarlo un poco

¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?



Vamos a complicarlo un poco

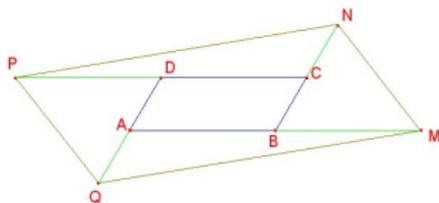
¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?



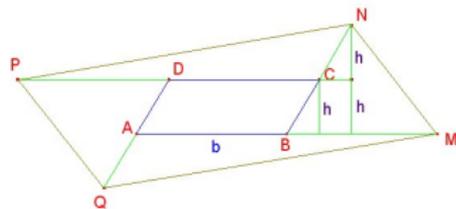
Aunque ahora hay que hacer algo más, también es fácil ver que el área es $5k$.

Vamos a complicarlo un poco

¿Qué ocurre si el cuadrilátero es un romboide?



Aunque ahora hay que hacer algo más, también es fácil ver que el área es $5k$.

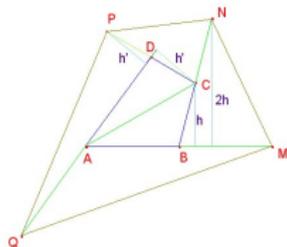


Volvamos al caso general

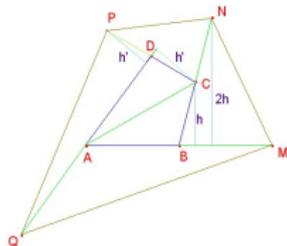
Conjetura: El área, en el caso general, es también $5k$.

La solución del problema

La solución del problema

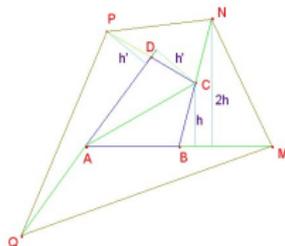


La solución del problema



$$\begin{aligned}
 [BMN] &= 2[ABC] \\
 [PQR] &= 2[ACD] \\
 [BMN] + [PQR] &= 2[ABCD]
 \end{aligned}$$

La solución del problema

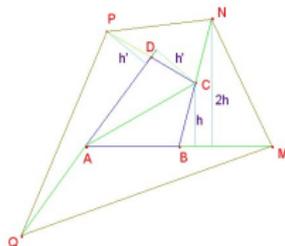


$$\begin{aligned}
 [BMN] &= 2[ABC] \\
 [PQD] &= 2[ACD] \\
 [BMN] + [PQD] &= 2[ABCD]
 \end{aligned}$$

Análogamente con la otra diagonal:

$$\begin{aligned}
 [AQM] &= 2[ABD] \\
 [PCN] &= 2[BCD] \\
 [AQM] + [PCN] &= 2[ABCD]
 \end{aligned}$$

La solución del problema



$$\begin{aligned}
 [BMN] &= 2[ABC] \\
 [PQD] &= 2[ACD] \\
 [BMN] + [PQD] &= 2[ABCD]
 \end{aligned}$$

Análogamente con la otra diagonal:

$$\begin{aligned}
 [AQM] &= 2[ABD] \\
 [PCN] &= 2[BCD] \\
 [AQM] + [PCN] &= 2[ABCD]
 \end{aligned}$$

Es decir, $[PQMN] = 5[ABCD]$

Leer con atención

Cuando iba para San Lucas
me encontré con un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
cada saco tenía siete gatos,
y cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿cuántos iban a San Lucas?

Leer con atención

Cuando iba para San Lucas
me encontré con un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
cada saco tenía siete gatos,
y cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿cuántos iban a San Lucas?

¡A San Lucas iba yo solo!

Leemos en “*Pensar matemáticamente*”

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
 - ¿Qué es lo que SÉ?
 - ¿Qué es lo que QUIERO?
 - ¿Qué puedo USAR?

Leemos en “*Pensar matemáticamente*”

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
 - ¿Qué es lo que SÉ?
 - ¿Qué es lo que QUIERO?
 - ¿Qué puedo USAR?
- Las preguntas del profesor.
 - Empezar por preguntas generales y sugerencias simples.
 - Ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas.
 - La lista de preguntas debe ser corta, para que se repitan en circunstancias diversas, convirtiéndolas así en un hábito mental.
 - Hay buenas y malas preguntas.

Leemos en “*Pensar matemáticamente*”

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
 - ¿Qué es lo que SÉ?
 - ¿Qué es lo que QUIERO?
 - ¿Qué puedo USAR?
- Las preguntas del profesor.
 - Empezar por preguntas generales y sugerencias simples.
 - Ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas.
 - La lista de preguntas debe ser corta, para que se repitan en circunstancias diversas, convirtiéndolas así en un hábito mental.
 - Hay buenas y malas preguntas.
- Fase de ataque: estados de ánimo.
 - ¡ATASCADO? ¡Escribe!
 - ¡AJÁ! ¡Enhorabuena!

Leemos en “*Pensar matemáticamente*”

- Fase de abordaje: la pregunta como actitud.
 - ¿Qué es lo que SÉ?
 - ¿Qué es lo que QUIERO?
 - ¿Qué puedo USAR?
- Las preguntas del profesor.
 - Empezar por preguntas generales y sugerencias simples.
 - Ir poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas.
 - La lista de preguntas debe ser corta, para que se repitan en circunstancias diversas, convirtiéndolas así en un hábito mental.
 - Hay buenas y malas preguntas.
- Fase de ataque: estados de ánimo.
 - ¡ATASCADO? ¡Escribe!
 - ¡AJÁ! ¡Enhorabuena!
- Fase de revisión:
 - COMPROBAR la solución.
 - REFLEXIONAR en las ideas y momentos claves.
 - GENERALIZAR a un concepto más amplio.

Bloqueos y desbloques



Miguel de Guzmán Osámiz

Cartagena (Murcia). 12 de enero de 1936.

Madrid. 14 de abril de 2004.

*“Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad
a través de los procesos matemáticos.”*

Pirámide. 1994.

Bloqueos y desbloques

La actitud adecuada

- Confianza.
- Tranquilidad, sin prisas.
- Disposición de aprender, curiosidad.
- Gusto por el reto.

Bloqueos y desbloques

La actitud adecuada

- Confianza.
- Tranquilidad, sin prisas.
- Disposición de aprender, curiosidad.
- Gusto por el reto.

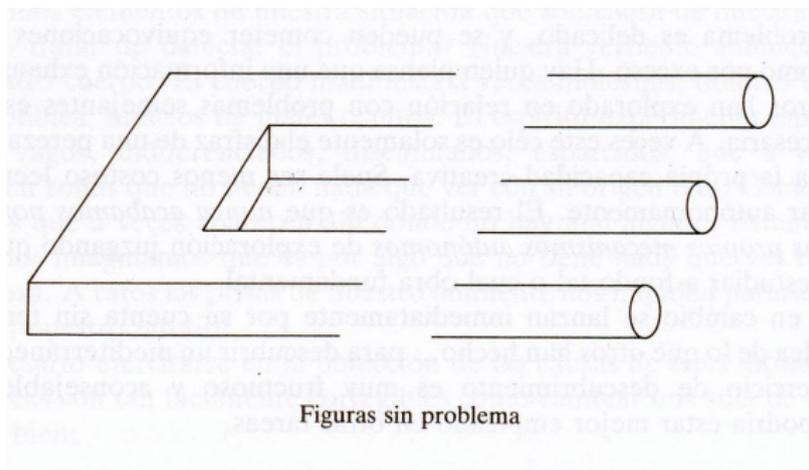
Los surcos de la mente

- Lo que vemos y lo que no vemos.
- Análisis de las situaciones desde un punto de vista que ordinariamente no es el nuestro.
- Salir de nuestros propios hábitos conceptuales.
- Escuchar con atención otras formas de encuadrar un mismo problema.

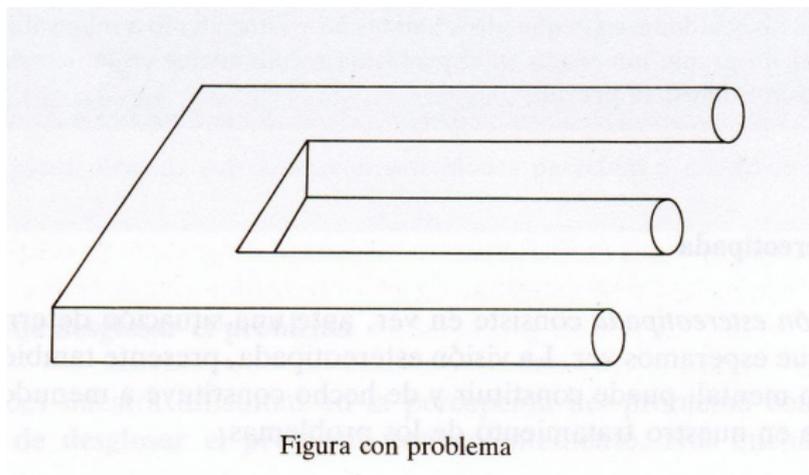
Joven o vieja



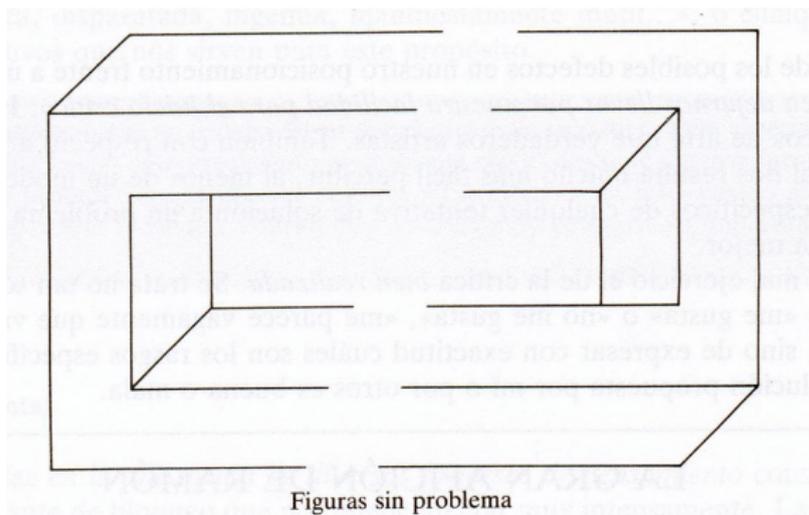
Figuras



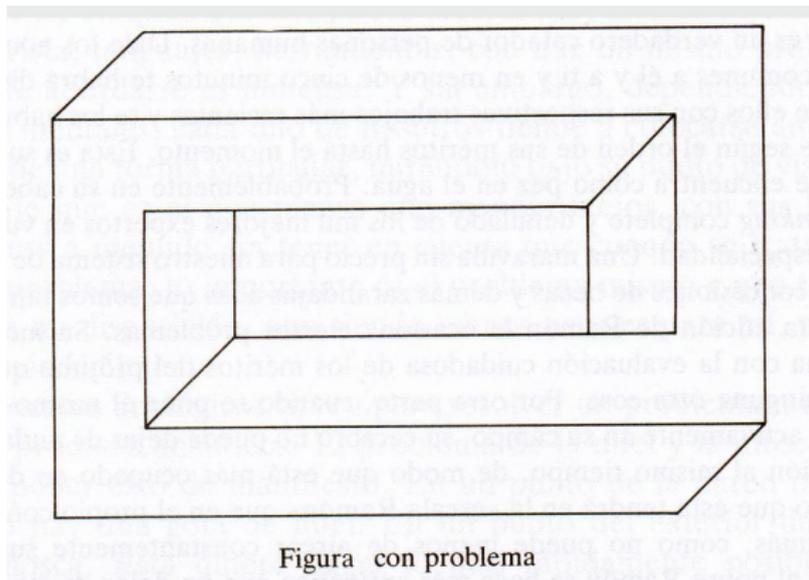
Figuras



Figuras



Figuras



Bloqueos de origen afectivo

- Apatía, pereza ante el comienzo.
- Miedos (al fracaso, a la equivocación, al ridículo, al examen).
- Ansiedades.
- Repugnancias.

Bloqueos de origen afectivo

- Apatía, pereza ante el comienzo.
- Miedos (al fracaso, a la equivocación, al ridículo, al examen).
- Ansiedades.
- Repugnancias.

Bloqueos de origen cognoscitivo

- Dificultades en la percepción del problema.
- Incapacidad de desglosar el problema.
- Visión estereotipada.
- Tendencia al juicio crítico.
- Rigidez mental.

Bloqueos de origen afectivo

- Apatía, pereza ante el comienzo.
- Miedos (al fracaso, a la equivocación, al ridículo, al examen).
- Ansiedades.
- Repugnancias.

Bloqueos de origen cognoscitivo

- Dificultades en la percepción del problema.
- Incapacidad de desglosar el problema.
- Visión estereotipada.
- Tendencia al juicio crítico.
- Rigidez mental.

Bloqueos culturales y ambientales

- La sabiduría popular
 - Busca la respuesta correcta.
 - Eso no es lógico.
 - Sigue las normas establecidas.
 - Hay que ser prácticos.

Ayudas para el desbloqueo

- La pregunta como actitud.
- Torbellino de ideas (brainstorming).
 - Espontaneidad de ideas.
 - Aplazamiento de juicio.
 - Cantidad conduce a calidad.
 - Perfeccionamiento de las ideas que surgen.